ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р - 1395

Н.Н. Боголюбов

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИКЕ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Дубна 1963

Н.Н. Боголюбов

Р - 1395

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИКЕ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

Дубна 1963

В в е д е н и е

Целью наших лекций является вывод уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, исходя из уравнений движения системы одинаковых бозе-частиц, и получение на этом пути "гидродинамического приближения" для функций Грина.

Для простоты изложения мы ограничимся здесь приближением идеальной жидкости.

Рассмотрим систему одинаковых бозе-частиц с парным взаимодействием, гамильтониан которой в представлении вторичного квантования имеет вид[x/]:

$$H = \frac{1}{2m} \int \nabla \psi^{+}(t,r) \nabla \psi(t,r)\, d\vec{r} - \lambda \int \psi^{+}(t,r)\psi(t,r)\, d\vec{r} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int \Phi(r-r') \psi^{+}(t,r) \psi^{+}(t,r') \psi(t,r') \psi(t,r)\, d\vec{r}\, d\vec{r}\,' +$$

$$+ \int \{ \eta(t,r) \psi^{+}(t,r) + \eta^{*}(t,r) \psi(t,r) + U(t,r) \psi^{+}(t,r) \psi(t,r) \}\, d\vec{r}\,.$$

Здесь λ -постоянная; $\psi^{+}(t,r)$, $\psi(t,r)$ - бозе-операторы в представлении Гейзенберга с обычными перестановочными соотношениями.

Обратим сейчас внимание на то, что в форму гамильтониана мы ввели, кроме обычных членов, еще дополнительные члены с "источниками частиц" $\eta(t,r)$, $\eta^{*}(t,r)$ и с внешним полем $U(t,r)$; η, η^{*}, U -заданные C -функции t, r .Введение таких "внешних источников" нам нужно будет для того, чтобы брать по отношению к ним вариации от обычных гидродинамических средних и таким образом получать выражения для функций Грина.

§ 1. Предварительные тождества

Для получения уравнений гидродинамики нам потребуется ряд тождеств, выражающих производные по времени следующих "локальных величин":

[x/] Мы пользуемся системой единиц, в которой $\hbar = 1$. Под знаком функциональной зависимости условимся писать вместо $\vec{r}$ просто r . .

$$\rho(t,r) = \langle \psi^+(t,r)\,\psi(t,r) \rangle, \quad \phi(t,r) = \langle \psi(t,r) \rangle,$$

$$j_a(t,r) = \frac{i}{2} \langle \frac{\partial \psi^+(t,r)}{\partial r_a}\,\psi(t,r) - \psi^+(t,r)\,\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial r_a} \rangle, \quad (a = 1,2,3) \qquad /1/$$

$$\rho(t,r)\,\epsilon(t,r) = -\frac{1}{4m} \langle (\Delta\psi^+(t,r))\psi(t,r) + \psi^+(t,r)(\Delta\psi(t,r)) \rangle +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int \Phi(r-r') \langle \psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,\psi(t,r) \rangle\, d\vec{r}\,' ,$$

представляющих среднюю плотность числа частиц ρ, средний поток $\vec{j}$ и среднюю энергию на одну частицу ϵ.

Скобки $\langle\ \rangle$ в выражениях /1/ обозначают средние, взятые с некоторым, вообще говоря, неравновесным статистическим оператором.

Чтобы найти производные по времени от величин /1/, можно воспользоваться уравнениями движения, которые в рассматриваемом случае гамильтониана H имеют вид:

$$i\,\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial t} = -\lambda\,\psi(t,r) - \frac{\Delta}{2m}\,\psi(t,r) +$$

$$+ \int \Phi(r-r')\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec{r}\,'\psi(t,r) + U(t,r)\psi(t,r) + \eta(t,r),$$

$$i\,\frac{\partial \psi^+(t,r)}{\partial t} = \lambda\,\psi^+(t,r) + \frac{\Delta}{2m}\psi^+(t,r) - \qquad /2/$$

$$-\psi^+(t,r) \int \Phi(r-r')\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,d\vec{r}\,' - U(t,r)\psi^+(t,r) - \eta^*(t,r).$$

Дифференцируя /1/, получим:

$$\frac{\partial \rho(t,r)}{\partial t} = \langle \frac{\partial \psi^+(t,r)}{\partial t}\,\psi(t,r) + \psi^+(t,r)\,\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial t} \rangle =$$

$$= \frac{i}{2m} \langle -(\Delta\psi^+(t,r))\,\psi(t,r) + \psi^+(t,r)(\Delta\psi(t,r)) \rangle +$$

$$+ \int \Phi(r-r') \langle \psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,\psi(t,r) - \psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r) \rangle\, d\vec{r}\,' +$$

$$+ i\eta^*(t,r)\phi(t,r) - i\eta(t,r)\phi^*(t,r).$$

Но $\sum\limits_a \frac{\partial}{\partial r_a} \langle \frac{\partial \psi^+(t,r)}{\partial r_a}\,\psi(t,r) - \psi^+(t,r)\,\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial r_a} \rangle = \langle (\Delta\psi^+(t,r))\psi(t,r) - \psi^+(t,r)(\Delta\psi(t,r)) \rangle$

Поэтому окончательно имеем

$$m\,\frac{\partial \rho(t,r)}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial j_a(t,r)}{\partial r_a} = im[\eta^*(t,r)\,\phi(t,r) - \eta(t,r)\phi^*(t,r)]. \qquad /1.1/$$

Точно так же получим для плотности тока[x/]:

$$\frac{\partial j_a}{\partial t} = \tfrac{1}{2} \langle \left(\frac{\partial}{\partial r_a}\, i\,\frac{\partial \psi^+}{\partial t}\right)\psi + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\, i\,\frac{\partial \psi}{\partial t} - i\,\frac{\partial \psi^+}{\partial t}\,\frac{\partial \psi}{\partial r_a} - \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_a}\, i\,\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \rangle =$$

$$= \frac{i}{4m} \langle \left(\frac{\partial}{\partial r_a}\Delta\psi^+\right)\psi - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}(\Delta\psi) - (\Delta\psi^+)\,\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_a}\Delta\psi\right) \rangle -$$

$$-\tfrac{1}{2} \langle \left(\frac{\partial}{\partial r_a} \int \Phi(r-r')\,\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,d\vec{r}\,'\right)\psi(t,r) -$$

$$- \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} \int \Phi(r-r')\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,d\vec{r}\,'\psi(t,r) +$$

$$+ \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_a} \int \Phi(r-r')\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec{r}\,'\psi(t,r)\right) -$$

$$- \int \Phi(r-r')\,\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,dr'\,\frac{\partial \psi(t,r)}{\partial r_a} \rangle +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\,\eta - \frac{\partial \eta^*}{\partial r_a}\,\psi + \eta^*\,\frac{\partial \psi}{\partial r_a} - \psi^+\frac{\partial \eta}{\partial r_a} \rangle - \langle \psi^+\psi \rangle \frac{\partial U}{\partial r_a} + \tfrac{1}{2} \langle \left(\frac{\partial}{\partial r_a}\lambda\psi^+\right)\psi - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\lambda\psi -$$

$$-\lambda\psi^+\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + \psi^+\left(\frac{\partial}{\partial r_a}\lambda\psi\right) \rangle .$$

Используя введенные нами величины и производя некоторые упрощения, получим:

$$\frac{\partial j_a}{\partial t} = \frac{1}{4m}\,\frac{\partial}{\partial r_a}\,\Delta\rho - \frac{1}{2m}\sum_\beta \langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\,\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\,\frac{\partial \psi}{\partial r_a} \rangle -$$

$$- \int \frac{\partial \Phi(r-r')}{\partial r_a} \langle \psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\psi(t,r) \rangle\, d\vec{r}\,' +$$

ε? см. след. ф-му

$$+ \rho\,\frac{\partial}{\partial r_a}(\lambda - U) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r_a}\eta + \frac{\partial \phi}{\partial r_a}\eta^* - \phi^*\,\frac{\partial \eta}{\partial r_a} - \phi\,\frac{\partial \eta^*}{\partial r_a}\right).$$

Удобно ввести новую величину $D_t(r, r-r')$:

$$\langle \psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\psi(t,r) \rangle \equiv D_t(r, r'-r) = D_t(r', r-r') =$$

$$= \tfrac{1}{2}\{ D_t(r', r-r') + D_t(r, r'-r) \}.$$

С помощью этой величины последнее соотношение может быть записано, после перехода к новой переменной интегрирования $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,'$, в виде:

$$\frac{\partial j_a}{\partial t} = \frac{1}{4m}\,\frac{\partial}{\partial r_a}\,\Delta\rho - \frac{1}{2m}\sum_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} \langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\,\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\,\frac{\partial \psi}{\partial r_a} \rangle -$$

---

x/ В дальнейшем аргументы t, r, y, ψ, ψ^+ и т.д. будут опускаться, за исключением случаев, когда это может привести к недоразумениям.

$$-\tfrac{1}{2}\int \frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_a}\{\, D_t\,(r,\,-R) + D_t\,(r-R,R)\,\}\, d\vec R\, +$$

нет

$$+\,\rho\,\frac{\partial}{\partial r_a}(\lambda - U) + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi^*}{\partial r_a}\eta + \frac{\partial\phi}{\partial r_a}\eta^* - \phi^*\frac{\partial\eta}{\partial r_a} - \phi\,\frac{\partial\eta^*}{\partial r_a}\Big).$$

/1.2/

Введем последнее тождество:

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = -\frac{1}{4m}<(\Delta\,\frac{\partial\psi^+}{\partial t})\,\psi + (\Delta\psi^+)\,\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^+}{\partial t}\,\Delta\psi + \psi^+(\Delta\,\frac{\partial\psi}{\partial t})> +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\int\Phi(r-r')\,\frac{\partial}{\partial t}<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\psi(t,r)>d\vec r\,' .$$

Займемся вычислением последнего члена:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)> =$$

$$= \frac{1}{2m}<(\Delta\psi^+(t,r))\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\psi(t,r)> + \frac{1}{2m}<\psi^+(t,r)(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\psi(t,r)> -$$

$$-\frac{1}{2m}<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r'))\psi(t,r)> + \frac{1}{2m}<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r))> -$$

$$-\int\Phi(r-r_1)<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r_1)\,\psi(t,r_1)\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)>d\vec r_1 +$$

$$+\int\Phi(r-r_1)<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,\psi^+(t,r_1)\psi(t,r_1)\,\psi(t,r)>d\vec r_1 -$$

$$-\int\Phi(r'-r_1)<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\,\psi^+(t,r_1)\psi(t,r_1)\,\psi(t,r')\,\psi(t,r)>d\vec r_1 +$$

$$+\int\Phi(r'-r_1)<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi^+(t,r_1)\,\psi(t,r_1)\,\psi(t,r')\,\psi(t,r)>d\vec r_1 +$$

$$+\,\eta(t,r)<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')> - \eta^*(t,r)<\psi^+(t,r')\,\psi(t,r)\,\psi(t,r)> +$$

$$+\,\eta(t,r')<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\,\psi(t,r) - \eta^*(t,r')<\psi^+(t,r)\,\psi(t,r')\,\psi(t,r)> .$$

Пользуясь перестановочностью $\psi^+(t,r)\,\psi(t,r)$ и $\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')$, получим отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial t}<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)> =$$

$$= \frac{i}{2m}<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r'))\,\psi(t,r) + \psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r)) -$$

$$-(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\psi(t,r) - \psi^+(t,r)(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\psi(t,r)> +$$

$$+\,i\eta^*(t,r)<\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,\psi(t,r)> + i\eta^*(t,r')<\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)> -$$

$$-\,i\eta(t,r)<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')> - i\eta(t,r')<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\,\psi(t,r)> .$$

Подставляя это равенство, получим с учетом уравнений движения :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = \frac{i}{8m^2}<(\Delta\Delta\psi^+)\,\psi - (\Delta\,\psi^+)(\Delta\psi) + (\Delta\psi^+)(\Delta\psi) - \psi^+(\Delta\Delta\psi)> +$$

$$+\,\frac{i}{4m}<-(\Delta\int\Phi(r-r')\,\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\,\psi(t,r')\,d\vec r\,')\,\psi(t,r) +$$

$$+\int\Phi(r-r')[(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r) - \psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r))]\,d\vec r\,' +$$

$$+\,\psi^+(t,r)(\Delta\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\,d\vec r\,')> +$$

$$+\,\frac{i}{4m}\int\Phi(r-r')<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r'))\psi(t,r) +$$

$$+\,\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')(\Delta\psi(t,r)) - (\Delta\psi^+(t,r))\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r) -$$

$$-\,\psi^+(t,r)(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\psi(t,r)>d\vec r\,' +$$

$$+\,\frac{i}{2}\int\Phi(r-r')\{\eta^*(t,r')<\psi^+(t,r)\psi(t,r)\,\psi(t,r)> + \eta^*(t,r)<\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,\psi(t,r)> -$$

$$-\,\eta(t,r)<\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')> - \eta(t,r')<\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\psi(t,r)>\}\,dr' -$$

$$-\,\frac{i}{4m}<(\Delta\eta^*)\psi + \eta^*\Delta\psi - (\Delta\psi^+)\eta - \psi^+(\Delta\eta)> -$$

$$-\,\frac{i}{2m}\sum_a\Big[\frac{\partial}{\partial r_a}(U-\lambda)<\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\psi - \psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_a}>.\Big] \qquad (*)$$

Заметим теперь, что:

$$\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\{(\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Delta\psi^+)\,\psi - \Delta\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} - \psi^+\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Delta\psi + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi\} =$$

$$= (\Delta\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\Delta\psi) =$$

$$= \sum_\beta\frac{\partial^2}{\partial r_\beta^2}\{(\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\psi)\} - 2\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\{(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}(\Delta\psi)\} .$$

Преобразуем далее члены с Φ :

$$-(\Delta\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec r\,')\psi(t,r) +$$

$$+\,(\Delta\psi^+(t,r))\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec r\,'\psi(t,r) +$$

$$+\,\psi^+(t,r)(\Delta\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec r\,')\psi(t,r) -$$

$$-\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec r\,'(\Delta\psi(t,r)) =$$

$$= -2\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\,\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec r\,'\psi(t,r) +$$

$$+\,2\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\,\psi^+(t,r)\,\psi^+(t,r')\psi(t,r')\,d\vec r\,'\,\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}.$$

Кроме того, $\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')d\vec r'\,\Delta\psi(t,r)-$

$$-\int\Phi(r-r')(\Delta\psi^+(t,r))\psi^+(t,r')\psi(t,r')d\vec r'\,\psi(t,r)=$$

$$=\sum_\beta\int\Phi(r-r')\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Big\{\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}-$$

$$-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\Big\}d\vec r'=$$

$$=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\int\Phi(r-r')\Big\{\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\Big\}d\vec r'-$$

$$-\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\Big\{\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\Big\}d\vec r'.$$

Аналогично получим равенство

$$\int\Phi(r-r')\psi^+(t,r)\{\psi^+(t,r')(\Delta\psi(t,r'))-(\Delta\psi^+(t,r'))\psi(t,r')\}\psi(t,r)d\vec r'=$$

$$=\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r)\Big\{\psi^+(t,r')\frac{\partial\psi(t,r')}{\partial r'_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r')}{\partial r'_\beta}\psi(t,r')\Big\}\psi(t,r)d\vec r'.$$

Подставляя полученные равенства в (*) будем иметь окончательно:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t}=\frac{i}{8m^2}\Delta\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\rangle+\frac{i}{4m}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Big\{-\frac{1}{m}\Big\langle(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}-\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}(\Delta\psi)\Big\rangle+$$

$$+\int\Phi(r-r')\Big\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\Big\rangle d\vec r'\Big\}+$$

$$+\frac{i}{4m}\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(r-r')}{\partial r_\beta}\Big\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\beta}\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)+$$

$$+\psi^+(t,r)\Big[\psi^+(t,r')\frac{\partial\psi(t,r')}{\partial r'_\beta}-\frac{\partial\psi^+(t,r')}{\partial r'_\beta}\psi(t,r')\Big]\psi(t,r)\Big\rangle d\vec r'-$$

$$-\frac{1}{m}\sum_\beta j_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(U-\lambda)+\frac{i}{4m}(\eta\Delta\phi^*-\eta^*\Delta\phi+\phi^*\Delta\eta-\phi\Delta\eta^*)+$$

$$+\frac{i}{2}\int\Phi(r-r')\{\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle-$$

$$-\eta(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle-\eta(t,r)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle\}d\vec r'$$

Если ввести величину

$$G_t^{(\alpha)}(r,r'-r)=\frac{i}{4m}\Big\langle\psi^+(t,r')\Big(\psi^+(t,r)\frac{\partial\psi(t,r)}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial\psi^+(t,r)}{\partial r_\alpha}\psi(t,r)\Big)\psi(t,r')\Big\rangle \qquad /1.3/$$

и в некоторых интегралах ввести новую переменную интегрирования $\vec R=\vec r'-\vec r$, то полученное нами тождество принимает вид:

$$\frac{\partial(\rho\epsilon)}{\partial t}=\frac{i}{8m^2}\Delta\langle(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)\rangle+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\Big\{\frac{i}{4m^2}\Big\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi-(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\Big\rangle+\int\Phi(R)G_t^{(\beta)}(r,R)d\vec R\Big\}+$$

$$+\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}\{G_t^{(\beta)}(r,-R)+G_t^{(\beta)}(r-R,R)\}d\vec R-$$

$$-\frac{1}{m}\sum_\beta j_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(U-\lambda)+\frac{i}{4m}(\eta\Delta\phi^*-\eta^*\Delta\phi+\phi^*\Delta\eta-\phi\Delta\eta^*)+$$

$$+\frac{i}{2}\int\Phi(r-r')[\eta^*(t,r)\langle\psi^+(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle+\eta^*(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle- \qquad /1.4/$$

$$-\eta(t,r')\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r)\rangle-\eta(t,r)\langle\psi^+(t,r)\psi^+(t,r')\psi(t,r')\rangle]d\vec r'.$$

§ 2. Уравнения гидродинамики для нормальной жидкости

Приступим теперь к выводу уравнений гидродинамики для случая нормальной несверхтекучей жидкости.

Заметим, что этот вопрос уже был исследован в работах К.П. Гурова[1] и мы им здесь будем заниматься только в целях дальнейшего обобщения на случай сверхтекучей жидкости.

Для поставленной в этом параграфе цели источники η,η^* несущественны, и мы поэтому положим здесь:

$$\eta=\eta^*=0.$$

Рассмотрим, прежде всего, состояние статистического равновесия нормальной жидкости. Это состояние характеризуется обычными параметрами – плотностью числа частиц ρ, температурой θ, скоростью $\vec v$ движения жидкости как целого.

Зависимость от скорости $\vec v$ тривиальна. Посредством преобразования операторных функций:

$$\psi\to e^{im\vec v\vec r}$$

мы можем выразить значения средних

$$\langle\dots\rangle_{\rho,\theta,v}$$

через значения средних:

$$\langle\dots\rangle_{\rho,\theta,0}$$

для состояния статистического равновесия покоящейся жидкости.

Имеем, например,

$$\vec j=m\rho\vec v, \qquad /2.1/$$

$$\epsilon=\epsilon^0+\frac{mv^2}{2}=\epsilon(\rho,\theta)+\frac{mv^2}{2},$$

где $\epsilon(\rho,\theta)$ будет средней энергией, отнесенной на одну частицу, для состояния статистического равновесия покоящейся частицы.

В дальнейшем нам придется иметь дело со средними типа:

$$\mathfrak{U} = \langle(\mathfrak{D}_1\psi^+(t,r))(\mathfrak{D}_2\psi(t,r))\rangle_{\rho,\theta,v},$$

$$\mathfrak{B} = \langle(\mathfrak{D}_1\psi^+(t,r))(\mathfrak{D}_2\psi^+(t,r'))(\mathfrak{D}_3\psi(t,r'))(\mathfrak{D}_4\psi(t,r))\rangle_{\rho,\theta,v},$$

где $\mathfrak{D}_\nu$ линейные комбинации из постоянных и операторов дифференцирования по пространственным переменным /см., например, выражения для функций $\mathfrak{D}_t$ и $G_t^{(a)}$ в § 1/; в частности, $\mathfrak{D}_\nu$ может быть просто равна единице.

Благодаря наличию полной пространственной однородности состояния статистического равновесия, нетрудно заметить, что:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\rho,\theta,v),$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\rho,\theta,v/r-r').$$

Заметим, также, что если имеется постоянное внешнее поле

$$U(t,r) = U = const,$$

то ни $\mathfrak{U}$, ни $\mathfrak{B}$ от такой постоянной U зависеть не будут, поскольку зависимость от U исключается градиентным преобразованием

$$\psi \to e^{iUt}\psi$$

/ а $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{B}$ инвариантны при этих преобразованиях/.

Перейдем сейчас к рассмотрению изучаемых в гидродинамике неравновесных процессов, для которых неравновесные величины типа

$$\mathfrak{U}(t,r) = \langle(\mathfrak{D}_1\psi^+(t,r))(\mathfrak{D}_2\psi(t,r))\rangle \qquad /2.2/$$

$$\mathfrak{B}(t,r,r-r') = \langle(\mathfrak{D}_1\psi^+(t,r))(\mathfrak{D}_2\psi^+(t,r'))(\mathfrak{D}_3\psi(t,r'))(\mathfrak{D}_4\psi(t,r))\rangle,$$

а также, разумеется, и внешнее поле $U(t,r)$ меняются достаточно медленно при временных и пространственных трансляциях.

Мы предполагаем, что отклонения от статистического равновесия асимптотически затухают, так что можно определить хотя бы по порядку величины время релаксации T и длину свободного пробега ℓ. Мы, стало быть, рассматриваем такие неравновесные процессы, для которых величины /2.2/ и $U(t,r)$ меняются достаточно мало при трансляциях:

$$t \to t+t_0;\ r \to r+r_0,\ r' \to r'+r_0';\ |t_0| \approx T;\ |r_0| \approx \ell,$$

и в окрестности каждой точки $(t,\vec{r})$ имеются лишь малые отклонения от "локального статистического равновесия".

Говоря более детально, мы предполагаем, что величины типа /2.2/ достаточно мало отличаются от соответствующих равновесных величин

$$\mathfrak{U}(\rho(t,r),\theta(t,r),v(t,r)),\quad \mathfrak{B}(\rho(t,r),\theta(t,r),v(t,r)/r-r') \qquad /2.3/$$

тем меньше, чем меньше градиенты ρ, θ, v, U /, где $\theta(t,r)$, $\vec{v}(t,r)$ определяются уравнениями /2.1/, т.е. выражаются через поток $\vec{j}$ и среднюю энергию ϵ в данной точке.

Заметим, что предположение о том, что для процессов с достаточно малыми градиентами ρ, θ, v, U мы имеем в каждой малой области приближенно локальное статистическое равновесие, весьма существенно для возможности перехода к уравнениям гидродинамики.

Так, например, возьмем случай, когда в нашей динамической системе взаимодействие полностью отсутствует – система состоит из невзаимодействующих бозе-частиц.

Тогда мы, конечно, можем рассматривать процессы со сколь угодно малыми градиентами ρ, j, ϵ ... и формально ввести локальные $\vec{v}$ и θ. Только при этом величины типа /2.2/, вообще говоря, не будут даже приближенно выражаться их "квазиравновесными" значениями /2.3/. Именно в силу такого положения уравнения гидродинамики и не будут верны для систем полностью невзаимодействующих частиц.

Заметим еще, что обычный вывод уравнений гидродинамики /Гильберта-Чэпмена-Энского/ для газов из уравнения Больцмана как раз основан на том, что это уравнение имеет решения, близкие к локальному равновесному, допускающие разложения по степеням градиентов.

После сделанных замечаний возвратимся к нашим предположениям о характере рассматриваемых неравновесных процессов.

Чтобы сформулировать их в виде, удобном для расчетов, целесообразно ввести некоторый малый параметр μ, характеризующий степень медленности процесса и отступления от изотропии. Средние типа /2.2/ и внешнее поле будем представлять в виде:

$$U(t,r) = \tilde{U}(\mu t,\mu r) = U(\tau,\xi),$$

$$\mathfrak{U}(t,r) = \tilde{\mathfrak{U}}(\mu t,\mu r;\mu) = \tilde{\mathfrak{U}}(\tau,\xi;\mu), \qquad /2.4/$$

$$\mathfrak{B}(t,r) = \tilde{\mathfrak{B}}(\mu t,\mu r,r-r';\mu) = \tilde{\mathfrak{B}}(\tau,\xi,R;\mu),$$

$$\tau = \mu t,\quad \vec{\xi} = \mu\vec{r},\quad \vec{R} = \vec{r}-\vec{r}'.$$

В частности, можем написать также

$$\rho(t,r) = \tilde{\rho}(r,\xi), \quad \vec{j}(t,r) = \tilde{\vec{j}}(r,\xi), \quad \epsilon(t,r) = \tilde{\epsilon}(r,\xi).$$

Представления /2.4/ оформляют наше допущение о медленности изменения во времени и слабое отступление от локальной изотропии.

Чтобы выразить допущение о слабом отклонении от локального статистического равновесия, напишем:

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}(r,\xi;\mu) = \tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}^{(0)}(r,\xi) + \mu\tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}^{(1)}(r,\xi) + \mu^2\tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}^{(2)}(r,\xi) + +,$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}(r,\xi,R;\mu) = \tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(0)}(r,\xi,R) + \mu\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(1)}(r,\xi,R) + \mu^2\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(2)}(r,\xi,R) + +,$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{U}}}^{(0)}(r,\xi) = \mathfrak{U}(\tilde{\rho}(r,\xi), \quad \tilde{\theta}(r,\xi), \ \tilde{v}(r,\xi)), \tag{2.5}$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{B}}}^{(0)}(r,\xi,R) = \mathfrak{B}(\tilde{\rho}(r,\xi), \tilde{\theta}(r,\xi), \ \tilde{v}(r,\xi)\,|\,R),$$

где $\tilde{\theta}$ и $\tilde{v}$ определены соотношениями:

$$\tilde{\vec{v}} = \frac{1}{m\tilde{\rho}}\tilde{\vec{j}},$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon(\tilde{\rho},\tilde{\theta}) + \frac{m\tilde{v}^2}{2}. \tag{2.6}$$

Далее, $\tilde{\mathfrak{U}}^{(1)}$, $\tilde{\mathfrak{B}}^{(1)}$ должны быть линейными формами по отношению к градиентам $\tilde{\rho}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{v}$, $\tilde{U}$ и т.д.

Таким образом, пользуясь /2.5/, мы предполагаем, что величины типа $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ можно разлагать по градиентам ρ, v, θ, U.

Фактически такое разложение мы получим, если будем иметь кинетическое уравнение типа Больцмана.

Перейдем теперь непосредственно к установлению уравнений гидродинамики. Мы будем иметь дело с функциями $\mathfrak{D}_t(r,R)$, $G_t^{(\alpha)}(r,R)$, принадлежащими к типу $\mathfrak{B}$. Положим поэтому

$$\mathfrak{D}_t(r,R) = \tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,R;\mu),$$

$$G_t^{(\alpha)}(r,R) = \tilde{\tilde{G}}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R;\mu),$$

или в более сокращенной записи:

$$\mathfrak{D}_t^{(\alpha)}(r,R) = \tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R),$$

$$G_t^{(\alpha)}(r,R) = \tilde{\tilde{G}}_\tau^{(\alpha)}(\xi,R).$$

Перейдем в тождествах предыдущего параграфа от переменных $(t,\vec{r})$ к переменным $(\tau,\vec{\xi})$.

Тогда из уравнения /1.1/, /1.2/, /1.4/ получим:

$$m\frac{\partial\tilde{\tilde{\rho}}}{\partial\tau} + \sum_\beta \frac{\partial\tilde{\vec{j}}_\beta(\tau,\xi)}{\partial\xi_\beta} = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\tilde{\tilde{j}}_\alpha(\tau,\xi)}{\partial\tau} = \frac{1}{2m}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\Big\{\delta_{\alpha\beta}\mu^2\frac{\Delta\xi}{2}\tilde{\tilde{\rho}}(\tau,\xi) -$$

$$-\Big\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}\Big\rangle - \frac{1}{2\mu}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}\{\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,-R) + \tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi-\mu R,R)\}d\vec{R} -$$

$$-\tilde{\tilde{\rho}}(\tau,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\tilde{\tilde{U}}(\tau,\xi), \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial(\tilde{\tilde{\rho}}\tilde{\tilde{\epsilon}})}{\partial\tau} = \frac{i\mu}{8m^2}\Delta_\xi\langle(\Delta\psi^+)\psi - \psi^+(\Delta\psi)\rangle +$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\Big\{\frac{i}{4m^2}\Big\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\Delta\psi - (\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\Big\rangle + \int\Phi(R)\tilde{\tilde{G}}_\tau^{(\beta)}(\xi,R)d\vec{R}\Big\} + \tag{2.9}$$

$$+\frac{1}{\mu}\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}\{\tilde{\tilde{G}}_\tau^{(\beta)}(\xi,-R) + \tilde{\tilde{G}}^{(\beta)}(\xi-\mu R,R)\}d\vec{R} + \frac{1}{m}\sum_\beta\tilde{\tilde{j}}_\beta\frac{\partial\tilde{\tilde{U}}}{\partial\xi_\beta}.$$

Заметим, что в уравнении /2.8/ входит величина $\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi-\mu R,R)$ с быстро убывающим при увеличении $|\vec{R}|$ множителем $\partial\Phi(R)/\partial R_\alpha$.

Разлагая ее по степеням μR, получим для соответствующего члена в уравнении /2.8/:

$$\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}\Big\{\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,-R) + \tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,R) - \mu\sum_\beta R_\beta\frac{\partial\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,R)}{\partial\xi_\beta} +$$

$$+\frac{\mu^2}{2}\sum_{\beta,\gamma}R_\alpha R_\gamma\frac{\partial^2\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,R)}{\partial\xi_\beta\partial\xi_\gamma} + O((\mu R)^3)\Big\}d\vec{R} =$$

$$= -\mu\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\frac{\partial\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_\tau(\xi,R)}{\partial\xi_\beta}d\vec{R} + O(\mu^3).$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_r(\xi,-R)+\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_r(\xi,R)$ является четной функцией R, и, кроме того, сама $\tilde{\tilde{D}}_r(\xi,R)$ является четной функцией R с точностью до величин порядка μ. В результате, оставляя только члены порядка μ, получим уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\tilde{j}}_\alpha}{\partial r} = \frac{1}{2m}\sum_\beta \frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\{-<\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}>\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_r(\xi,R)\,d\vec R-\tilde{\tilde\rho}\,\frac{\partial\tilde{\tilde U}}{\partial\xi_\alpha},$$

или

$$\frac{\partial\tilde{\tilde j}_\alpha}{\partial r} = \sum_\beta\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial\xi_\beta}-\tilde{\tilde\rho}\,\frac{\partial U}{\partial\xi_\alpha}, \qquad /2.10/$$

где

$$T_{\alpha\beta}(r,\xi) = -\frac{1}{2m}<\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}>+ \qquad /2.11/$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\alpha}R_\beta\tilde{\tilde{\mathfrak{D}}}_r(\xi,R)\,d\vec R.$$

Производя аналогичное разложение по μ для величины $\tilde{\tilde G}^{(\beta)}_r(\xi-\mu R,R)$ в уравнении /2.9/, находим с точностью до членов порядка μ включительно:

$$\frac{\partial(\tilde{\tilde{\rho\varepsilon}})}{\partial r} = \frac{i}{8m^2}\mu\Delta_\xi<(\Delta\psi^+)\psi-\psi^+(\Delta\psi)>+\sum_\beta\frac{\partial I_\beta}{\partial\xi_\beta}-$$

$$-\frac{1}{m}\sum_\beta\tilde{\tilde j}_\beta\frac{\partial\tilde{\tilde U}}{\partial\xi_\beta}. \qquad /2.12/$$

Здесь величина I_α дается выражением

$$I_\alpha=-\frac{i}{4m^2}<(\Delta\psi^+)\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}-\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}(\Delta\psi)>-\int\Phi(R)\tilde{\tilde G}^{(\alpha)}_r(\xi,R)\,d\vec R-$$

$$-\sum_\beta\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha G^{(\beta)}_r(\xi,R)\,d\vec R+\frac{\mu}{2}\sum_{\beta,\gamma}\frac{\partial}{\partial\xi_\gamma}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_\beta}R_\alpha R_\gamma\tilde{\tilde G}^{(\beta)}_r(\xi,R)\,d\vec R.$$

Заметим теперь, что формы $T_{\alpha\beta}$, I_α составлены из величин типа $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ /2.2/, и потому воспользуемся для них разложениями /2.5/.

Получим:

$$T_{\alpha\beta}=T^{(0)}_{\alpha\beta}+\mu T^{(1)}_{\alpha\beta}+\dots$$

$$I_\alpha=I^{(0)}_\alpha+\mu I^{(1)}_\alpha+\dots \qquad /2.14/$$

где

$$T^{(0)}_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}(\tilde{\tilde\rho},\tilde{\tilde\theta},\tilde{\tilde v});\quad I^{(0)}_\alpha=I_\alpha(\tilde{\tilde\rho},\tilde{\tilde\theta},\tilde{\tilde v}), \qquad /2.15/$$

причем $T_{\alpha\beta}(\tilde{\tilde\rho},\tilde{\tilde\theta},\tilde{\tilde v})$; $I_\alpha(\tilde{\tilde\rho},\tilde{\tilde\theta},\tilde{\tilde v})$ получаются из выражений /2.11/, /2.13/ заменой неравновесных средних

$$<\dots>$$

соответствующими равновесными средними :

$$<\dots>_{\rho,\theta,v}.$$

Учет членов порядка μ в /2.14/ соответствует приближению вязкой жидкости. Поскольку мы здесь ограничиваемся лишь приближением идеальной жидкости, нам достаточно будет иметь дело только с $T^{(0)}_{\alpha\beta}$ и $I^{(0)}_\alpha$.

Преобразуем сейчас эти выражения к более удобному виду. Целесообразно прежде всего выразить

$$<\dots>_{\rho,\theta,v}$$

через

$$<\dots>_{\rho,\theta,0}.$$

Совершим поэтому преобразование:

$$\psi\to e^{im\vec v\vec r}.$$

Находим:

$$<\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}>_{\rho,\theta,v}=$$

$$=<(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}-imv_\alpha\psi^+)(\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+imv_\beta\psi)+(\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}-imv_\beta\psi^+)(\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}+imv_\alpha\psi)>_{\rho,\theta,0}=$$

$$=<\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}>_{\rho,\theta,0}+2m^2v_\alpha v_\beta\rho,$$

так как члены, содержащие только одну производную, пропадают в равновесном состоянии при $v=0$ из-за инвариантности при замене $\vec r\to-\vec r$.

Таким образом, земечая, что при $v=0$, $T_{\alpha\beta}$ может быть только изотропным тензором, получим:

$$T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v)=-m\rho v_\alpha v_\beta-\delta_{\alpha\beta}\mathfrak{P}(\rho,\theta), \qquad /2.16/$$

и при любом $\alpha=1,2,3$

$$-\mathfrak{P}(\rho,\theta)=-\frac{1}{m}<\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial r_\alpha}>_{\rho,\theta,0}+$$

$$+\tfrac12\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_a}R_a\,\mathfrak{D}(R|\rho,\theta)\,d\vec R\,, \qquad /2.17/$$

где

$$\mathfrak{D}(r-r'|\rho,\theta)=\langle\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\rangle_{\rho,\theta,0}\,.$$

Пусть $F(\rho,\theta)$ будет свободной энергией на одну частицу. Покажем, что / N – число частиц/:

$$\mathcal{P}(\rho,\theta)=-\frac{\partial NF(\frac{N}{V},\theta)}{\partial V}=\rho^2\frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\rho}\,, \qquad /2,18/$$

т.е. что наше $\mathcal{P}$ будет обычным термодинамическим давлением.

Чтобы установить это соотношение, удобно подвергнуть объем V линейному расширению только по одной, например, a –ой оси координат $r_a\to Lr_a$; $r_\beta\to r_\beta(a\neq\beta)$.

Пусть H_L будет соответствующим гамильтонианом "растянутой системы":

$$H_L=\frac{1}{2m}\int\psi^+(r)p_L^2\psi(r)d\vec r+\tfrac12\int\Phi_L(r-r')\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)\,d\vec r\,d\vec r'\,,$$

где

$$p_L^2=-\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2}{\partial r_a^2}-\sum_{\beta\neq a}\frac{\partial^2}{\partial r_\beta^2}\,,$$

и $\Phi_L(R)$ получается из $\Phi(R)$ заменой $R_a\to LR_a$, $R_\beta\to R_\beta(a\neq\beta)$.

Тогда

$$\frac{\partial NF}{\partial V}=\frac1V\left\langle\left(\frac{\partial H_L}{\partial L}\right)_{L=1}\right\rangle_{\rho,\theta,0}\,,$$

или взяв явно выражение

$$\frac{\partial NF}{\partial V}=\frac1m\left\langle\psi^+(r)\frac{\partial^2}{\partial r_a^2}\psi(r)\right\rangle_{\rho,\theta,0}+\tfrac12\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_a}R_a\,\mathfrak{D}(R/\rho,\theta)\,d\vec R=$$

$$=-\frac1m\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial\psi}{\partial r_a}\right\rangle_{\rho,\theta,0}+\tfrac12\int\frac{\partial\Phi}{\partial R_a}R_a\,\mathfrak{D}(R/\rho,\theta)\,d\vec R\,,$$

что и доказывает справедливость соотношения /2.18/.

Подставив /2.14/, /2.15/, /2.16/ в уравнение /2.10/, найдем:

$$\frac{\partial\tilde j_a}{\partial r}=-\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\left(m\tilde\rho\,\tilde v_a\tilde v_\beta+\delta_{a\beta}\,\mathcal{P}(\tilde\rho,\tilde\theta)\right)-\tilde\rho\frac{\partial U}{\partial\xi_a}\,. \qquad /2.19/$$

Аналогично можно преобразовать уравнение энергии /2.12/.

Заметим, прежде всего, что

$$G^{(a)}(r,-r'|\rho,\theta,v)=$$

$$=\frac{i}{4m}\langle\psi^+(r')[\psi^+(r)imv_a\psi(r)+\psi^+(r)imv_a\psi(r)]\psi(r')\rangle_{\rho,\theta,0}=$$

$$=-\frac{v_a}{2}\,\mathfrak{D}(r-r_a|\rho,\theta)\,.$$

Преобразуем еще первый член в выражении /2.13/ для I_a^0, учитывая, что среднее берется по состоянию статистического равновесия, аналогично тому, как это мы делали, преобразовывая $T^0_{a\beta}$:

$$-\frac{i}{4m}\left\langle\sum_\beta\left(\frac{\partial^2\psi^+}{\partial r_\beta^2}\frac{\partial\psi}{\partial r_a}-\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial^2\psi}{\partial r_\beta^2}\right)\right\rangle_{\rho,\theta,v}=$$

$$=-\frac m2 v_a\sum_\beta v_\beta^2\langle\psi^+\psi\rangle_{\rho,\theta,0}-\frac{1}{2m}\sum_\beta v_\beta\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_a}\right\rangle_{\rho,\theta,0}+$$

$$+\frac{1}{4m}v_a\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\psi+\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}-\frac{1}{2m}v_a\sum_\beta\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}=$$

$$=-\rho v_a\frac{mv^2}{2}-\frac{v_a}{m}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial\psi}{\partial r_a}\right\rangle_{\rho,\theta,0}-\frac{v_a}{2m}\sum_\beta\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}\,.$$

Таким образом, получим:

$$I_a(\rho,\theta,v)=-\rho v_a\frac{mv^2}{2}-\frac{v_a}{m}\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial\psi}{\partial r_a}\right\rangle_{\rho,\theta,0}-\frac{v_a}{2m}\sum_\beta\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}-$$

$$-\frac{v_a}{2}\int\Phi(R)\mathfrak{D}(R|\rho,\theta)\,d\vec R+\frac{v_a}{2}\int\frac{\partial\Phi(R)}{\partial R_a}R_a\,\mathfrak{D}(R|\rho,\theta)\,d\vec R\,.$$

Но, с другой стороны:

$$\frac{1}{2m}\sum_\beta\left\langle\frac{\partial\psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial\psi}{\partial r_\beta}\right\rangle_{\rho,\theta,0}+\tfrac12\int\Phi(R)\mathfrak{D}(R|\rho,\theta)\,d\vec R=$$

$$=\rho\,\epsilon(\rho,\theta)=\rho\left\{F(\rho,\theta)-\theta\frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\theta}\right\}\,,$$

и потому, принимая во внимание /2.17/, получим:

$$I_a(\rho,\theta,v)=-v_a\left\{\rho\left(\epsilon(\rho,\theta)+\frac{mv^2}{2}\right)+\mathcal{P}(\rho,\theta)\right\}.$$

Таким образом, из /2.12/ в рассматриваемом приближении найдем:

$$\frac{\partial(\tilde\rho\tilde\epsilon)}{\partial t}=-\sum_a\frac{\partial}{\partial\xi_a}\tilde v_a\left\{\tilde\rho\left(\epsilon(\tilde\rho,\tilde\theta)+\frac{m\tilde v^2}{2}\right)+\mathcal{P}(\tilde\rho,\tilde\theta)\right\}-\frac1m\sum_a\tilde j_a\frac{\partial\tilde U}{\partial\xi_a}\,, \qquad (2.2$$

причем по определению локальной скорости и температуры имеем соотношения /2.6/.

Введем энтропию:

$$S(\rho,\theta)=-\frac{\partial F(\rho,\theta)}{\partial\theta}.$$

Тогда, комбинируя ранее полученные уравнения, нетрудно получить вместо /2.20/ уравнение для энтропии:

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} + \sum_a \tilde{v}_a \frac{\partial \tilde{s}}{\partial \xi_a} = 0 \; . \qquad /2.21/$$

Возвратимся теперь в полученных уравнениях /2.7/, /2.19/, /2.21/ к первоначальным переменным t, $\vec{r}$.

Как видно, для этого достаточно в этих уравнениях просто заменить τ, ξ на t, $\vec{r}$ и снять знак $\approx$ с входящих в них величин.

Мы приходим таким образом к обычной системе уравнений идеальной жидкости.

§ 3. Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости

Сверхтекучая жидкость характеризуется наличием $\langle \psi(t,r) \rangle = \phi(t,r) \neq 0$ даже при исчезающе малых источниках. Поэтому наряду с уравнениями для введенных нами ранее локальных величин необходимо также рассматривать отдельное уравнение для величины ϕ. Это уравнение получается осреднением уравнения для ψ и имеет вид:

$$i\frac{\partial \phi(t,r)}{\partial t} = -\lambda\,\phi(t,r) - \frac{\Delta}{2m}\,\phi(t,r) +$$

$$+ \int \phi(r-r')\langle \psi^{+}(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle d\vec{r}\,' + U(t,r)\phi(t,r) + \eta(t,r) \; .$$

В этом уравнении ϕ является комплексной величиной. Для нас будет удобнее пользоваться действительными величинами – фазой и модулем ϕ, т.е. мы положим $\phi = a\exp(i\chi)$. Уравнения для этих величин получаются непосредственной подстановкой в уравнение для ϕ:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \lambda + \frac{\Delta a}{2ma} - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial \chi}{\partial \vec{r}}\right) - U(t,r) + \frac{\zeta^{*}+\zeta}{2a} - \qquad /3.1/$$

$$- \frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)\{X_t(r,R) + X^{*}(r,R)\}\, d\vec{R} \; ,$$

где

$$X_t(r, r'-r) = \langle \psi^{+}(t,r')\psi(t,r')\psi(t,r)\rangle \phi^{*}(t,r) ,$$

$$\zeta(t,r) = \eta(t,r)\, e^{-i\chi(t,r)} \; ,$$

и уравнение для $a(t,r)$:

$$i\frac{\partial a^2}{\partial t} = -\frac{i}{m}\{a^2\Delta\chi + 2\sum_\beta \frac{\partial \chi}{\partial r_\beta}\frac{\partial a}{\partial r_\beta}\, a\} + \qquad /3.2/$$

$$+ \int \Phi(R)[X_t(r,R) - X_t^{*}(r,R)]\, d\vec{R} + a(\zeta - \zeta^{*}) \; .$$

В дальнейшем мы будем часто использовать сверхтекучую скорость $v_s^{(\alpha)} = \frac{1}{m}\frac{\partial \chi}{\partial r_\alpha}$, уравнение для которой согласно /3.1/ будет:

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\{\frac{\Delta a}{2ma_a} - \frac{m v_s^2}{2} - U - \frac{\zeta^{*}+\zeta}{2a} - \qquad /3.3/$$

$$- \frac{1}{2a^2}\int \Phi(R)[X_t(r,R) - X_t^{*}(r,R)]\, d\vec{R}\} ,$$

Рассмотрим, прежде всего, случай статистического равновесия сверхтекучей жидкости при $U=0$, $\eta = 0$.

В отличие от случая статистического равновесия нормальной жидкости, которое характеризовалось, кроме ρ, θ, лишь одной скоростью $\vec{v}$, здесь мы имеем, вообще говоря, состояния с двумя скоростями, например, со скоростью движения конденсата $\vec{v}_s$ и со скоростью "нормальной компоненты" $\vec{v}_n$.

Средние для такого состояния статистического равновесия условимся обозначать символом:

$$\langle \ldots \rangle_{v_s, v_n} \; .$$

При этом для сокращения обозначений мы не будем в индексах выписывать параметры ρ, θ. Средние указанного типа нам будет удобно выражать через средние:

$$\langle \ldots \rangle_{v_s', 0} \; ; \quad \vec{v}_s' = \vec{v}_s - \vec{v}_n \; ;$$

соответствующие состоянию $\vec{v}_n' = 0$. Для этого, очевидно, можем воспользоваться галилеевским преобразованием операторов

$$\psi \to \psi\exp(im\vec{v}_n\vec{r}) \; .$$

Начнем поэтому с рассмотрения состояния ρ, θ, v_s, у которого $v_n = 0$. Для него:

$$a = const = a(\rho,\theta,u) \; ; \quad F = F(\rho,\theta,u) \; ; \quad u = \frac{v_s^2}{2} \; .$$

Химический потенциал также имеет вид:

$$\frac{\partial (FN)}{\partial N} = F + \rho\frac{\partial F}{\partial \rho} = \Lambda(\rho,\theta,u) \; .$$

Введем, кроме того, поток:

$$j_a = \rho \frac{\partial F}{\partial v_*^{(a)}} = \rho \frac{\partial F}{\partial u} v_*^{(a)} ,$$

и положим

$$\rho \frac{\partial F}{\partial u} = \rho_* m ,$$

так что

$$j_a = m \rho_* v_*^{(a)} .$$

Очевидно, $\rho_* \le \rho$

Покажем, что j_a, введенное таким образом, совпадает с обычным определением. Для этого удобно перейти к системе координат, движущейся со скоростью $\vec{v}_*$, причем одновременно при вычислении средних будем рассматривать усреднение только по состояниям с $\vec{v}_* = 0$, $\vec{v}_n = -\vec{v}_*$.

В результате средние не меняются. Гамильтониан в новой системе координат как функция новых операторов ψ имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m} \int \sum_a \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} - i m v_*^{(a)} \psi^+ \right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + i m v_*^{(a)} \psi \right) d\vec{r} +$$

$$+ \int \Phi(r-r') \psi^+(r) \psi^+(r') \psi(r') \psi(r) d\vec{r}\, d\vec{r}' .$$

Вычислим в этом представлении $\rho \dfrac{\partial F}{\partial v_*^{(a)}}$:

$$\rho \frac{\partial F}{\partial v_*^{(a)}} = \frac{1}{V} < \frac{\partial H}{\partial v_*^{(a)}} >_{0,-v_*} =$$

$$= \frac{i}{2V} \int < \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} - i m v_*^{(a)} \psi^+ \right) \psi - \psi^+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + i m v_*^{(a)} \psi \right) >_{0,-v_*} d\vec{r} =$$

$$= \frac{i}{2V} \int < \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} \psi - \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_a} >_{v_*,0} d\vec{r} = \frac{i}{2} < \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} \psi - \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_a} >_{v_*,0} = j_a .$$

Мы получили выражение, совпадающее с обычным определением j_a. В состоянии термодинамического равновесия $X = X(r-r'/\rho,\theta,v_*)$. Из уравнения /3.1/ получим:

$$\frac{1}{2a^2} \int \Phi(R) \{ X(R|\rho,\theta,v_*) + X^*(R|\rho,\theta,v_*) \} dR = \Lambda(\rho,\theta,u) - \frac{m v_*^2}{2} .$$

Отсюда, приняв во внимание уравнение /3.2/, найдем

$$\frac{1}{a^2} \int \Phi(R) X(R|\rho,\theta,v_*) d\vec{R} = \frac{1}{a^2} \int \Phi(R) X^*(R|\rho,\theta,v_*) d\vec{R} = \qquad /3.4/$$

$$= \Lambda(\rho,\theta,u) - \frac{m v_*^2}{2} .$$

Займемся теперь вычислением тензора $T_{\alpha\beta}$ в состоянии равновесия $(v_*, 0)$. Из общих соображений о тензорном характере величин следует, что, поскольку единственным выделенным направлением является направление $\vec{v}_*$, величина $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_*) = -\frac{1}{2m} < \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta} \frac{\partial \psi}{\partial r_\alpha} >_{v_*,0} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\alpha} R_\beta \mathfrak{D}(R|\rho,\theta,v_*) d\vec{R}$$

имеет вид:

$$T_{\alpha\beta} = A(\rho,\theta,u) v_*^{(\alpha)} v_*^{(\beta)} + \delta_{\alpha\beta} B(\rho,\theta,u) ,$$

где A и B –скалярные величины. По доказанному ранее в § 2, величина T_{aa} равна производной

$$\frac{1}{V} \frac{\partial (NF)}{\partial L} \Big|_{L=1} ,$$

где зависимость F от L получается в результате растяжения a –ой оси "в L раз".

Поэтому

$$\rho \frac{\partial F}{\partial L} \Big|_{L=1} = T_{aa} = A (v_*^{(a)})^2 + B .$$

С другой стороны,

$$\rho \frac{\partial F}{\partial L} \Big|_{L=1} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \rho} - \rho \frac{\partial F}{\partial u} (v_*^{(a)})^2 = -\mathfrak{P}(\rho,\theta,u) - m\rho_* (v_*^{(a)})^2 .$$

Таким образом,

$$A = -m\rho_* , \quad B = -\mathfrak{P}(\rho,\theta,u) ,$$

и, окончательно,

$$T_{\alpha\beta} = -m\rho_* v_*^{(\alpha)} v_*^{(\beta)} - \delta_{\alpha\beta} \mathfrak{P}(\rho,\theta,u) .$$

Перейдем к рассмотрению состояния с двумя скоростями $\vec{v}_*$, $\vec{v}_n$. Заметим, прежде всего, что выражения

$$X(r-r'|\rho,\theta,v_*,v_n) = <\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)>_{v_*,v_n} <\psi^+(r)>_{v_*,v_n} ,$$

$$\mathfrak{D}(r-r'|\rho,\theta,v_*,v_n) = <\psi^+(r)\psi^+(r')\psi(r')\psi(r)>_{v_*,v_n} -$$

инварианты при галилеевских преобразованиях

$$\psi \to \psi \exp(i m \vec{v}\vec{r}) ,$$

и потому

$$X(r-r'|\rho,\theta,v_*,v_n) = X(r-r'|\rho,\theta,v_*-v_n) ,$$

$$\mathfrak{D}(r-r'|\rho,\theta,v_*,v_n) = \mathfrak{D}(r-r'|\rho,\theta,v_*-v_n) .$$

Возьмем, далее, выражение j_a. Имеем

$$i_a = \frac{i}{2} \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\psi - \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_a} \right\rangle_{v_s, v_n} =$$

$$= \frac{i}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} - imv_n^{(a)} \psi^+ \right)\psi - \psi^+ \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + imv_n^{(a)} \psi \right) \right\rangle_{v_s - v_n, 0} =$$

$$= mv_n^{(a)} \rho + m\rho_s (v_s^{(a)} - v_n^{(a)}) = m\rho_s v_s^{(a)} + m\rho_n v_n^{(a)} .$$

Мы ввели здесь плотность нормальной компоненты $\rho_n = \rho - \rho_s$. Подсчитаем теперь тензор напряжений

$$T_{a\beta}(\rho, \theta, v_s, v_n) = \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_a} R_\beta \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s, v_n)\, d\vec{R} -$$

$$- \frac{1}{2m} \left\langle \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} - imv_n^{(a)} \psi^+ \right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + imv_n^{(\beta)} \psi \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta} - imv_n^{(\beta)} \psi^+ \right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + imv_n^{(a)} \psi \right) \right\rangle_{v_s - v_n, 0} =$$

$$= - \frac{1}{2m} \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial \psi}{\partial r_a} \right\rangle_{v_s - v_n, 0} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_a} R_\beta \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} +$$

$$+ \frac{iv_n^{(a)}}{2} \left\langle \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\psi \right\rangle_{v_s - v_n, 0} - \frac{iv_n^{(\beta)}}{2} \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\psi - \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_a} \right\rangle_{v_s - v_n, 0} -$$

$$- m\rho v_n^{(a)} v_n^{(\beta)} = - \delta_{a\beta} \mathcal{P}(\rho, \theta, u) - m\rho_s v_s^{(a)} v_s^{(\beta)} -$$

$$- m\rho_n v_n^{(a)} v_n^{(\beta)} .$$

Здесь и в дальнейшем $u = \frac{(v_s - v_n)^2}{2}$.

Преобразуем выражение для средней энергии

$$\rho\epsilon(\rho, \theta, v_s, v_n) = \tfrac{1}{2} \int \Phi(R) \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s - v_n, 0)\, d\vec{R} -$$

$$- \frac{1}{4m} \left\langle \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - im\vec{v}_n \right)^2 \psi \right] \psi + \psi^+ \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + im\vec{v}_n \right)^2 \psi \right] \right\rangle_{v_s - v_n, 0} = \qquad /3.6/$$

$$= \rho E(\rho, \theta, u) + \frac{m\rho v_n^2}{2} + m\rho_s (\vec{v}_s - \vec{v}_n)\vec{v}_n .$$

Здесь, как и обычно, $E(\rho, \theta, u) = F - \theta \frac{\partial F}{\partial \theta}$.

Нам понадобится также вектор I_a , вычисленный для случая статистического равновесия при наличии $\vec{v}_s$ и $\vec{v}_n$.

Заметим, что

$$G^{(a)}(r' - r|\rho, \theta, v_s, v_n) =$$

$$= \frac{i}{4m} \left\langle \psi^+(t, r') \left\{ \psi^+(t, r) \frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r_a} - \frac{\partial \psi^+(t, r)}{\partial r_a} \psi(t, r) \right\} \psi(t, r') \right\rangle_{v_s, v_n} =$$

$$= \frac{i}{4m} \left\langle \psi^+(t, r') \left\{ \psi^+(t, r) \left(\frac{\partial \psi(t, r)}{\partial r_a} + imv_n^{(a)} \psi(t, r) \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial \psi^+(t, r)}{\partial r_a} - imv_n^{(a)} \psi^+(t, r) \right) \psi(t, r) \right\} \psi(t, r') \right\rangle_{v_s - v_n, 0} =$$

$$= G^{(a)}(r' - r|\rho, \theta, v_s - v_n) - \frac{v_n^{(a)}}{2} \mathfrak{D}(r' - r|\rho, \theta, v_s - v_n) .$$

Для самого вектора I_a будем иметь:

$$I_a(\rho, \theta, v_s, v_n) = - \frac{i}{4m^2} \left\langle (\Delta\psi^+) \frac{\partial \psi}{\partial r_a} - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} (\Delta\psi) \right\rangle_{v_s, v_n} +$$

$$+ \int \Phi(R) G^{(a)}(R|\rho, \theta, v_s, v_n)\, d\vec{R} - \sum_\beta \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\beta} R_\beta G^{(\beta)}(R|\rho, \theta, v_s, v_n)\, d\vec{R} =$$

$$= - \frac{i}{4m^2} \left\langle \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - im\vec{v}_n \right)^2 \psi^+ \right] \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + imv_n^{(a)} \psi \right) - \left(\frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} - im_n^{(a)} \psi^+ \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + im\vec{v}_n \right)^2 \psi \right] \right\rangle_{v_s - v_n, 0} +$$

$$+ \int \Phi(R) G^{(a)}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} -$$

$$- \frac{v_n^{(a)}}{2} \int \Phi(R) \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} - \sum_\beta \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\beta} R_a G^{(\beta)}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} +$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_\beta \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\beta} R_a v_n^{(\beta)} \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} =$$

$$= - \frac{i}{4m^2} \left\langle (\Delta\psi^+) \frac{\partial \psi}{\partial r_a} - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a} (\Delta\psi) \right\rangle_{v_s - v_n, 0} + \int \Phi(R) G^{(a)}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} -$$

$$- \sum_\beta \int \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\beta} R_a G^{(\beta)}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} +$$

$$+ \frac{1}{4m} v_n^{(a)} \left\langle (\Delta\psi^+)\psi + \psi^+ (\Delta\psi) \right\rangle_{v_s - v_n, 0} - \frac{1}{2m} \sum_\beta v_n^{(\beta)} \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\frac{\partial \psi}{\partial r_a} + \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} \right\rangle_{v_s - v_n, 0} +$$

$$+ \sum_\beta v_n^{(\beta)} \int \tfrac{1}{2} \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R_\beta} R_a \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} -$$

$$- \frac{v_n^{(a)}}{2} \int \Phi(R) \mathfrak{D}(R|\rho, \theta, v_s - v_n)\, d\vec{R} - \frac{mv_n^2}{2} \rho v_n^{(a)} -$$

$$- \frac{i}{2} v_n^{(a)} \sum_\beta v_n^{(\beta)} \left\langle \frac{\partial \psi^+}{\partial r_\beta}\psi - \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_\beta} \right\rangle_{v_s - v_n, 0} +$$

$$+ \frac{i}{4} v_n^2 \left\langle \psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial r_a} - \frac{\partial \psi^+}{\partial r_a}\psi \right\rangle_{v_s - v_n, 0} .$$

Пользуясь определением I_a , формулой /3.6/, /3,5/ и определением i_a , получим:

$$I_a(\rho,\theta,v_s,v_n) = I_a(\rho,\theta,v_s-v_n,0) - v_n^{(a)}\rho E(\rho,\theta,u) + \sum_\beta v_n^{(\beta)} T_{a\beta}(\rho,\theta,v_s-v_n,0) -$$

$$-\sum_\beta v_n^{(a)} v_n^{(\beta)} m\rho_s (v_s^{(\beta)} - v_n^{(\beta)}) - \frac{m v_n^2}{2}\rho_s (v_s^{(a)} - v_n^{(a)}) - \frac{m v_n^2}{2} v_n^{(a)}\rho =$$

$$= I_a(\rho,\theta,v_s-v_n,0) - v_n^{(a)}[\rho E + \frac{m v_n^2}{2}\rho + \mathcal{P} + m\rho_s \vec{v}_n(\vec{v}_s - \vec{v}_n) -$$

$$- m\rho_s (v_s^{(a)} - v_n^{(a)})(\vec{v}_s\vec{v}_n - \frac{v_n^2}{2}).$$

Мы положим:

$$I_a(\rho,\theta,v_s-v_n,0) = [-\Lambda(\rho,\theta,u)\rho_s + A(\rho,\theta,u)](v_s^{(a)} - v_n^{(a)}). \qquad /3.8/$$

Позже мы докажем, что $A \equiv 0$.

До сих пор мы считали, что $U = 0$. Те же выражения для j_a, X, $T_{a\beta}$, I_a мы получили бы и в случае $U = const$, поскольку все эти величины инвариантны по отношению к градиентному преобразованию

$$\psi \to e^{-iUt}\psi.$$

После предварительных преобразований различных величин для состояний статистического равновесия перейдем к вопросу о получении уравнений гидродинамики сверхтекучей жидкости, для чего воспользуемся с естественным обобщением, схемой, изложенной в § 2.

Введем параметр μ, характеризующий степень малости

$$\xi = \mu\vec{r}, \quad \tau = \mu t.$$

Положим

$$\rho(t,r) = \tilde{\rho}(\tau,\xi), \quad \vec{j}(t,r) = \tilde{\vec{j}}(\tau,\xi), \quad \epsilon(t,r) = \tilde{\epsilon}(\tau,\xi),$$

а также

$$U(t,r) = \tilde{U}(\tau,\xi),$$

$$\vec{v}_s(t,r) = i\,\frac{\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\langle\psi(t,r)\rangle}{m\langle\psi(t,r)\rangle} = \tilde{\vec{v}}_s(\tau,\xi),$$

$$a(t,r) = \sqrt{\langle\psi^+(t,r)\rangle\langle\psi(t,r)\rangle} = |\langle\psi(t,r)\rangle| = \tilde{a}(\tau,\xi) \neq 0.$$

Подчеркнем, что делая допущение о том, что $\vec{v}_s$ является медленно меняющейся функцией t, $\vec{r}$ /и связанное с этим допущение о том, что знаменатель в выражении v_s не обращается в нуль: $a \neq 0$ /, мы тем самым ограничиваемся рассмотрением безвихревого сверхтекучего течения

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}_s = 0.$$

Случай, когда $\langle\psi(t,r)\rangle$ может обращаться в нуль, был предметом исследования в работе С.В. Иорданского [2]. Заметим, что для получения выражений функций Грина нам понадобятся уравнения гидродинамики только в "акустическом случае", когда все вышеприведенные величины лишь бесконечно мало отличаются от своих равновесных значений.

Но в этом случае

$$\vec{v}_s = \delta\vec{v}_s = \frac{-i}{m\langle\psi\rangle_{v_s,v_n}}\langle\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}}\rangle, \quad a = a_0 + \delta a,$$

и потому всегда

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}_s = 0, \qquad a \neq 0.$$

Таким образом, для вычисления функции Грина указанное ограничение автоматически выполняется.

Заметим далее, что поскольку градиенты $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial\vec{r}}$ от ρ, v_s, ... являются величинами первого порядка малости по отношению к μ, мы должны считать в силу уравнений /1.1/ η, или что то же самое ζ, пропорциональным μ.

Положим поэтому

$$\zeta(t,r) = \mu\tilde{\zeta}(\tau,\xi).$$

Для сокращения обозначений условимся с этого момента более не выписывать верхний индекс ~ над функциями от τ, ξ, поскольку это не приведет нас к недоразумению.

Введем сейчас, исходя из выражений для $\rho(\tau,\xi)$, $\vec{j}(\tau,\xi)$, $\epsilon(\tau,\xi)$, $\vec{v}_s(\tau,\xi)$, величины $\theta(\tau,\xi)$, $v_n(\tau,\xi)$, которые вместе с $\rho(\tau,\xi)$, $\vec{v}_s(\tau,\xi)$ характеризуют "локальное квазиравновесное состояние".

Возьмем функции

$$\epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n); \quad \rho_s(\rho,\theta,u) = \frac{1}{m}\rho\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial u}; \quad u = \frac{(v_n - v_s)^2}{2};$$

$$\rho_n(\rho,\theta,u) = \rho - \rho_s(\rho,\theta;u),$$

выражающие ϵ, ρ_s, ρ для статистического равновесия, и определим функции

$$\theta(\tau,\xi), \quad \vec{v}_n(\tau,\xi) \qquad /3.9/$$

из соотношений

$$\epsilon(\tau,\xi) = \epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n),$$

$$\vec{i}(\tau,\xi) = \rho_s(\rho,\theta,\mu)\vec{v}_s + \rho_n(\rho,\theta,u)\vec{v}_n. \qquad /3.10/$$

Введя таким образом функции /3.9/, мы можем также ввести $\rho_s(\tau,\xi)$, $\rho_n(\tau,\xi)$, положив, по определению

$$\rho_s(\tau,\xi)=\rho_s(\rho,\theta,u)\,,\quad \rho_n(\tau,\xi)=\rho_n(\rho,\theta,u)\,.$$

Сформулируем теперь наше предположение о том, что для рассматриваемого неравновесного процесса локальное состояние лишь слабо отличается от локального квазиравновесного состояния.

Следуя схеме § 2, напишем:

$$a(\tau,\xi)=a(\rho,\theta,u)+\mu a^{(1)}(\tau,\xi)+\dots,$$

$$X_\tau(\xi,R)=X(R|\rho,\theta,v_s,v_n)+\mu X^{(1)}(\tau,\xi)+\dots= \qquad /3.11/$$

$$=X(R|\rho,\theta,v_s-v_n)+\mu X^{(1)}(\tau,\xi)+\dots,$$

$$T_{\alpha\beta}(\tau,\xi)=T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s,v_n)+\mu T^{(1)}_{\alpha\beta}(\tau,\xi)+\dots,$$

$$I_\alpha(\tau,\xi)=I_\alpha(\rho,\theta,v_s,v_n)+\mu I^{(1)}_\alpha(\tau,\xi)+\dots$$

и подставим эти разложения вместе с /3.10/ в уравнения /1.1/, /1.2/x/, /1.4/x/, /3.3/, преобразованные к переменным τ, ξ. Ограничиваясь приближением идеальной жидкости, будем пренебрегать поправочными членами порядка μ.

Возьмем, например, уравнение /3.3/. Имеем:

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\Big\{\mu^2\frac{\Delta_\xi a}{2ma}-\frac{mv_s^2}{2}-U-\mu\frac{\zeta^*+\zeta}{2a}-$$

$$-\frac{1}{2a^2}\int\Phi(R)[X_\tau(\xi,R)+X^*_\tau(\xi,R)]\,d\vec R\Big\},$$

и потому в рассматриваемом приближении

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\Big\{\frac{mv_s^2}{2}+U+\frac{1}{2a^2(\rho,\theta,u)}\int\Phi(R)[X(R|\rho,\theta,v_s-v_n)+$$

$$X^*(R|\rho,\theta,v_s-v_n)]\,d\vec R\Big\}.$$

Откуда с помощью /3.4/ получим окончательно:

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\Big\{\frac{mv_s^2}{2}-\frac{m}{2}(v_s-v_n)^2+\Lambda(\rho,\theta,u)+U\Big\}, \qquad /3.12/$$

$$u=\frac{(v_s-v_n)^2}{2}.$$

Таким же образом из /1.1/, /1.2/, /1.4/, /3.8/ найдем:

x/ Уравнения /1.2/, /1.4/ преобразуем к виду, аналогичному /2.10/, /2.12/.

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\sum_\alpha\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial\xi_\alpha}=ia(\zeta^*-\zeta)\,, \qquad /3.13/$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})=\sum_\beta\frac{\partial T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s,v_n)}{\partial\xi_\beta}+imv_s^{(\alpha)}(\zeta^*-\zeta)a-\rho\frac{\partial U}{\partial\xi_\alpha}\,, \qquad /3.14/$$

$$\frac{\partial\rho\epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n)}{\partial\tau}=\sum_\beta\frac{\partial I_\beta(\rho,\theta,v_s,v_n)}{\partial\xi_\beta}-\sum_\beta(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})\frac{\partial U}{\partial\xi_\beta}+ \qquad /3.15/$$

$$+ia(\zeta^*-\zeta)\Big\{\frac{m}{2}v_s^2+\Lambda(\rho,\theta,\mu)-\frac{(v_s-v_n)^2}{2}m\Big\}.$$

Подставляя в уравнения /3.14/, /3.15/ выражения /3.5/, /3.6/, /3.7/, /3.8/ для $T_{\alpha\beta}(\rho,\theta,v_s,v_n)$, $\epsilon(\rho,\theta,v_s,v_n)$, $I_\alpha(\rho,\theta,v_s,v_n)$ будем иметь:

$$m\Big\{\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial\tau}+\sum_\beta\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)})}{\partial\xi_\alpha}\Big\}=$$

$$=-\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\xi_\alpha}-\rho\frac{\partial U}{\partial\xi_\alpha}+imav_s^{(\alpha)}(\zeta^*-\zeta) \qquad /3.16/$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\rho E(\rho,\theta,u)+\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\vec v_s-\vec v_n)\vec v_n\Big]+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}\Big\{v_n^{(\beta)}\Big[\frac{\rho m v_n^2}{2}+\rho_s m\vec v_n(\vec v_s-\vec v_n)+\rho E+\mathcal{P}\Big]+$$

$$+(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})\rho_s\Big[\Lambda+m\Big(\vec v_s\vec v_n-\frac{v_n^2}{2}\Big)\Big]\Big\}+ \qquad /3.17/$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial U}{\partial\xi_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})-ia(\zeta^*-\zeta)\Big[\Lambda+m\Big(\vec v_s\vec v_n-\frac{v_n^2}{2}\Big)\Big]=$$

$$=-\sum_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\beta}(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})A\,.$$

Перейдем теперь в уравнениях /3.12/, /3.13/, /3.16/, /3.17/ от вспомогательных переменных τ, $\vec\xi$ к первоначальным переменным t, $\vec r$. Получим таким образом систему уравнений гидродинамики в виде:

$$m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Big\{m\Big(v_s v_n-\frac{v_n^2}{2}\Big)+\Lambda+U\Big\}=0\,,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_\beta\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})}{\partial r_\beta}-ia(\zeta^*-\zeta)=0\,,$$

$$m\left\{\frac{\partial(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})}{\partial t}+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)})\right\}+ \qquad /3.18/$$

$$+\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}+\rho\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}-ima(\zeta^*-\zeta)v_s^{(\alpha)}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho E+\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\vec v_s-\vec v_n)\vec v_n\}+$$

$$+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}\{v_n^\beta[\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\vec v_s-\vec v_n)\vec v_n+\rho E+\mathcal{P}]+$$

$$+(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})\rho_s[\Lambda+m(\vec v_s\vec v_n-\frac{v_n^2}{2})]\}+\sum_\beta(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})\frac{\partial U}{\partial r_\beta}-$$

$$-ia(\zeta^*-\zeta)[\Lambda+m(\vec v_s\vec v_n-\frac{v_n^2}{2})]=-\sum\frac{\partial}{\partial r_\beta}(v_s-v_n)A.$$

Напомним, что здесь

$$a=a(\rho,\theta,u),\ A=A(\rho,\theta,u),\ u=\frac{(v_s-v_n)^2}{2},\ \rho_s=\frac{1}{m}\rho\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial u},$$

$$\rho_n=\rho-\rho_s;\quad E=F(\rho,\theta,u)-\theta\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\theta};$$

$$\mathcal{P}=\rho^2\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\rho},\quad\Lambda=F(\rho,\theta,u)+\rho\frac{\partial F(\rho,\theta,u)}{\partial\rho},$$

$$\zeta(t,r)=\eta(t,r)e^{-i\chi(t,r)}=\eta e^{-im\Theta},$$

где $\Theta(t,r)$ – потенциал скоростей сверхтекучего движения

$$v_s^{(\alpha)}=\frac{\partial\Theta}{\partial r_\alpha}.$$

Упростим сейчас последнее из уравнений /3.18/, для чего введем энтропию

$$S=-\frac{\partial F}{\partial\theta}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho E+\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\rho_s(\vec v_n\vec v_s-\vec v_n^{\,2})]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}[\rho(F-\theta\frac{\partial F}{\partial\theta})-\frac{m\rho v_n^2}{2}+m\vec v_n(\rho_s\vec v_s+\rho_n\vec v_n)]=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}(F+\rho\frac{\partial F}{\partial\rho})-\theta\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta})+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial t}=$$

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{mv_n^2}{2}-(\rho_s+\rho_n)mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}mv_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}(\Lambda-\frac{mv_n^2}{2})-\theta\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta})+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{mv_n^2}{2}-(\rho_s+\rho_n)mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}mv_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}(\Lambda-\frac{mv_n^2}{2})-\theta\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta})+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial t}-$$

$$-(\rho_s+\rho_n)mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}+(\rho_s v_s^{(\alpha)}+\rho_n v_n^{(\alpha)})m\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t}-$$

$$-mv_n^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial r_\beta}[v_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})+\rho_s v_s^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})]-$$

$$-v_n^{(\alpha)}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}-(\rho_s+\rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}+imv_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}a(\zeta^*-\zeta)=$$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}(\Lambda-\frac{mv_n^2}{2})-\theta\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta})+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}-$$

$$-mv_n^{(\alpha)}v_n^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})-mv_n^{(\alpha)}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}-$$

$$-mv_n^{(\alpha)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial\rho_s v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}-m\rho_s v_n^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial r_\beta}-v_n^{(\alpha)}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}-$$

$$-(\rho_s+\rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}+iv_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}a(\zeta^*-\zeta)=-\theta\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta})-$$

$$-(\Lambda+\frac{mv_n^2}{2})[\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)})-ia(\zeta^*-\zeta)]+m\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}-$$

$$-m\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}-m\rho_s v_s^{(\beta)}v_n^{(\alpha)}\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}-$$

$$-mv_n^{(\alpha)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial\rho_s v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta}+ima(\zeta^*-\zeta)(v_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}-v_n^2)-$$

$$-v_n^{(\alpha)}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}-(\rho_s+\rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}.$$

Величина $\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\alpha}$ в последнем уравнении /3.18/ может быть так же преобразована:

$$\frac{\partial}{\partial r_\beta}(v_n^{(\beta)}\rho E)=\Lambda\frac{\partial\rho v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta}-\mathcal{P}\frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta}-\theta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)}\frac{\partial F}{\partial\theta})+$$

$$+m\rho_s v_n^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})}{\partial r_\beta}.$$

Перепишем теперь левую часть последнего уравнения /3.8/, сразу группируя однотипные члены

$$-\theta\frac{\partial}{\partial t}(\rho\frac{\partial F}{\partial\theta})-\theta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)}\frac{\partial F}{\partial\theta})+$$

$$+\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})[m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r_\alpha}(\Lambda+m(\vec v_s\vec v_n-\frac{v_n^2}{2})+U]$$

$$-[\rho_s(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}+(\rho_s+\rho_n)v_n^{(\alpha)}\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}-(\rho_s v_s+\rho_n^{(\alpha)}v_n^{(\alpha)})\frac{\partial U}{\partial r_\alpha}]+$$

$$+\Lambda[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\rho_s(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})}{\partial r_\beta}-ia(\zeta^*-\zeta)]+$$

$$+ia(\zeta^*-\zeta)[\Lambda+m(v_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}-v_n^2)-\Lambda-m(v_s^{(\alpha)}v_n^{(\alpha)}-\frac{v_n^2}{2})+\frac{mv_n^2}{2}]-$$

$$-\frac{mv_n^2}{2}\frac{\partial}{\partial r_\beta}[\rho_s v_s^{(\beta)}+\rho_n v_n^{(\beta)}-2\rho_s v_s^{(\beta)}-\rho_n v_n^{(\beta)}-\rho_s v_n^{(\beta)}+2\rho_s v_n^{(\beta)}+\rho_s v_s^{(\beta)}-$$

$$-\rho_s v_n^{(\beta)}]-mv_n^{(\alpha)}v_s^{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial r_\beta}[\rho_s v_s^{(\beta)}-\rho_s v_n^{(\beta)}-\rho_s(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})]-$$

$$-m\frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}[\rho_n v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}+\rho_s v_n^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})-\rho_s v_n^{(\beta)}v_n^{(\alpha)}-\rho_n v_n^{(\beta)}v_n^{(\alpha)}-$$

$$-\rho_s v_n^{(\beta)}v_s^{(\alpha)}+2\rho_s v_n^{(\beta)}v_n^{(\alpha)}]-m\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}[\rho_s v_n^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}-\rho_s v_n^{(\beta)}(v_s^{(\alpha)}-v_n^{(\alpha)})-$$

$$-\rho_s v_n^{(\alpha)}v_n^{(\beta)}]+\frac{\partial(\mathcal{P}v_n^{(\beta)})}{\partial r_\beta}-v_n^{(\beta)}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial r_\beta}-\mathcal{P}\frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta}=$$

$$=m\rho_s v_n^{(\alpha)}v_s^{(\beta)}(\frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial r_\beta}-\frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\alpha})+\theta[\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)}S)]=$$

$$=\theta[\frac{\partial(\rho,S)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)}S)$$

следующему уравнению для плотности энтропии

$$\theta[\frac{\partial(\rho S)}{\partial t}+\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho v_n^{(\beta)}S)]=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}[(v_s^{(\beta)}-v_n^{(\beta)})A(\rho,\theta,u)]. \qquad /3.19/$$

Пользуясь полученными уравнениями, покажем, что

$$A(\rho,\theta,u)\equiv 0. \qquad /3.20/$$

Для этого рассмотрим случай статистического равновесия, когда внешнего поля нет, а η является данной функцией $\vec r$:

$$U=0,\ \ \zeta=\zeta(r),\ \ \theta=const,\ \ \rho=\rho(r),\ \vec v_n=0,\ \ \vec v_s=\vec v_s(r).$$

Тогда из уравнения /3.19/ получим

$$\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}v_s^{(\beta)}A(\rho,\theta,\frac{v_s^2}{2})=0, \qquad /3.21/$$

а из уравнения неразрывности /3.18/ –

$$\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\rho_s v_s^{(\beta)})=ia(\zeta^*-\zeta). \qquad /3.22/$$

Кроме того, из /3.18/ имеем также

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\Lambda(\rho,\theta,\frac{v_s^2}{2})=0. \qquad /3.23/$$

Принимая во внимание, что

$$\vec v_s=\frac{\partial\Theta}{\partial\vec r},$$

мы сразу можем заметить, что неизвестных функций у нас две, а уравнений /3.21/, /3.22/, /3.23/ для их определения – больше. Именно этот факт и лежит в основе нашего утверждения о справедливости равенства /3.20/.

Возьмем сначала случай, когда η, $\vec v_s$ и отклонение ρ от постоянной являются бесконечно малыми.

Тогда, пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, будем иметь:

$$\sum_\beta\frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta}=\frac{ia}{\rho_s}(\zeta^*-\zeta);\qquad A(\rho,\theta,0)\sum_\beta\frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta}=0,$$

откуда и следует, что

$$A(\rho,\theta,0)=0.$$

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда

$$\vec v_s(r)=\vec w+\delta\vec v_s,\quad \rho=\rho+\delta\rho(r);\quad \vec w\neq 0,$$

где δv, $\delta\rho$ и ξ – бесконечно малые.

Тогда из /3.21/, /3.22/ найдем

$$A\sum_\beta\frac{\partial\delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta}+\sum_\beta w^{(\beta)}(\frac{\partial A}{\partial\rho}\frac{\partial\delta\rho}{\partial r}+\frac{\partial A}{\partial u}\sum_\gamma w^{(\gamma)}\frac{\partial\delta v_s^{(\gamma)}}{\partial r_\beta})=0, \qquad /3.24/$$

$$\rho_s\sum_\beta\frac{\partial\delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta}+\sum_\beta w^{(\beta)}(\frac{\partial\rho_s}{\partial\rho}\frac{\partial\delta\rho}{\partial r_\beta}+\frac{\partial\rho_s}{\partial u}\sum_\gamma w^{(\gamma)}\frac{\partial\delta v_s^{(\gamma)}}{\partial r_\beta})=$$

$$=ia(\zeta^*-\zeta).$$

Пусть

$$\zeta(r)=e^{i\vec k\vec r}\,\delta G;\qquad \delta G=const.$$

Тогда, очевидно, мы должны положить:

$$\delta\vec v_s=e^{i(\vec k\vec r)}\delta\vec v+e^{-i(\vec k\vec r)}\delta\vec v^*,$$

$$\delta\rho=e^{i(\vec k\vec r)}\delta\Gamma+e^{-i(\vec k\vec r)}\delta\Gamma^*,$$

где $\delta\vec v$, $\delta\Gamma$ – бесконечно малые постоянные.

Произвольный вектор $\vec k$ выберем так, чтобы

$$\vec k\vec w=0$$

При таком выборе $\vec k$ будем иметь:

$$\sum_\beta w^{(\beta)} \frac{\partial \delta\rho}{\partial r_\beta} = 0, \qquad \sum_\beta w^{(\beta)} \frac{\partial \delta v_s^{(\gamma)}}{\partial r_\beta} = 0,$$

и потому /3.24/ представится в виде:

$$A \sum_\beta \frac{\partial \delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = 0; \quad \rho_s \sum_\beta \frac{\partial \delta v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = ia(\zeta^* - \zeta),$$

откуда и следует справедливость сделанного утверждения /3.20/.

Мы можем теперь написать вместо последнего уравнения /3.18/:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \sum_\beta \frac{\partial(\rho v_n^{(\beta)} S)}{\partial r_\beta} = 0. \qquad /3.25/$$

Итак, система уравнений гидродинамики для сверхтекучей жидкости /в рассматриваемом приближении идеальной жидкости/ представится уравнениями /3.18/ /первые три/ и уравнениями /3.25/.

Подчеркнем, что в случае, когда

$$U = 0, \quad \eta = 0,$$

эту систему впервые получил Л.Д. Ландау /3/, исходя из феноменологических соображений.

§ 4. Уравнения в вариациях и функции Грина

Рассмотрим теперь с помощью полученных уравнений /3.18/, /3.25/ случай бесконечно малого отклонения от покоящегося состояния статистического равновесия.

Положим

$$\rho = \rho^0 + \delta\rho, \quad \vec{v}_s = \delta\vec{v}_s, \quad \vec{v}_n = \delta\vec{v}_n, \quad S = S^0 + \delta S, \quad U = \delta U, \quad \eta = \delta\eta.$$

Мы переходим, таким образом, от уравнений гидродинамики к линеаризованным "акустическим" уравнениям.

Так как в рассматриваемом случае с точностью до величин второго порядка малости

$$\eta = \zeta,$$

то упомянутые линеаризованные уравнения принимают вид /верхний индекс 0 у ρ и S опускаем/:

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_s \sum_\beta \frac{\partial v_s^{(\beta)}}{\partial r_\beta} + \rho_n \sum \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = i\sqrt{\rho_0}\,(\eta^* - \eta),$$

$$m\rho_s \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} + m\rho_n \frac{\partial v_n^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial \delta P}{\partial r_\alpha} - \rho \frac{\partial U}{\partial r_\alpha}, \qquad /4.1/$$

$$m \frac{\partial v_s^{(\alpha)}}{\partial t} = -\frac{\partial(\delta\Lambda + U)}{\partial r_\alpha},$$

$$\rho \frac{\partial \delta S}{\partial t} + S \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho S \sum_\beta \frac{\partial v_n^{(\beta)}}{\partial r_\beta} = 0,$$

где

$$\sqrt{\rho_0} = \langle\psi\rangle_{0,0} = \langle\psi^+\rangle_{0,0},$$

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}\delta\theta = -S\delta\theta + \frac{1}{\rho}\delta P.$$

Прежде чем переходить к рассмотрению системы /4.1/, выясним связь различных величин с функциями Грина. Член с источником в исходном гамильтониане можно рассматривать как вариацию гамильтониана /будем считать в дальнейшем $U = 0$/, т.е. $H = H_0 + \delta H$, где

$$\delta H = \int \{\psi(t,r)\eta^*(t,r) + \psi^+(t,r)\eta(t,r)\}\, d\vec{r}.$$

Положим

$$\eta(t,r) = e^{-i\omega t + \epsilon t + i\vec{k}\vec{r}}\,\eta_k + e^{i\omega t + \epsilon t - i\vec{k}\vec{r}}\,\eta_{-k},$$

$$\eta^*(t,r) = e^{-i\omega t + \epsilon t + i\vec{k}\vec{r}}\,\eta^*_{-k} + e^{i\omega t + \epsilon t - i\vec{k}\vec{r}}\,\eta^*_k, \qquad /4.2/$$

где $\epsilon > 0$, $\epsilon \to 0$. В этом случае мы имеем адиабатическое включение δH.

Рассмотрим вариацию

$$\delta\phi = \delta\langle\psi(t,r)\rangle = e^{-i\omega t + \epsilon t}\,\delta\mathfrak{U}(r) + e^{i\omega t + \epsilon t}\,\delta\mathfrak{B}(r),$$

$$\delta\phi^* = \delta\langle\psi^+(t,r)\rangle = e^{-i\omega t + \epsilon t}\,\delta\mathfrak{B}^*(r) + e^{i\omega t + \epsilon t}\,\delta\mathfrak{U}^*(r).$$

По известной теореме, о вариации средних при адиабатическом включении дополнительного малого члена в гамильтониане имеем, рассматривая только вклад в δH, пропорциональный $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ /см., например, /5/ /:

$$\delta\mathfrak{U}(r) = 2\pi \int e^{i\vec{k}\vec{r}'} \{\langle\langle\psi(r);\psi(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\,\eta^*_{-k} + \langle\langle\psi(r);\psi^+(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\,\eta_k\}\, d\vec{r}',$$

$$\delta\mathfrak{B}^*(r) = 2\pi \int e^{i\vec{k}\vec{r}'} \{\langle\langle\psi^+(r);\psi(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\,\eta^*_{-k} + \langle\langle\psi^+(r);\psi^+(r')\rangle\rangle_{\omega+i\epsilon}\,\eta_k\}\, d\vec{r}'.$$

$$\langle\langle \psi(r);\psi(r')\rangle\rangle_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a_q; a_{-q}\rangle\rangle_E\, e^{i\vec q(\vec r-\vec r')}\, d\vec q,$$

$$\langle\langle \psi^+(r);\psi(r')\rangle\rangle_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a^+_{-q}; a_{-q}\rangle\rangle_E\, e^{i\vec q(\vec r-\vec r')}\, d\vec q,$$

$$\langle\langle \psi^+(r);\psi^+(r')\rangle\rangle_E = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \langle\langle a^+_{-q}; a^+_{q}\rangle\rangle_E\, e^{i\vec q(\vec r-\vec r')}\, d\vec q. \qquad /4.2'/$$

Здесь $E = \omega + i\epsilon$, $\langle\langle a_q ; a_{-q}\rangle\rangle$ и т.д. обозначают Фурье-компоненты соответствующих запаздывающих функций Грина. Используя /4.2/ и /4.2'/, найдем

$$\delta\mathfrak{U}(r) = 2\pi\{\langle\langle a_k; a_{-k}\rangle\rangle_E\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_E\,\eta_k\}\, e^{i\vec k\vec r} = \delta\phi_k\, e^{i\vec k\vec r},$$

$$\delta\mathfrak{B}^*(r) = 2\pi\{\langle\langle a^+_{-k}; a_k\rangle\rangle_E\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k; a^+_k\rangle\rangle_E\,\eta_k\}\, e^{i\vec k\vec r} = \delta\phi^*_{-k}\, e^{i\vec k\vec r}.$$

С помощью введенных величин $\delta\phi_k$, $\partial\phi^*_k$ вариация $\partial\phi$ может быть записана в виде:

$$\delta\phi(t,r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\vec k\vec r}\,\delta\phi_k + e^{i\omega t-i\vec k\vec r+\epsilon t}\,\delta\phi_{-k},$$

$$\delta\phi^*(t,r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\vec k\vec r}\,\delta\phi^*_{-k} + e^{i\omega t+\epsilon t-i\vec k\vec r}\,\delta\phi^*_k.$$

Величина $\delta\phi(t,r)$ в уравнение /4.1/ непосредственно не входит, но она связана с $v_s(t,r)$. Используя определение v_s, легко получить выражение

$$v^{(\alpha)}_s(t,r) = \frac{i}{2m\sqrt{\rho_0}}\left(\frac{\partial\delta\phi^*(t,r)}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial\delta\phi(t,r)}{\partial r_\alpha}\right).$$

Введем Фурье-компоненты $v^{(\alpha)}_s(\pm k)$:

$$v^{(\alpha)}_s(t,r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\vec k\vec r}\,v^{(\alpha)}_s(k) + e^{i\omega t+\epsilon t-i\vec k\vec r}\,v^{(\alpha)}_s(-k),$$

для которых будем иметь, согласно выражению для $v^{(\alpha)}_s$ и определениям $\delta\phi_k$:

$$v^{(\alpha)}_s(k) = \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}}\,k^{(\alpha)}\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_k\rangle\rangle_E\,\eta_k\}. \qquad /4.3/$$

Кроме того, согласно определению,

$$a^2(t,r) = \phi^*(t,r)\,\phi(t,r),$$

откуда

$$\delta a = ½[\delta\phi^*(t,r) + \delta\phi(t,r)] = \frac{\partial a}{\partial\rho}\delta\rho + \frac{\partial a}{\partial\theta}\delta\theta.$$

Снова переходя к Фурье-компонентам и используя определение $\delta\phi_k$, получим:

$$\delta a(t,r) = e^{-i\omega t+\epsilon t+i\vec k\vec r}\,\delta a_k + e^{i\omega t+\epsilon t-i\vec k\vec r}\,\delta a_{-k},$$

$$\delta a_k = \pi\{\langle\langle a_k + a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k + a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E\,\eta_k\}. \qquad /4.4/$$

Формулы /4.3/ и /4.4/ связывают гидродинамические величины, получаемые из уравнения /4.1/, с функциями Грина. Надо отметить, что так как уравнения гидродинамики справедливы лишь при "медленном" изменении гидродинамических величин, то такая связь носит асимптотический характер и верна только при $k \ll \frac{1}{l}$ и $E \ll \frac{1}{T}$, где l -длина свободного пробега, а T -время релаксации.

Для отыскания соответствующих решений и нахождения таким образом асимптотических выражений для функций Грина, нужно только, как это обычно делается в акустике, подставить выражения /4.2/ для η и η^* в /4.1/ и искать решения, пропорциональные η_k и η^*_{-k}. Уравнения /4.1/ могут быть переписаны в виде уравнений для Фурье-компонент /мы полагаем $\delta U = U = 0$):

$$-E\delta\rho(k) + \rho_s\sum_\beta k^{(\beta)}v^{(\beta)}_s(k) + \rho_n\sum_\beta k^{(\beta)}v^{(\beta)}_n(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k),$$

$$mE[\rho_s v^{(\alpha)}_s(k) + \rho_n v^{(\alpha)}_n(k)] = k^{(\alpha)}\left[\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\delta\rho(k) + \frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\delta\theta(k)\right], \qquad /4.5/$$

$$mE\,v^{(\alpha)}_s(k) = k^{(\alpha)}\left[-S\delta\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\delta\rho(k) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\delta\theta(k)\right],$$

$$E[\rho\,\delta S(k) + S\,\delta\rho(k)] = \rho S\sum_\beta k^{(\beta)}v^{(\beta)}_n(k),$$

$$\delta S(k) = \frac{\partial S}{\partial\theta}\delta\theta(k) + \frac{\partial S}{\partial\rho}\delta\rho(k).$$

Проанализируем сейчас некоторые предельные случаи. Рассмотрим сперва случай $E = 0$. Тогда из 2-го и 3-го уравнений /4.5/ следует, что $\delta\rho(k) = \delta\theta(k) = 0$, а из 4-го уравнения получим $\sum_\beta k^{(\beta)}v^{(\beta)}_n(k) = 0$. Согласно 1-му уравнению, будем иметь отсюда:

$$\rho_s\sum_\beta k^{(\beta)}v^{(\beta)}(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k),$$

или, используя /4.3/:

$$\frac{\pi\rho_s}{\rho_0 m}\,k^2\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_{E=0}\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_{E=0}\,\eta_k\} = \eta^*_{-k} - \eta_k.$$

Приравнивая коэффициенты при η^*_{-k}, η_k, получим:

$$\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0} = \frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2},$$

$$\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k \rangle\rangle_{E=0} = -\frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2}. \qquad /4.6/$$

Кроме того, имеем:

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial \rho}\,\delta\rho + \frac{\partial a}{\partial \theta}\,\delta\theta,$$

или, согласно /4.4/:

$$\langle\langle a_k + a^+_{-k}; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0}\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k + a^+_{-k}; a^+_k \rangle\rangle_{E=0}\,\eta_k = 0.$$

Откуда

$$\langle\langle a_k; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0} = -\langle\langle a^+_{-k}; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0},$$

$$\langle\langle a_k, a^+_k \rangle\rangle_{E=0} = -\langle\langle a^+_{-k}; a^+_k \rangle\rangle_{E=0}. \qquad /4.7/$$

Подставляя эти соотношения в /4.6/, получим:

$$\langle\langle a_k, a_{-k} \rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle a^+_{-k}; a_k \rangle\rangle_{E=0} = 2\langle\langle a_k; a_{-k} \rangle\rangle_{E=0} = \frac{m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2},$$

$$\langle\langle a_k, a^+_k \rangle\rangle_{E=0} - \langle\langle a^+_{-k}, a^+_k \rangle\rangle_{E=0} = 2\langle\langle a_k; a^+_k \rangle\rangle_{E=0} = \frac{-m\rho_0}{\pi\rho_s}\,\frac{1}{k^2}.$$

Таким образом, мы получили "теорему о $\frac{1}{k^2}$" /4/ для функций Грина с точным коэффициентом. Интересно отметить, что в коэффициент входит не только ρ_s, но и сама плотность частиц конденсата ρ_0.

Рассмотрим теперь случай $\theta = 0$. Необходимо отметить, что уравнения гидродинамики при $\theta = 0$ могут иметь только формальный смысл, так как времена релаксации становятся около $\theta = 0$ очень большими. Мы рассмотрим этот случай формально, чтобы посмотреть, что дают наши формулы в пределе при $\theta \to 0$.

При этом все выражения значительно упрощаются, так как

$$\rho_s = \rho, \quad \rho_n = 0, \quad S = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\delta\Lambda = \frac{1}{\rho}\,\delta\mathcal{P} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta=0}\delta\rho.$$

Согласно /4.5/, имеем:

$$-E\,\delta\rho(k) + \rho\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) = \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k),$$

$$E m\rho\, v_s^{(\alpha)}(k) = k^{(\alpha)}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta=0}\delta\rho(k),$$

или

$$\delta\rho(k) = \frac{E\rho}{k^2c^2}\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k); \quad C^2 = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_{\theta=0}.$$

Подставляя $\delta\rho(k)$ в первое уравнение, получим:

$$\sum k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) = \frac{k^2\sqrt{\rho_0}\,c^2}{\rho(E^2 - c^2k^2)}\,(\eta_k - \eta^*_{-k}) =$$

$$= \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}}\,k^2\left\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k} \rangle\rangle_E\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k \rangle\rangle_E\,\eta_k\right\}.$$

Так как $\delta\rho(k)$ содержит лишний малый множитель E /нас интересует асимптотика функций Грина при малых E и $\vec{k}$ /, то по-прежнему справедливы в низшем порядке равенства /4.7/, поэтому, приравнивая коэффициенты при η^*_{-k} и η_k получим:

$$\langle\langle a_k; a_{-k} \rangle\rangle_E \approx -\frac{\rho_0 c^2 m}{2\pi\rho\,(E^2 - c^2k^2)},$$

$$\langle\langle a_k; a^+_k \rangle\rangle_E \approx \frac{\rho_0 c^2 m}{2\pi\rho\,(E^2 - c^2k^2)}.$$

Рассмотрим теперь общий случай $(\theta \neq 0)$. Согласно второму и третьему уравнению /4.5/, имеем:

$$mE[\rho_s v_s^{(\alpha)}(k) + \rho_n v_n^{(\alpha)}(k) = k^{(\alpha)}\delta\mathcal{P}(k),$$

$$mE(\rho_s + \rho_n)\,v_s^{(\alpha)}(k) = -k^{(\alpha)}\rho S\,\delta\theta(k) + k^{(\alpha)}\delta\mathcal{P}(k).$$

Вычитая одно из другого, получим:

$$mE\rho_n\,[v_n^{(\alpha)}(k) - v_s^{(\alpha)}(k)] = \rho S k^{(\alpha)}\delta\theta(k). \qquad /4.8/$$

Первое уравнение /4.5/ может быть переписано в виде:

$$-E\delta\rho(k) + \rho\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \rho_n\sum_\beta k^{(\beta)}[v_n^{(\beta)}(k) - v_s^{(\beta)}(k)] =$$

$$= \sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k). \qquad /4.9/$$

Исключая с помощью этого уравнения $\delta\rho(k)$ из последнего уравнения /4.5/, получим:

$$E\rho\delta S(k) + S\rho_s\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + S\rho_n\sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k) -$$

$$- S\sqrt{\rho_0}\,(\eta^*_{-k} - \eta_k) = S(\rho_s + \rho_n)\sum_\beta k^{(\beta)} v_n^{(\beta)}(k).$$

Выражая $\delta S(k)$ через $\delta\theta(k)$ и $\delta\rho(k)$ и снова исключая $\delta\rho(k)$, получим:

$$E\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho \delta\theta(k) = \sqrt{\rho_0}(\eta^*_{-k} - \eta_k)\left(S + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right) -$$

$$-\rho^2\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta \sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \left(S\rho_s - \rho_n\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)\sum_\beta k^{(\beta)}[v_n^{(\beta)}(k) - v_s^{(\beta)}(k)],$$

или, используя /4.8/:

$$E\,\delta\theta(k) = -\frac{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)} + \frac{S\rho_s - \rho_n\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}\,\frac{\rho S k^2}{mE\rho_n}\,\delta\theta(k) +$$

$$+\sqrt{\rho_0}\,\frac{S + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}(\eta^*_{-k} - \eta_k).$$

Окончательно получим:

$$\delta\theta(k) = \frac{-\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta mE}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2 - \frac{S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}Sk^2\right]}\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \qquad /4.10/$$

$$+\frac{\sqrt{\rho_0}\left(S + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)mE}{\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2 - \frac{S\rho_s/\rho_n - \rho(\partial S/\partial\rho)_\theta}{(\partial S/\partial\theta)_\rho}Sk^2\right]}(\eta^*_{-k} - \eta_k).$$

Выразим так же и $\delta\rho(k)$ через $v_s(k)$. Из уравнения /4.9/ имеем:

$$\delta\rho(k) = \frac{\rho}{E}\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) + \frac{1}{mE^2}\rho S k^2 \delta\theta(k) - \frac{\sqrt{\rho_0}}{E}(\eta^*_{-k} - \eta_k).$$

Подставляя сюда /4.10/, находим:

$$\delta\rho(k) = \frac{\rho}{E}\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k) - \frac{\rho^2 k^2 S\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta mE\sum_\beta k^{(\beta)} v_s^{(\beta)}(k)}{mE^2\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2 - Sk^2\frac{S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho}\right]} + \qquad /4.11/$$

$$+\frac{\sqrt{\rho_0}}{E}\left\{\frac{Sk^2\left(S + \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\right)}{\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)_\rho\left[mE^2 - Sk^2\frac{S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta}{(\partial S/\partial\theta)_\rho}\right]} - 1\right\}(\eta^*_{-k} - \eta_k).$$

Подставляя выражения для $\delta\rho(k)$ и $\delta\theta(k)$ в уравнение для $v_s^{(\alpha)}(k)$, получим, умножая на $k^{(\alpha)}$ и суммируя:

$$mE\sum_a k^{(a)} v_s^{(a)}(k) = -Sk^2\delta\theta(k) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\delta\rho(k) + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho k^2\delta\theta(k) =$$

$$= \left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho - S\right)\frac{k^2\sqrt{\rho_0}\,(S+\rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta)\,mE}{\rho[mE^2(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho - Sk^2(S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta)]}(\eta^*_{-k} - \eta_k) +$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\left\{\frac{\rho}{E} - \frac{\rho^2 Sk^2(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta}{E[(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho mE^2 - Sk^2(S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta)]}\right\}\sum_a k^{(a)} v^{(a)}(k) +$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta k^2\frac{\sqrt{\rho_0}}{E}\left\{\frac{Sk^2(S+\rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta)}{mE^2(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho - Sk^2(S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta)} - 1\right\}(\eta^*_{-k} - \eta_k) -$$

$$-\left(\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho - S\right)k^2\frac{\rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta\,mE}{mE^2(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho - Sk^2(S\frac{\rho_s}{\rho_n} - \rho(\frac{\partial S}{\partial\rho})_\theta)}\sum_a k^{(a)} v_s^{(a)}(k).$$

Разрешая это уравнение относительно $\sum_a k^{(a)} v_s^{(a)}(k)$, получим:

$$\sum_a k^{(a)} v_s^{(a)}(k) = \frac{k^2\Delta(k,E)\sqrt{\rho_0}}{m\,\Omega(k,E)}(\eta^*_{-k} - \eta_k) =$$

/4.12/

$$= \frac{\pi}{m\sqrt{\rho_0}}\,k^2\{\langle\langle a_k - a^+_{-k}; a_{-k}\rangle\rangle_E\,\eta^*_{-k} + \langle\langle a_k - a^+_{-k}; a^+_k\rangle\rangle_E\,\eta_k\},$$

где

$$\Omega(k,E) = E^4 - \frac{1}{m}E^2k^2\left[S^2\frac{\rho_s}{\rho_n(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho} - \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho\left(\frac{\partial S}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{1}{(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho} + \left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\theta}\right)_\rho\right] +$$

/4.13/

$$+\frac{1}{m^2}k^4\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta S^2\frac{\rho_s}{\rho_n(\frac{\partial S}{\partial\theta})_\rho} = E^4 - E^2k^2\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s + \frac{S^2\rho_s\theta}{\rho_n m c_v}\right] +$$

$$+\frac{k^4}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{\rho_s\theta S^2}{m\rho_n c_v} = (E^2 - c_1^2k^2)(E^2 - c_0^2k^2),$$

причем,

$$c^2_{0,1} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s + \frac{1}{2}\frac{S^2\rho_s\theta}{m\rho_n c_v} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_s + \frac{S^2\rho_s\theta}{\rho_n mc_v}\right]^2 - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial\mathcal{P}}{\partial\rho}\right)_\theta\frac{\rho_s\theta S^2}{\rho_n m c_v}},$$

/4.14/

и

$$c_v = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_\rho .$$

Величина c_0 стремится к обычной скорости звука как при $\rho_s \to 0$, так и при $\theta \to 0$.

Величина c_1 является специфической для сверхтекучей жидкости скоростью "второго звука" и стремится к нулю при $\rho_s \to 0$.

Величина $\Delta(E,k)$ имеет вид:

$$\Delta(E,k) = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_\theta k^2 \frac{S^2\theta}{\rho_n c_v} - E^2\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}\right)_S - \left(\frac{\partial}{\partial \rho}\,\rho S^2\right)\frac{\theta}{\theta \rho c_v}\right].$$

Легко показать, так же как мы это делали для $\theta = 0$, что $\delta\rho(k)$ и $\delta\theta(k)$ содержит лишний малый множитель порядка k по сравнению с $v_s(k)$. Поэтому равенства /4.7/ в низшем порядке по-прежнему имеют место. Приравнивая коэффициенты при η_k и η^*_{-k} и пользуясь /4.7/, получим окончательно:

$$\langle\langle a_k ; a_{-k} \rangle\rangle_E \approx \frac{\Delta(E,k)\rho_0}{2\pi\Omega(k,E)}, \quad \langle\langle a_k ; a_k^+ \rangle\rangle_E = -\frac{\Delta(E,k)\rho_0}{2\pi\Omega(k,E)}. \qquad /4.15/$$

Ясно, что в предельных случаях $\theta = 0$ или $E = 0$ отсюда вытекают ранее полученные результаты.

Видим далее, на основании /3.13/, что функции Грина имеют полюса, соответствующие двум типам элементарных возбуждений –

$$E = c_0 k, \quad E = c_1 k .$$

В полученных формулах /4.15/ не учтены эффекты затухания, что обусловлено рассматривавшимся приближением идеальной жидкости.

Было бы интересно улучшить асимптотическую точность /4.15/, рассмотрев "приближение вязкости жидкости", для чего надо принять во внимание в уравнениях § 3 отброшенные там члены "порядка μ ".

Эта задача существенно упрощается тем обстоятельством, что для построения функций Грина нам нужны не полные уравнения гидродинамики, а лишь линеаризованные акустические уравнения.

Мы получили бы таким образом уточненные выражения для функций Грина, содержащие члены затухания, составленные из кинетических коэффициентов /вязкости, теплопроводности и т.п./.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность С.В. Иорданскому за его большой труд по подготовке этих лекций к печати.

Литература

1. К.П. Гуров. К квантовой гидродинамике. ЖЭТФ, **18**, 110 /1948/; ЖЭТФ, **20**, 279 /1950/.
2. С.В. Иорданский. О гидронамике вращающейся бозе-системы ниже точки конденсации. ДАН СССР /в печати/.
3. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, **11**, 592 /1941/; ЖЭТФ **14**, 112 /1944/.
4. Н.Н. Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1961.
5. Д.Н. Зубарев. Двухвременные функции Грина в статистической физике. УФН, XXI, в 1, 71 /1960/.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 августа 1963 г.