ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.А. Арбузов

Р-1392

О ВОЗМОЖНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЛЕПТОНОВ

Дубна 1963

Арбузов Б.А.

Р-1392

О возможности геометрической интерпретации слабых взаимодействий лептонов.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна.1963.

P - 1392

Arbuzov B.A.

On a Possible Geometric Interpretation of Weak Interactions of Leptons.

Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna. 1963.

Б.А. Арбузов

Р-1392

О ВОЗМОЖНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ЛЕПТОНОВ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1963

Аннотация

В работе рассматривается возможность интепретации слабых взаимодействий лептонов как эффекта искривления пространства-времени на расстояниях порядка $\ell \sim \sqrt{\frac{G}{\hbar c}} \sim 6.10^{-17}$. Предполагается, что лептоны описываются единым спинором пространства n измерений, поверхностью в котором является физическое четырехмерное пространство. Уравнения этой поверхности строятся самосогласованным образом с помощью значений спинора на ней и с учетом условия эвклидовости на бесконечности. Постулируется ковариантное уравнение с нулевой массой для значений спинора на поверхности, которое допускает возможность ввести электромагнитные взаимодействия и в первом приближении дает описание слабых взаимодействий. Обсуждаются условия, приводящие к $V-A$ варианту слабых взаимодействий.

Abstract

A possibility of interpreting weak interactions between leptons as an effect of the change in the space-time structure at distances of order of $\ell \approx \sqrt{\frac{G}{\hbar c}} \approx 6.10^{-17}$ is considered. The leptons are assumed to be described by the single spinor of n-dimensional space, the surface of this space being the physical four-dimensional space. The equations of this surface are constructed in a self-consistent manner by means of the values of the spinor on it and with account of the Euclidean condition at infinity. A covariant zero-mass equation is postulated for the values of the spinor on the surface. It allows to introduce the electro-magnetic interactions and describes weak interactions in the first approximation. Conditions are discussed which lead to the V–A variant of weak interactions.

1. Введение

В последнее время иногда высказывается мнение, что слабые взаимодействия элементарных частиц каким-то образом связаны с изменением структуры пространства-времени на малых расстояниях, а именно, на расстояниях порядка "фундаментальной длины" /1,2/.

$$\ell \approx \sqrt{\frac{G}{\hbar c}} \approx 6.10^{-17} \text{ см}, \qquad /1.1/$$

где G -константа слабого взаимодействия[x/]. Можно назвать некоторые свойства слабых взаимодействий, которые свидетельствуют в пользу этой гипотезы.

Слабые взаимодействия универсальны, т.е. в них участвуют с одинаковой по порядку величины интенсивностью все известные в настоящее время частицы, за исключением, может быть, фотона.

Слабые взаимодействия имеют простые и красивые свойства симметрии, которые было бы интересно связать со свойствами пространства.

Наконец, в слабых взаимодействиях имеется готовый эталон длины /1.1/, связанный с константой G, определяемой из опытов по распадам частиц.

Однако в настоящее время не существует ни одного примера, наглядно демонстрирующего, каким образом изменение структуры пространства на малых расстояниях может эффективно привести к слабым взаимодействиям. В этой работе мы обсудим модель, в которой при некоторых предположениях удается продемонстрировать связь слабых взаимодействий со структурой пространства. Основные физические требования, предъявляемые к модели, заключаются в следующем. Ограничившись рассмотрением только слабых взаимодействий, мы не будем включать в модель частицы, взаимодействующие сильно, а потребуем, чтобы модель описывала только четыре лептона-электрон, μ -мезон и два нейтрино. Так как среди этих частиц две заряжены и две - нейтральны, потребуем, чтобы модель допускала введение электромагнитного взаимодействия. Кроме того, модель должна давать эффективное четырехфермионное взаимодействие, которое можно сопоставить с взаимодействием, приводящим к распаду μ -мезона.

Перейдем к рассмотрению основных допущений, на которых строится модель. Предположим, что метрика пространства не является, вообще говоря, эвклидовой, а имеет общий вид:

---

x/ В дальнейшем всюду полагаем $\hbar = c = 1$.

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad , \qquad /1.2/$$

$$g_{ik} = g_{ki}\,.$$

Мы будем рассматривать одночастичную задачу, описываемую некоторой волновой функцией $\psi(x)$. В этом случае можно конкретизировать предыдущее допущение, предположив, что отклонение метрики от эвклидовой происходит вблизи некоторой четырехмерной точки x_0 на расстояниях $|x^k - x^k_0| \lesssim \ell$, и потребовав, чтобы для больших расстояний, т.е. для $|x^k - x^k_0| \gg \ell$, пространство становилось плоским. Наглядно можно представлять себе, что пространство искривляется только вблизи частицы, в то время как вдали от нее оно остается эвклидовым.

Для того, чтобы получить описание лептонов, нужно ввести в этом пространстве величины спинорной природы. В предлагаемой модели функции преобразования будут также зависеть от этих величин, и ввиду существенной нелинейности определение спиноров становится трудной задачей. Мы попробуем обойти эту трудность, рассматривая физическое четырехмерное пространство как некоторую поверхность V_4 в псевдоэвклидовом пространстве S_n большого числа измерений, определение спиноров в котором не представляет труда/3/.

Как известно /см., например/4//, любое четырехмерное риманово пространство можно рассматривать как поверхность в десятимерном эвклидовом пространстве. Для специальных видов V_4 достаточно меньшего числа измерений. Выпишем число r компонент спиноров в пространствах различной размерности n :

$$\begin{aligned} n &= 10 && - \quad r = 32\,; \\ n &= 9\,;\,8 && - \quad r = 16\,; \\ n &= 7;\,6 && - \quad r = 8\,; \\ n &= 5 && - \quad r = 4\,. \end{aligned} \qquad /1.3/$$

Рассмотрим область поверхности V_4, удаленную от точки x_0 ($|x^k - x^k_0| \gg \ell$), где V_4 переходит в плоскость S_4. Относительно вращений и отражений в этой плоскости спиноры многомерного пространства распадаются на соответствующее количество четырехкомпонентных спиноров, которые преобразуются лишь сами через себя. Возникает возможность описывать несколько частиц единым спинором многомерного пространства. В частности, четыре лептона можно объединить либо в один спинор пространств S_9 или S_8, либо в два различных спинора пространств S_7 или S_6. В области $|x^k - x^k_0| \lesssim \ell$, где пространство искривляется, эти четырехкомпонентные спиноры преобразуются уже друг через друга, что приводит к возможности появления взаимодействия между ними.

Мы предполагаем, что причиной изменения метрики пространства является сама частица, поэтому будем строить геометрические величины, характеризующие поверхность V_4 с помощью спиноров пространства S_n. Кроме того, в дальнейшем будет постулировано уравнение для значений спинора на поверхности V_4.

Суммируем теперь основные предположения модели.

1/ Физическое четырехмерное пространство рассматривается как некоторая поверхность с метрикой /1.2/ в многомерном псевдоэвклидовом пространстве.

2/ Геометрические величины, определяющие эту поверхность, строятся с помощью спиноров многомерного пространства, значения которых на поверхности удовлетворяют некоторому уравнению.

3/ Для больших расстояний, т.е. при $|x^k - x^k_0| \gg \ell$, поверхность должна переходить в плоскость.

2. Уравнения поверхности V_4.

В этом разделе приведены некоторые формулы из теории поверхностей в n-мерном пространстве /см., например,/4//, которые будем использовать в дальнейшем.

Пусть z^a - координаты n-мерного псевдоэвклидового пространства S_n с метрикой

$$ds^2 = \sum_{a=0}^{n-1} c_a (dz^a)^2\,;$$

$$c_0 = -1; \qquad c_a = 1 \;(a = 1 \ldots n-1)\,, \qquad /2.1/$$

а $x^i (i = 0, 1, 2, 3)$ - координаты на поверхности V_4 с метрикой /1.2/. Тогда

$$\sum_a c_a \frac{\partial z^a}{\partial x^i} \frac{\partial z^a}{\partial x^j} = g_{ij}\,. \qquad /2.2/$$

Пусть $\eta^\beta_{\sigma|}$ - компоненты $n-4$ взаимно ортогональных единичных векторов, нормальных к V_4.

$$\sum_\beta c_\beta\, \eta^\beta_{\sigma|}\, \eta^\beta_{\mu|} = \delta_{\sigma\mu} \qquad (\sigma, \mu = 4 \ldots n-1) \qquad /2.3/$$

$$\sum_\beta c_\beta\, \eta^\beta_{\sigma|} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} = 0\,. \qquad /2.4/$$

Уравнения поверхности V_4 имеют следующий вид/4/:

$$\left(\frac{\partial z^a}{\partial x^i}\right)_{,j} = \sum_{\sigma=4}^{n-1} b_{\sigma|ij}\, \eta^a_{\sigma|}\,, \qquad /2.5/$$

$$\eta^a_{\sigma|,j} = -b_{\sigma|\ell j}\, g^{\ell m} \frac{\partial z^a}{\partial x^m} + \sum_{\tau=4}^{n-1} \nu_{\tau\sigma|j}\, \eta^a_{\tau|}\,. \qquad /2.6/$$

Здесь $b_{\sigma|ij}$ и $\nu_{\tau\sigma|i}$ являются величинами, определяющими геометрию поверхности с точностью до вращений и движений V_4 как целого в S_n. Символ $f_{|j}$ означает ковариантную производную f относительно тензора g_{ij}. Как видно из /2.5/ и /2.6/, $b_{\sigma|ij}$ есть симметричный тензор второго ранга в V_4, а $\nu_{\tau\sigma|i}$ – вектор в V_4. Условия интегрируемости уравнений /2.5/ и /2.6/ имеют вид[4]:

$$R_{ijk\ell} = \sum_{\sigma=4}^{n-1} (b_{\sigma|ik}\, b_{\sigma|j\ell} - b_{\sigma|i\ell}\, b_{\sigma|jk}); \qquad /2.7/$$

$$b_{\sigma|ij,k} - b_{\sigma|ik,j} = \sum_{\tau=4}^{n-1} (\nu_{\tau\sigma|k}\, b_{\tau|ij} - \nu_{\tau\sigma|j}\, b_{\tau|ik}); \qquad /2.8/$$

$$\nu_{\tau\sigma|j,k} - \nu_{\tau\sigma|k,j} + \sum_{\rho=4}^{n} (\nu_{\rho\tau|j}\, \nu_{\rho\sigma|k} - \nu_{\rho\tau|k}\, \nu_{\rho\sigma|j}) + g^{\ell m}(b_{\tau|\ell j}\, b_{\sigma|mk} - b_{\tau|\ell k}\, b_{\sigma|mj}) = 0. \qquad /2.9/$$

Здесь $R_{ijk\ell}$ – риманов тензор кривизны поверхности V_4. С помощью /2.7/ и /2.8/ нетрудно убедиться, что тождество Бьянки[4] накладывает на коэффициенты $\nu_{\tau\sigma|j}$ условие антисимметрии относительно индексов τ и σ:

$$\nu_{\tau\sigma|j} = -\nu_{\sigma\tau|j}. \qquad /2.10/$$

В дальнейшем будет удобнее пользоваться формулировкой уравнений поверхности /2.5/ и /2.6/ в ортогональном репере, введенном в пространстве V_4.

Выберем в пространстве V_4 ортогональный репер, состоящий из единичных векторов с компонентами $\lambda^i_{h|}$:

$$g_{ij}\, \lambda^i_{h|}\, \lambda^j_{k|} = \begin{cases} a_h, & h=k; \\ 0, & h\neq k; \end{cases} \qquad /2.11/$$

$$a_0 = -1; \qquad a_i = 1, \quad i = 1,2,3.$$

Координаты репера в S_n определяются следующим образом:

$$\frac{\partial z^a}{\partial x^i} = \sum_{h=0}^{3} a_h\, \eta^a_{h|}\, \lambda_{h|i}; \qquad \eta^a_{h|} = \frac{\partial z^a}{\partial x^i}\lambda^i_{h|}; \qquad /2.12/$$

$$\sum_{a=0}^{n-1} c_a\, \eta^a_{h|}\, \eta^a_{k|} = \begin{cases} a_h, & h=k; \\ 0, & h\neq k. \end{cases}$$

Вводя операцию дифференцирования вдоль направлений векторов репера

$$\frac{\partial f}{\partial s^k} = \lambda^i_{k|}\frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad /2.13/$$

нетрудно преобразовать уравнения /2.5/ и/2.6/ к виду:

$$\frac{\partial \eta^a_{\beta|}}{\partial s^k} = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_\mu\, \omega_{\beta\mu k}\, \eta^a_{\mu|} \qquad \left(\begin{matrix} \beta = 0,1\ldots n-1; \\ k = 0,1,2,3; \end{matrix}\right), \qquad /2.14/$$

где

$$\omega_{mnk} = \gamma_{mnk} = \lambda_{m|i,j}\, \lambda^i_{n|}\, \lambda^j_{k|} \quad (k, m, n = 0, 1, 2, 3), \qquad /2.15/$$

$$\gamma_{mnk} = -\gamma_{nmk} \text{ —}$$

известные коэффициенты вращения, и

$$\omega_{ahk} = -\omega_{hak} = -\lambda^i_{h|}\, \lambda^j_{k|}\, b_{a|ij} \qquad /2.16/$$

$$\omega_{ahk} = \omega_{akh} \qquad \left(\begin{matrix} a = 4\ldots n-1 \\ n,k = 0,1,2,3 \end{matrix}\right);$$

$$\omega_{\alpha\beta k} = \lambda^i_{k|}\, \nu_{\alpha\beta|i} \qquad /2.17/$$

$$\omega_{\alpha\beta k} = -\omega_{\beta\alpha k} \qquad \left(\begin{matrix} \alpha,\beta = 4\ldots n-1 \\ k = 0,1,2,3 \end{matrix}\right).$$

Условия интегрируемости принимают следующую форму:

$$\frac{\partial\omega_{\mu\lambda h}}{\partial s^k} - \frac{\partial\omega_{\mu\lambda k}}{\partial s^h} = \sum_{\sigma=0}^{n-1} c_\sigma (\omega_{\sigma\mu h}\, \omega_{\sigma\lambda k} - \omega_{\sigma\mu k}\, \omega_{\sigma\lambda h}); \qquad /2.18/$$

$$\mu,\lambda = 0\ldots n-1.$$

Отметим, что при бесконечно малых смещениях ds_ℓ вдоль направлений репера реперные составляющие вектора получают приращения

$$\delta B_{h|} = -\sum_{k,\ell=0}^{3} a_k\, a_\ell\, \omega_{hk\ell}\, B_{k|}\, ds_\ell. \qquad /2.19/$$

В дальнейшем будем обозначать индексы коэффициентов $\omega_{\alpha\beta k}$ латинскими буквами, если они принимают значения 0, 1, 2, 3, и греческими – для значений $4 \ldots\ n-1$. В следующем разделе мы займемся построением этих коэффициентов в виде билинейных комбинаций спиноров пространства S_n.

3. Основные уравнения модели

Рассмотрим n-мерное псевдоэвклидово пространство S_n с метрикой /2.1/. Определим в S_n спиноры ψ и n матриц γ_a[3]. Количество компонент спинора, которое равно также порядку матриц γ_a дается /1.3/. Для γ_a справедливо соотношение антикоммутации

$$\gamma_a\gamma_\beta + \gamma_\beta\gamma_a = \begin{cases} 2c_a, & a=\beta; \\ 0, & a\neq\beta. \end{cases} \qquad /3.1/$$

Мы будем пользоваться представлением γ-матриц со следующими свойствами:

$$\gamma_0^+ = -\gamma_0; \quad \gamma_a^+ = \gamma_a \ (a = 1\ldots n-1).$$

Сопряженный спинор определяется как[3]:

$$\bar{\psi} = \psi^{+} \gamma_0 \, . \qquad /3.2/$$

Введем матрицы β_a, которые осуществляют эквивалентное /3.1/ представление:

$$\beta_a = \sum_\delta \eta^\delta_{a/} \gamma_\delta \qquad (a = 0,1 \dots n\text{-}1) \; ; \qquad /3.3/$$

$$\beta_a \beta_\gamma + \beta_\gamma \beta_a = \begin{cases} 2c_a & a = \gamma \\ 0 & a \neq \gamma \end{cases} .$$

С помощью матриц β_a мы будем строить коэффициенты ω. Рассмотрим сначала величину ω_{ank}, которая в силу /2.16/ и /2.7/ связана с тензором кривизны поверхности V_4. Наиболее естественно было бы записать ω_{ank} в виде:

$$\omega_{ank} = c \bar{\psi} \beta_a (\beta_n \beta_k + \beta_k \beta_n) \psi \, . \qquad /3.4/$$

Тензор кривизны в этом случае принимает простую форму:

$$R_{ijk\ell} = C(x) (g_{ik} g_{j\ell} - g_{i\ell} g_{jk}) .$$

Тогда, по теореме Шура[4] $C(x) = const$, и пространство V_4 есть пространство постоянной кривизны. Этот результат противоречит условию, согласно которому поверхность V_4 должна переходить в плоскость для $| x^k - x^k_0 | >> \ell$, если только кривизна V_4 не равна нулю всюду. Таким образом, представление /3.4/ не годится, и нужно найти какой-то другой вид для функции ω_{ank}. Введем матрицу $\tilde{\tilde{\gamma}}$, являющуюся обобщением обычной матрицы γ_5. В определении этой матрицы имеется произвол, и мы пока потребуем, чтобы для плоского пространства выполнялись условия:

$$\tilde{\tilde{\gamma}} \to -i \beta_0 \beta_1 \beta_2 \beta_3 ; \quad (\tilde{\tilde{\gamma}})^2 \to 1 ;$$

$$\tilde{\tilde{\gamma}} \beta_n + \beta_n \tilde{\tilde{\gamma}} = f_n \to 0 \quad (n = 0,1,2,3) ; \qquad /3.5/$$

$$\tilde{\tilde{\gamma}} \beta_a - \beta_a \tilde{\tilde{\gamma}} = \phi_a \to 0 \quad (a = 4 \dots n\text{-}1) .$$

В общем случае искривленного пространства f_n и ϕ_a не равны, вообще говоря, нулю. Считаем, что в общем случае выполняется соотношение

$$\gamma_0 \tilde{\tilde{\gamma}}^{+} \gamma_0 = \tilde{\tilde{\gamma}} \, . \qquad /3.6/$$

Некоторые другие свойства матрицы $\tilde{\tilde{\gamma}}$ будут постулированы в дальнейшем.

Использование матрицы $\tilde{\tilde{\gamma}}$ помогает непротиворечивым образом удовлетворить условию обращения тензора кривизны в нуль на бесконечности. Действительно, заменим в /3.4/ матрицы β_a на матрицы

$$a_a = \beta_a \pm \frac{\beta_a \tilde{\tilde{\gamma}} - \tilde{\tilde{\gamma}} \beta_a}{2} \, . \qquad /3.7/$$

Тогда для значений $| x^k - x^k_0 | >> \ell$, при которых поверхность V_4 должна переходить в плоскость, ω_{ank} и $R_{ijk\ell}$ исчезают вследствие /3.5/. Таким образом, употребление матриц a_δ оказывается более естественным, чем употребление β_δ.

Предположим, что все матрицы $\beta_a\ (a=0\dots n-1)$, встречающиеся в модели, должны быть заменены на матрицы /3.7/.

Теперь мы можем выписать выражения для коэффициентов вращения $\omega_{a\beta n}$, ω_{amn}, ω_{mnk}:

$$\omega_{nmk} = ic_1 \bar{\psi} (a_n a_k a_m - a_m a_k a_n) \psi ; \qquad /3.8/$$

$$\omega_{amn} = Cc_2 \bar{\psi} (a_n a_a a_m + a_m a_a a_n) \psi ;$$

$$\omega_{a\beta n} = ic_3 \bar{\psi} (a_a a_n a_\beta - a_\beta a_n a_a) \psi .$$

c_1, c_2, c_3 – действительные постоянные размерности ℓ^2. В /3.8/ мы учли действительность коэффициентов ω. Значения спиноров ψ взяты на поверхности V_4.

Рассмотрим вопрос об уравнении, которому должны удовлетворять значения спинора ψ на поверхности V_4. При определении операции ковариантного дифференцирования спинора воспользуемся методом Фока /5/. Учитывая, что величины $b_{\sigma 11j}$, $\nu_{\sigma\tau k}$, λ^1_{h1} должны быть соответственно тензором и векторами в пространстве V_4, мы потребуем, чтобы при бесконечно малых перемещениях ds_ℓ вдоль направлений векторов репера в V_4 величина $\bar{\psi}\beta_n\psi$ получала приращения, характерные для реперных коэффициентов вектора /2.19/, а величины $\bar{\psi}\beta_a\psi$, $\bar{\psi}\tilde{\gamma}\psi$ и $\bar{\psi}\psi$ оставались инвариантными. Таким образом, получаем следующие условия:

$$\delta \bar{\psi}\beta_n\psi = -\sum_{k,r=0}^{3} a_k a_r \omega_{nkr} \bar{\psi}\beta_k\psi\, ds_r ; \qquad /3.9/$$

$$\delta \bar{\psi}\beta_a\psi = 0 \quad (a = 4\dots n-1);$$

$$\delta \bar{\psi}\tilde{\gamma}\psi = \delta\bar{\psi}\psi = 0 .$$

Приращения составляющих спиноров имеют вид:

$$\delta\psi = \sum_{\ell=0}^{3} a_\ell C_\ell \psi\, ds_\ell . \qquad /3.10/$$

В /3.9/ нужно также знать приращения матриц β_n, β_a, $\tilde{\gamma}$. Так как представления $\beta_a\ (a=0\dots n-1)$ в любой точке x эквивалентны, мы потребуем, чтобы полные приращения этих матриц были равны нулю.

$$d\beta_a = \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial\beta_a}{\partial s^k} ds^k + \delta\beta_a = 0 ,$$

$$\delta\beta_a = -\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial\beta_a}{\partial s^k} ds^k . \qquad /3.11/$$

Приращение матрицы $\tilde{\tilde{\gamma}}$ определим следующим образом:

$$\delta\tilde{\tilde{\gamma}} = -\sum_{k=0}^{3} a_k (\tilde{\tilde{\gamma}} C_k + \gamma_0 C_k^+ \gamma_0 \tilde{\tilde{\gamma}})\, ds_k \;. \qquad /3.12/$$

Из /3.9/, /3.10/, /3.11/, /2.14/ получаются соотношения

$$\gamma_0 C_\ell^+ \gamma_0 \beta_n + \beta_n C_\ell - \sum_k a_k \omega_{nk\ell} \beta_k + \sum_a \omega_{an\ell} \beta_a = -\sum_k a_k \omega_{nk\ell} \beta_k \;, \qquad /3.13/$$

$$\gamma_0 C_\ell^+ \gamma_0 \beta_a + \beta_a C_\ell - \sum_k a_k \omega_{ak\ell} \beta_k - \sum_\beta \omega_{a\beta\ell} \beta_\beta = 0 \;,$$

$$\gamma_0 C_\ell^+ \gamma_0 + C_\ell = 0 \;.$$

Последние уравнения позволяют определить C_ℓ :

$$C_\ell = -\gamma_0 C_\ell^+ \gamma_0 = \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=4}^{n-1} \sum_{n=0}^{3} a_n \omega_{an\ell} \beta_a \beta_n + \tfrac{1}{4} \sum_{a,\beta=4}^{n-1} \omega_{a\beta\ell} \beta_a \beta_\beta + ieA_\ell \;, \qquad /3.14/$$

где A_ℓ – реперные составляющие произвольного действительного вектора, появление которого можно связать с возможностью ввести электромагнитное взаимодействие [5].

Итак, мы определили компоненты ковариантной производной спинора в ортогональном репере:

$$\psi_{,k} = \frac{\partial \psi}{\partial s^k} + C_k \psi \;, \qquad /3.15/$$

$$\bar{\psi}_{,k} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial s^k} - \bar{\psi} C_k \;.$$

По аналогии с уравнением Дирака без массы постулируем следующее уравнение для спинора ψ :

$$\sum_{k=0}^{3} a_k a_k \psi_{,k} = \sum_k a_k a_k \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial s^k} + C_k \psi \right\} = 0 \;. \qquad /3.16/$$

Это уравнение можно сформулировать и в произвольной системе координат.

В данной работе мы используем уравнение /3.16/ для исследования вопроса о возможности появления эффективного четырехфермионного взаимодействия, моделирующего слабые взаимодействия x/. Наличие четырехфермионного взаимодействия в /3.16/ очевидно. Для того, чтобы решить, может ли /3.16/ дать что-то похожее на реальные взаимодействия лептонов, например, на взаимодействие, обуславливающее распад μ - мезона, мы перейдем к квазиэвклидовому приближению, т.е. будем считать пространство плоским и удерживать в уравнении лишь члены низшего порядка по константам

x/ Вопрос о возможности интерпретации изменения уравнения Дирака в римановом пространстве с точки зрения появления эффективного взаимодействия рассматривался, например, в [6].

c_i . По построению коэффициенты ω_{nmk} , ω_{amn} исчезают при переходе к плоскому пространству, что связано с наличием в них нескольких множителей вида $1 \pm \tilde{\tilde{\gamma}}$, разделенных матрицами γ_n . Следовательно, в этом приближении получается уравнение

$$i \sum_{n=0}^{3} a_n \gamma_n (1 \pm \tilde{\tilde{\gamma}}) \frac{\partial \psi}{\partial x^n} + \qquad /3.17/$$

$$+ \frac{c_3}{4} \sum_{n=0}^{3} \sum_{a,\beta=4}^{n-1} a_n \gamma_a \gamma_\beta \gamma_n (1 \pm \tilde{\tilde{\gamma}}) \psi\, \bar{\psi} (\gamma_a \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_a) \gamma_n (1 \pm \tilde{\tilde{\gamma}})\, \psi = 0 \,.$$

В уравнение /3.17/ все спиноры, на которые распадается при ψ $|x^k - x^k_{a\ldots}| \gg \ell$, входят лишь двумя компонентами. Так как в модели масса отсутствует, это эквивалентно обычной теории.

4. Квазиэвклидово приближение

Рассмотрим, к какому взаимодействию приводит уравнение /3.17/ в квазиэвклидовом приближении. Выберем размерность пространства S_n , $n = 9$, так как это максимальная размерность пространства, спиноры которого распадаются на четыре четырехкомпонентных спинора. Матрицы γ_a определяются стандартным методом [3] /см. приложение/.

Очевидно, что уравнение /3.17/ получается из теории с лагранжианом взаимодействия x/:

$$L_{int} = \frac{c}{16} \sum_{a,\beta,n} a_n \bar{\psi} (\gamma_a \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_a) \gamma_n (1 + \tilde{\tilde{\gamma}}) \psi\, \bar{\psi} (\gamma_a \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_a) \gamma_n (1 + \tilde{\tilde{\gamma}}) \psi . \qquad /4.1/$$

Теперь посмотрим, как можно ввести электромагнитное взаимодействие в модели. Пользуясь неоднозначностью в /3.14/, можно получить или четыре заряженные частицы, или четыре нейтральные. Чтобы иметь возможность описывать две заряженные частицы и две нейтральные, нужно определить асимптотически диагональную матрицу, которая проектирует спинор ψ на два четырехкомпонентных спинора. Эти свойства имеет, например, матрица

$$E = \tfrac{1}{2} (I \pm i \beta_6 \beta_7) \;. \qquad /4.2/$$

С помощью матрицы E можно задать электромагнитное взаимодействие, если все коэффициенты $\omega_{a\beta n}$, у которых хотя бы один индекс равен 6 или 7, равны нулю. Тогда E коммутирует со всеми матрицами в модели, и, пользуясь неоднозначностью в /3.14/, можно ввести электромагнитное взаимодействие следующим образом:

$$C_k = C_k^w + ie\, E A_k \;; \qquad /4.3/$$

где C_k^w член, связанный с четырехфермионным взаимодействием.

x/ Здесь мы выбрали знак + в /3.7/.

Итак, будем суммировать в /4.1/ по индексам α, β = 4,5,8. Воспользовавшись явными выражениями для матриц γ_a /см. приложение/ и разлагая спинор ψ на четырехкомпонентные спиноры u_1, u_2, u_3, u_4, получим вместо /4.1/:

$$L_{int} = -c_3 \{ (\bar{u}_1 u_3 \bar{u}_4 u_2 + \bar{u}_2 u_4 \bar{u}_3 u_1) + \tfrac{1}{2} (\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_3 u_3 + \bar{u}_2 u_2 \bar{u}_4 u_4 + \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_2 u_2 + \bar{u}_3 u_3 \bar{u}_4 u_4 - \bar{u}_1 u_1 \bar{u}_4 u_4 - \bar{u}_2 u_2 \bar{u}_3 u_3) + \tfrac{1}{4} (\bar{u}_1 u_1 \bar{u}_1 u_1 + \bar{u}_2 u_2 \bar{u}_2 u_2 + \bar{u}_3 u_3 \bar{u}_3 u_3 + \bar{u}_4 u_4 \bar{u}_4 u_4) \}; \qquad /4.4/$$

где

$$\bar{u}_i u_j \bar{u}_k u_\ell = \sum_{n=0}^{3} a_n \bar{u}_i \gamma_n' (1+\gamma_5') u_j \bar{u}_k \gamma_n' (1+\gamma_5') u_\ell ;$$

γ_n', γ_5' – обычные матрицы четырехмерного пространства. В зависимости от знака в /4.3/ заряженным частицам соответствуют спиноры / u_1, u_2 / или / u_3, u_4 /. Первые два члена в /4.4/ соответствуют взаимодействию, описывающему распад μ – мезона в V –А варианте. Если не требовать возможности ввести электромагнитное взаимодействие и суммировать по всем значениям α и β в /4.1/, то такие "распадные" члены сокращаются. Продолжая далее аналогию модели с действительностью, можно сопоставить спиноры u_i лептонам, например, следующим образом:

u_1 – электрон,
u_2 – μ – мезон,
u_3 – электронное нейтрино,
u_4 – μ – мезонное нейтрино.

Подчеркнем, что в определении уравнения /3.16/ имеется произвол. В частности, можно было бы постулировать вместо /3.16/ уравнение

$$\sum_{k=0}^{3} a_k \beta_k \psi_{,k} = 0 . \qquad /4.5/$$

Основные результаты, а именно, наличие четырехфермионного взаимодействия, в том числе и "распадного," несохранение четности и возможность электромагнитного взаимодействия в этом случае остаются. Однако V –А вариант не получается.

5. Заключение

В работе рассмотрена модель с неэвклидовой геометрией в малом, которая при некоторых дополнительных предположениях может дать описание слабых и электромагнитных взаимодействий лептонов. В модели отсутствует масса. Можно надеяться, что масса заряженных частиц получится самосогласованным образом за счет взаимодействия.

Укажем вопросы, которые будут рассматриваться при дальнейшем изучении модели. Во-первых, это вопрос о совместности системы уравнений, определяющей модель. Затем, это вопрос о наличии расходимостей в модели, который, по-видимому, будет связан также и с проблемой квантования спинорного поля ψ. Возможно, при этом

получатся дополнительные условия, фиксирующие явный вид матрицы $\tilde{\gamma}$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову, С.С.Герштейну, В.Г. Кадышевскому, А.А. Логунову, В.И. Огиевецкому, А.Н. Тавхелидзе, А.Т. Филиппову, О.А. Хрусталеву за многочисленные и плодотворные обсуждения.

Приложение

Приведем здесь явные выражения для матриц γ_a пространства девяти измерений. Пронумеруем компоненты спинора ψ, а также столбцы и строки матриц в следующем порядке /обозначения книги[3]/:

0, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 1234, 1, 2, 3, 4, 123, 124, 134, 234, Тогда

$$\gamma_0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{vmatrix} ; \quad \gamma_a = \begin{vmatrix} 0 & K_a \\ K_a & 0 \end{vmatrix}, \quad a = 1,2,3,4,5,6,7; \quad \gamma_8 = \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix}.$$

1 – единичная матрица 8×8;

$$K_1 = \begin{matrix} 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{matrix} \qquad K_2 = i \begin{matrix} 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \end{matrix} \qquad K_3 = \begin{matrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \end{matrix}$$

$$K_4 = i \begin{matrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{matrix} \qquad K_5 = \begin{matrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&-1 \\ 0&0&0&-1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0 \end{matrix} \qquad K_6 = i \begin{matrix} 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ -1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \end{matrix}$$

$$K_7 = \begin{matrix} 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{matrix}$$

При преобразованиях в плоскости S_4 спинор ψ распадается на спиноры u_i следующим образом:

u_1 = /0, 12, 1, 2/;
u_2 = /13, 23, 3, 123/;
u_3 = /14,24, 4, 124/;
u_4 = /34, 1234, 134, 234/.

Литература

1. И.С. Шапиро. УФН, 61, 313 /1957/.
2. В.Г. Кадышевский. ДАН СССР, 136, 70 /1961/; ЖЭТФ, 41, 1885 /1961/.
3. Э. Картан. Теория спиноров. ИЛ., 1947.
4. Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. ИЛ., 1948.
5. В.А. Фок. *Zeitschr. f. Physik*, 57, 261 /1929/. См. также А.П. Котельников, В.А. Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике. ГИТТЛ, М-Л., 1950.
6. *H.S. Green. Nucl. Phys., 7, 373 (1958).*

Рукопись поступила в издательский отдел
15 августа 1963 г.