

74  
ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

ДЯД

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН СССР им. В. А. СТЕКЛОВА

Отдел теоретической физики

P-139

Н. Н. Боголюбов

В. В. Толмачев

Д. В. Ширков

Новый метод в теории сверхпроводимости

Fortschr. der Phys., 1958, Bd 6, h. 11/12, p. 605-682.  
Кн. на русском языке. М., изд. АН СССР, 1958.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ АН СССР им. В.А. СТЕКЛОВА

Отдел теоретической физики

---

P-139

Н.Н.Боголюбов, В.В. Толмачев, Д.В. Ширков

НОВЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Январь  
1958г.

## А Н Н О Т А Ц И Я

Метод канонических преобразований, предложенный в свое время Н.Н.Боголюбовым для построения микроскопической теории сверхтекучести бозе-систем обобщается на ферми-системы. На этой основе излагается метод исследования проблемы сверхпроводимости.

Рассчитана энергия основного сверхпроводящего состояния гамильтониана Фрелиха, однофермионные и коллективные элементарные возбуждения, соответствующие этому состоянию. При этом выяснено, что окончательные формулы, полученные недавно Бардиным, Купером и Шриффером для основного состояния и однофермионных возбуждений в первом приближении являются правильными. Физическая картина явления оказалась более близкой к той, которую представляя себе Шафрот, Батлер и Блатт.

Произведен дальнейший анализ влияния кулоновского взаимодействия электронов в теорию сверхпроводимости.

Рассмотрена система ферми-частиц с четверным гамильтонианом взаимодействия и установлен критерий ее сверхтекучести.

# A New Method in the Theory of Superconductivity

## A b s t r a c t

The method of canonical transformations proposed by N.N. Bogoliubov ten years ago for the development of a microscopic theory of superfluidity for Bose-systems, is generalized here to Fermi-systems. On this basis a method of investigation of the problem of superconductivity is developed.

The energy of the superconductive ground state for the Fröhlich hamiltonian, one-fermion and collective elementary excitations corresponding to this state are obtained. At the same time it turns out, that the final formulae for the ground state and one-fermion excitations recently obtained by Bardeen, Cooper and Schrieffer are correct in the first approximation. The physical picture seems to be closer to that proposed by Schafroth, Butler and Blatt.

The effect of the Coulomb interaction between the electrons on the superconductivity is analyzed in detail.

A fermi-system with a four-line-vertex interaction hamiltonian is considered and a criterion for its superfluidity is established.

CONTENTS

§ 1. <u>Introduction (1-9)</u>	
1.1 An outline of the present status of the theory of superconductivity	1
1.2 Resumé of the microscopic theory of superfluidity	3
§ 2. <u>Superconductivity in the Fröhlich model (10-22)</u>	
2.1 The principle of compensation of the "dangerous" diagrams	10
2.2 The analysis of the compensation equations	17
2.3 The ground state and one-fermion excitations	20
§ 3. <u>The renormalized theory of superconductivity for the Fröhlich model (23-38)</u>	
3.1 The compensation and renormalization equations	24
3.2 Simplification of the obtained relations	28
3.3 The energy difference between the normal and superconductive states	33
3.4 The property of superconductivity	35
§ 4. <u>The spectrum of collective excitations of the superconductive state (39-64)</u>	
4.1 The method of approximate second quantization and its application to systems with Coulomb interaction	39

4.2	The collective excitations for the Fröhlich model	43
4.3	The solution of the secular equations. Longitudinal excitations.	48
4.4	The solution of the secular equations. Transversal excitations	58.
§ 5.	<u>The Coulomb interaction between the electrons</u> <u>(65-102)</u>	
5.1	Outline of the problem	65
5.2	The compensation and renormalization conditions	66
5.3	The "time-dependent" formulation	70
5.4	The final form of the compensation equation for the electron diagrams	74
5.5	The ground state energy and the energy of one-fermion excitations	80
5.6	Transformation of the kernel $Q(k, k^1)$	85
5.7	The determination of $\lambda, \mu$ and $\tilde{\omega}$	97
5.8	The connection with a model problem	98
§ 6.	<u>Qualitative description of the Coulomb interaction effects (103-117)</u>	
6.1	The approximate determination of renormalized $\tilde{\omega}$ and $\tilde{q}$ .	103
6.2	Discussion of the properties of $Q_c$ and $Q_{ph}$	108

6.3	General properties of the fundamental compensation equation	110
§ 7.	<u>Fermi-systems with weak interaction (118-141)</u>	
7.1	The formulation of the Bardeen-Cooper-Schrieffer theory	118
7.2	The compensation equations	122
7.3	The collective excitations. The influence of Coulomb interaction	134
§ 8.	<u>Conclusion (142-148)</u>	
8.1	The thermodynamics and electrostatics of the superconductive state	142
8.2	The qualitative picture of superconductivity	146
	<u>Appendix I. On a criterion for superfluidity</u> in the theory of nuclear matter (149-157)	
	<u>Appendix II. On a variational principle in</u> the many-body problem. (158-162)	
	List of references (163-164).	

SA RNDK...  
RM...  
201-50

## СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ .....	I-9
I.1. Очерк состояния теории сверхпроводимости .....	I
I.2. Резюме микроскопической теории сверхтекучести....	3
§ 2. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В МОДЕЛИ ФРЕЛИХА .....	10-22
2.1 Принцип компенсации "опасных" диаграмм .....	10
2.2 Анализ уравнения компенсации .....	17
2.3 Основное состояние и однофермионные возбуждения..	20
§ 3. РЕНОРМИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ В МОДЕЛИ ФРЕЛИХА .....	23-38
3.1 Уравнения компенсации и перенормировки .....	24
3.2 Упрощение выведенных соотношений .....	28
3.3 Разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний .....	33
3.4 Свойство сверхпроводимости .....	35
§ 4. СПЕКТР КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ .....	39-64
4.1 Метод приближенного вторичного квантования в применении к системе с кулоновским взаимодействием	39
4.2 Коллективные возбуждения в модели Фрелиха .....	43
4.3 Решение секулярных уравнений. Продольные возбуждения	48
4.4. Решение секулярных уравнений. Поперечные возбуждения	58
§ 5. УЧЕТ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ	65-102
5.1 Постановка задачи .....	65
5.2 Условия компенсации и перенормировки .....	66
5.3 Переход к "зависящей от времени" формулировке ....	70
5.4 Окончательная форма уравнения компенсации электрон- ных диаграмм .....	74
5.5. Энергия основного состояния и энергия однофермион- ного возбуждения .....	80



5.6	Преобразование ядра $Q(k, k')$ .....	85
5.7	Определение $\lambda$ , $\mu$ и $\tilde{\omega}$ .....	97
5.8	Связь с модельной задачей .....	98
§ 6.	КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТОВ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ .....	I03-I17
6.1	Приближенное определение ренормированных $\tilde{\omega}$ и $\tilde{g}$ .....	I03
6.2	Обсуждение свойств величин $Q_c$ и $Q_{ph}$ .....	I08
6.3	Общие свойства основного уравнения компенсации .....	I10
§ 7.	ФЕРМИ-СИСТЕМЫ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ .....	I18-I41
7.1	Формулировка теории Бардина-Купера-Шриффера ..	I18
7.2	Уравнения компенсации .....	I22
7.3	Коллективные возбуждения. Влияние кулоновского взаимодействия .....	I34
§ 8.	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	I42-I48
8.1	Термодинамика и электродинамика сверхпроводящего состояния .....	I42
8.2	Качественная картина явления сверхпроводимости .....	I46
ПРИЛОЖЕНИЕ I. К вопросу об условии сверхтекучести в теории ядерной материи .....		I49-I57
ПРИЛОЖЕНИЕ II. Об одном вариационном принципе в задаче многих тел .....		I58-I62
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....		I63-I64

## § I. В в е д е н и е

I. I. Очерк состояния теории сверхпроводимости. В течение длительного времени, несмотря на ряд успехов частного характера, всякие попытки построения микроскопической теории сверхпроводимости не приводили ни к каким результатам.

Существенный вклад в развитие теории был сделан в 1950 г. Фрелихом<sup>/1/</sup>, который первый высказал идею о том, что явление сверхпроводимости определяется главным образом взаимодействием электронов с фононами решетки, т.е. тем самым взаимодействием, которое в нормальных условиях обуславливает обычное сопротивление металла. На основе этой идеи, исходя из соображений размерности, Фрелиху удалось предсказать весьма важный изотопический эффект, открытый вскоре после этого экспериментально.

После открытия изотопического эффекта стало очевидным, что электрон-фононное взаимодействие должно явиться основой для построения микроскопической теории сверхпроводимости. Однако, ввиду исключительной математической сложности задачи первоначальные попытки корректного решения ее терпели неудачу<sup>/1,2/</sup>. Следует отметить тем не менее, что эти попытки сыграли важную роль в исследовании вопроса о применимости обычной теории возмущений в данной задаче.

Наиболее поучительной в этом отношении явилась одномерная модель, изученная Фрелихом<sup>/3/</sup>. Здесь проблему удалось раз-

решить точно. При этом оказалось, что результаты нельзя было получить с помощью теории возмущений, так как разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний имеет неаналитическую зависимость от константы связи  $\rho$  типа  $\exp(-\frac{1}{\rho})$ . Как теперь мы знаем в результате детального исследования, именно эта ситуация служила основной трудностью и в трехмерном случае.

Новую важную физическую идею ввели Шафрот, Батлер и Блатт<sup>(4)</sup>. Они выдвинули и подробно обсудили представление о существенной роли парных корреляций, в особенности между электронами, находящимися вблизи поверхности Ферми. Эти коррелированные пары представлялись им существенными в связи с явлением бозе-эйнштейновской конденсации таких образований. Появление конденсата они трактовали как возникновение сверхпроводящего состояния. Подчеркнем, что пара электронов, находящаяся в бозе-эйнштейновском конденсате, обладает нулевым полным импульсом. В концепции Шафрота, Батлера и Блатта основным фактором, обеспечивающим образование коррелированных пар, является Фрелиховское притяжение двух электронов в окрестности поверхности Ферми. Как мы увидим ниже, представления Шафрота, Батлера и Блатта совершенно правильны.

Дальнейшее продвижение в развитии теории, связанное с выходом за рамки теории возмущений, было достигнуто в самое недавнее время в работах Купера и Бардина, Купера и Шриффера<sup>(5)</sup>.

Эти авторы рассмотрели упрощенную схему, в которой взаимодействие электронов с фононами заменено притяжением между

электронами, действующим в окрестности сферы Ферми, и в гамильтониане оставлены только члены, соответствующие взаимодействию пар электронов с противоположными импульсами. Физически это соответствует учету только таких пар, которые образуют бозе-эйнштейновский конденсат.

Исходя из представления о том, что частицы с противоположными импульсами образуют связанные пары, указанные авторы выбирают волновую функцию основного состояния в виде произведения парных функций, содержащих параметры. Эти параметры определяются из вариационного принципа минимума энергии. Следует заметить, что метод Бардина, Купера и Шриффера оставляет без ответа целый ряд вопросов, таких, например, как обоснование законности используемой процедуры, исследование роли кулоновского взаимодействия и т.п., ввиду чего могут возникнуть сомнения в отношении убедительности полученных ими результатов.

Однако, как мы видим теперь, когда удалось вполне корректно решить задачу о взаимодействии электронов с фононами, окончательные формулы, полученные Бардином, Купером и Шриффером для расчета основного состояния и однофермионных возбуждений, в первом приближении являются правильными.

С другой стороны в их схеме нет ветви спектра, соответствующей коллективным возбуждениям и эффект кулоновских сил не учтен надлежащим образом. Полностью решить проблему как в первоначальной постановке Фрелиха, так и с дополнительными усложнениями, обусловленными, например, учетом кулоновского взаимодействия, удалось с помощью нового метода, разработанного Н.Н.Боголюбовым<sup>/6/</sup>.

Этот новый метод основывается на глубокой как физической, так и математической аналогии с явлением сверхтекучести и является прямым обобщением метода, развитого Н.Н.Боголюбовым<sup>/7/</sup> еще в 1947 году для построения микроскопической теории сверхтекучести.

В настоящей работе мы дадим систематическое изложение его в приложении в изучению основного состояния и элементарных возбуждений как однофермионных, так и коллективных.

1.2. Резюме микроскопической теории сверхтекучести. Начнем с краткого обзора основных принципов микроскопической теории сверхтекучести Бозе-систем.

Хорошо известно, что все частицы идеального Бозе-газа при

абсолютном нуле температуры обладают импульсами, точно равными нулю, или, как говорят, находятся в состоянии конденсата.

Однако, в случае отсутствия взаимодействия такой конденсат не образует связанного коллектива и потому не может обладать свойством сверхтекучести.

Действительно, пусть ему сообщено движение, так что все частицы газа станут обладать скоростью  $u$ . Тогда полная энергия системы будет

$$E = \frac{1}{2} N m u^2$$

где  $N$  - число частиц,  $m$  - масса.

Пусть одна из частиц вследствие какого-либо процесса соударения с частицами примеси или со стенкой сосуда изменила свою скорость  $u$  на меньшую  $u_1$ . Ясно, что в таком случае полная энергия

$$E = \frac{1}{2} (N-1) m u^2 + \frac{m u_1^2}{2}$$

уменьшится. Поэтому, энергетически выгодно отдельным частицам газа "выпадать из конденсата" и замедляться из-за процессов соударений, ввиду чего движение газа в целом также будет постепенно замедляться.

Таким образом идеальный Бозе-газ не может служить моделью для изучения свойства сверхтекучести. Совершенно иное положение возникает в случае неидеального Бозе-газа, между частицами которого имеется хотя бы сколь угодно слабое взаимодействие. В

представлении вторичного квантования гамильтониан слабо-неидеального Бозе-газа имеет вид

$$H = \sum_p \frac{p^2}{2m} a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2V} \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2}} v(p_1 - p'_1) a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger a_{p'_2} a_{p'_1} \quad (\text{I.1})$$

где  $p$  - импульс частицы;  $v(p)$  - фурье-образ энергии взаимодействия пары частиц, который далее будет считаться пропорциональным малому параметру;  $a_p^\dagger, a_p$  - бозевские операторы порождения и уничтожения частиц;  $V$  - объем системы.

Существенным фактором, обеспечивающим возможность решения задачи, является наличие конденсата в системе, т.е. нахождение подавляющей части молекул на низшем энергетическом уровне. В силу того, что конденсат содержит микроскопически большое число частиц  $N_0$ , можно пренебречь некоммутативностью операторов порождения и уничтожения частиц из вакуума  $a_0^\dagger, a_0$  и заменить их обычными числами. Тогда, вводя новые бозе-операторы:

$$b_p = a_0^\dagger N_0^{-\frac{1}{2}} a_p, \quad b_p^\dagger = a_p^\dagger N_0^{-\frac{1}{2}} a_0$$

можно преобразовать (I.1) к виду

$$H = H_0 + H_{int} \\ H_0 = \sum_p \frac{p^2}{2m} b_p^\dagger b_p \quad (\text{I.2})$$

$$H_{int} = \frac{N_0^2}{2V} v(0) + \frac{N_0}{2V} \sum_p v(p) (b_p^\dagger b_{-p}^\dagger + b_p b_{-p} + 2b_p^\dagger b_p) + H'$$

где  $H'$  - выражение, состоящее из форм третьего и четвертого порядка по отношению к амплитудам  $\xi_r, \xi_r^+$ .

Стандартная теория возмущений не применима к гамильтониану в этой форме. Действительно, матричные элементы, соответствующие виртуальному порождению частиц из вакуума, сопровождаются энергетическими знаменателями

$$\frac{p_1^2}{2m} + \dots + \frac{p_{2s}^2}{2m}$$

Такие знаменатели, вообще говоря, не опасны и при интегрировании по  $p_1, \dots, p_{2s}$  к расходимостям не приводят, кроме одного случая, когда имеет место виртуальное порождение двух частиц с импульсами  $\pm p$ . В этом случае в высших приближениях появляются энергетические знаменатели вида:

$$\left(\frac{p^2}{2m}\right)^n$$

ведущие к расходимостям. Физически это означает, что даже при сколь угодно малом  $\nu$  взаимодействие между частицами с противоположными импульсами будет весьма интенсивным, если только эти импульсы оказываются достаточно малыми.

В методе Н.Н.Боголюбова<sup>/7/</sup> данная трудность устраняется путем выделения из гамильтониана  $H$  квадратичной части (по отношению к  $\xi_k, \xi_k^+$ ) и диагонализации ее с помощью канонического преобразования:

$$\xi_k = u_k \xi_k + v_k \xi_{-k}^+ \quad (1.3)$$

в котором  $\xi_k, \xi_k^+$  - новые Бозе-амплитуды, а  $u_k, v_k$  - обычные



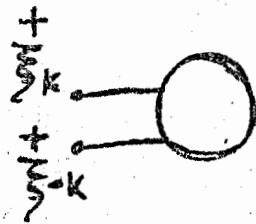
вещественные функции  $u_k$ , связанные соотношением

$$u_k^2 - v_k^2 = 1 \quad (\text{I.4})$$

Диагонализация перепутывает операторы рождения и уничтожения частиц и означает фактически выбор нового основного состояния, исправленного на взаимодействие. Отметим, что указанная процедура эквивалентна в низшем порядке по  $V$  следующему приему.

Подберем  $u_k$ ,  $v_k$  так, чтобы аннулировать суммарный вклад диаграмм типа фиг. I, соответствующих виртуальному рождению из вакуума пары частиц с противоположными

импульсами. Поскольку при данном выборе  $u_k, v_k$  такие процессы больше учитывать не следует, то отпадает то препятствие для применения обычной теории возмущений, о котором мы говорили выше.



фиг. 1

В упомянутой работе для спектра элементарных возбуждений слабо неидеального Бозе-газа было получено следующее выражение:

$$E(p) = \sqrt{\frac{N_0}{V} \frac{p^2}{m} v(p) + \frac{p^4}{4m^2}} \quad (\text{I.5})$$

или приближенно для малых и больших  $p$  :

$$E(p) = \sqrt{\frac{N_0}{V} v(0)} \left( \frac{p^2}{m} \right)^{1/2} \quad (\text{I.6})$$

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{N_0 v(p)}{V} \quad (\text{I.7})$$

Основное состояние  $C_0$  в первом приближении характеризуется нулевыми числами заполнения  $\bar{\xi}_p, \bar{\xi}_p$ . Из (I.6) убеждаемся, что для устойчивости  $C_0$  мы должны потребовать, чтобы

$$V(\rho) = \int \phi(\vec{r}) d\vec{r} > 0 \quad (I.8)$$

так как в противном случае  $E(\rho)$  оказалось бы комплексным. Условие (I.8) выражает доминирование сил отталкивания. Легко показать теперь, что рассмотренная модель обладает свойством сверхтекучести. Для этого заметим, что ввиду трансляционной инвариантности изучаемой динамической системы, имеется ковариантность по отношению к изменению начала отсчета импульсов и скоростей.

Возьмем новую систему отсчета

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - m\vec{u}$$

и построим для нее соответствующее состояние  $C_0$ , которое будем обозначать  $C_u$ . Ясно, что в старой, "покоящейся", системе отсчета состояние  $C_u$  будет таким состоянием, в котором частицы имеют среднюю скорость  $u$ . Нетрудно заметить, что энергия элементарного возбуждения для "движущегося" состояния  $C_u$  в обычной, покоящейся, системе отсчета будет

$$E(\rho) = (\vec{p}, \vec{u})$$

Пусть скорость  $u$  меньше некоторой критической скорости:

$$|\vec{u}| < u_p = \min_{(\rho)} \frac{E(\rho)}{|\rho|} \quad (I.9)$$

Для таких скоростей энергии элементарных возбуждений положительны

Поэтому замедление отдельных частиц путем выпадения их из коллектива или, что то же самое, порождение элементарных возбуждений энергетически не выгодно. Состояние  $C_u$  будет, следовательно, метастабильным при  $|u| < u_{кр}$ . Мы имеем теперь связанный коллектив, обладающий свойством сверхтекучести.

Из (I.9) можем опять убедиться, что в случае идеального газа, когда  $E(p) = \frac{p^2}{2m}$

$$\min_{(p)} \frac{E(p)}{|p|} = 0$$

и сверхтекучести не будет.

Укажем в заключение, что метод работы [7] получил в последнее время дальнейшее развитие в работах Брюкнера и Савада (8), в которых рассмотрена более реалистическая модель гелия II.

Перейдем теперь к изложению теории сверхпроводимости.

§ 2. СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ В МОДЕЛИ ФРЕЛИХА<sup>х)</sup>

2.1. Принцип компенсации опасных диаграмм. Мы будем исходить из модели, предложенной Фрелихом, в которой кулоновское взаимодействие явным образом не вводится, и динамическая система характеризуется гамильтонианом<sup>хх)</sup>

$$H_{Fz} = \sum_{k,s} E(k) \hat{a}_{ks}^{\dagger} a_{ks} + \sum_q \omega(q) \hat{b}_q^{\dagger} b_q + H_{int} \quad (2.1)$$

$$H_{int} = g \sum_{\substack{(k,k',q,s) \\ k-k'=q}} \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{ks}^{\dagger} a_{k's}^{\dagger} \hat{b}_q^{\dagger} + \text{с.о.п.} \quad (2.2)$$

где  $E(k)$  - энергия электрона,  $\omega(q)$  - энергия фонона,  $g$  - константа связи,  $V$  - объем системы,  $k, k', q$  - волновые векторы  $\hat{a}^{\dagger}, a$  и  $\hat{b}^{\dagger}, b$  - операторы порождения и уничтожения электронов и фононов соответственно,  $s$  - спиновый индекс, принимающий два значения  $+$  и  $-$ . Для краткости условимся называть далее гамильтониан (2.1) гамильтонианом Фрелиха. Установим теперь, что система с гамильтонианом (2.1) обладает свойством сверхпроводимости.

Как хорошо известно, обычная теория возмущений по степеням константы связи неприменима, так как электронно-фононное взаимодействие, несмотря на свою малость, оказывается весьма существен-

<sup>х)</sup> Изложение этого параграфа следует работе /6/.

<sup>хх)</sup> Здесь принята система единиц, в которой  $\hbar = 1$ .

ным вблизи поверхности Ферми. Более того, еще Фрелихом на примере одномерного случая отмечалось, что энергия не является аналитической функцией параметра связи и имеет особенности в окрестности нуля.

Совершим предварительно некоторое каноническое преобразование, исходя из соображений, аналогичных изложенным во введении при анализе положения в теории сверхтекучести.

Заметим, что матричные элементы, соответствующие виртуальному порождению "частиц" из вакуума всегда сопровождаются энергетическими знаменателями

$$\{ \epsilon(k_1) + \dots + \epsilon(k_{2s}) + \omega(q_1) + \dots + \omega(q_r) \}^{-1}$$

в которых  $\epsilon(k) = |E(k) - E_F|$  представляет энергию частицы, электрона ( $E(k) > E_F$ ) или дырки ( $E(k) < E_F$ ), становящаяся малой у поверхности Ферми.

Такие знаменатели вообще не являются "опасными" и при интеграции по импульсам к расходимостям не приводят кроме того случая, когда имеем дело с виртуальным процессом порождения одной пары без фононов. Тогда в силу законов сохранения частицы этой пары, будут иметь противоположно направленные импульсы  $\pm k$  и энергетический знаменатель  $\{2\epsilon(k)\}^{-1}$  становится уже опасным при интеграции. Заметим далее, что спины этой пары также будут противоположны.

Следует подчеркнуть, что в обычной теории возмущений, не-

посредственно примененной к нормальному состоянию, такие знаменатели не появляются из-за закона сохранения числа реальных электронов. Но, если перепутать электроны и дырки каноническим преобразованием, то закон сохранения уже не имеет места, и эти знаменатели возникают.

Обобщая преобразование (I.3), использованное в теории сверхтекучести, введем в рассматриваемом сейчас случае новые ферми-амплитуды  $\alpha$  <sup>\*)</sup>:

$$\begin{aligned} \alpha_{k_0} &= u_k a_{k,+} - v_k a_{-k,-}^\dagger \\ \alpha_{k_1} &= u_k a_{-k,-} + v_k a_{k,+}^\dagger \end{aligned} \tag{2.3}$$

или

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k \alpha_{k_0} + v_k \alpha_{k_1}^\dagger \\ a_{-k,-} &= u_k \alpha_{k_1} - v_k \alpha_{k_0}^\dagger \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $u_k, v_k$  - вещественные числа, связанные соотношением

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \tag{2.5}$$

и симметричные по отношению к преобразованию  $k \rightarrow -k$ .

Не трудно проверить, что такое преобразование сохраняет все перестановочные свойства ферми-операторов и потому является каноническим. Заметим еще, что оно представляет обобщение обычного преобразования, с помощью которого вводятся операторы рождения и уничтожения дырок внутри поверхности Ферми и электронов вне этой поверхности. Действительно, если положить:

$$u_k = 1, v_k = 0 \quad \text{для} \quad E(k) > E_F$$

\*) Как мы недавно узнали, Валатин (25), основываясь на работе [6], показал, что с помощью этого преобразования можно и саму теорию Зардина, Купера, Шриффера представить в более ясной и прозрачной форме.

$$u_k = 0, v_k = 1 \quad \text{для} \quad E(k) < E_F$$

то мы получим

$$a_{k0} = a_{k,+}, \quad a_{k1} = a_{-k,-} \quad \text{для} \quad E(k) > E_F$$

$$a_{k0} = -a_{-k,-}^\dagger, \quad a_{k1} = a_{k,+}^\dagger \quad \text{для} \quad E(k) < E_F$$

так что, например,  $a_{k0}$  вне сферы Ферми будет оператором уничтожения электрона с импульсом  $k$  и спином  $+1/2$ , а внутри — оператором уничтожения дырки с импульсом  $-k$  и спином  $-1/2$ . В общем случае, когда  $(u_k, v_k) \neq (0, 1)$ , мы имеем дело с суперпозицией дырки и электрона.

Чтобы не вводить дополнительного условия постоянства числа частиц

$$\sum_{k,s} a_{ks}^\dagger a_{ks} = N_0,$$

где  $N_0$  — полное число электронов, воспользуемся известным приемом статистической физики и введем параметр  $\lambda$ , играющий роль химического потенциала. Тогда вместо  $H_{Fz}$  будем иметь дело с гамильтонианом

$$H = H_{Fz} - \lambda N \quad (2.6)$$

Для определения  $\lambda$  воспользуемся условием

$$\bar{N} = N_0 \quad (2.7)$$

Преобразовав  $H$  к новым ферми-амплитудам, получим

$$H = U + H_0 + H_{int}$$

$$H_{int} = H_1 + H_2 + H_3$$

где  $U$  — постоянная.

$$U = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2$$

а также

$$H_1 = \sum_{\substack{(k, k', q) \\ (k' = k = q)}} g \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ u_k v_k \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger} + u_k v_k \alpha_{-k_0}^{\dagger} \alpha_{-k_1}^{\dagger} + \right. \\ \left. + u_{k'} v_{k'} \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} + u_{k'} v_{k'} \alpha_{-k_1} \alpha_{-k_0} \right\} b_q^{\dagger} + \text{с.п.р.}$$

$$H_2 = \sum_{\substack{(k, k', q) \\ (k' = k = q)}} g \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ u_k u_{k'} \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0}^{\dagger} + u_k u_{k'} \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{-k_1}^{\dagger} - \right. \\ \left. - v_k v_{k'} \alpha_{k_1} \alpha_{k_1} - v_k v_{k'} \alpha_{-k_0} \alpha_{k_0} \right\} b_q^{\dagger} + \text{с.п.р.}$$

$$H_3 = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) u_k v_k (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0})$$

$$H_0 = \sum_k (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0}^{\dagger} + \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger}) + \\ + \sum_q \omega(q) b_q^{\dagger} b_q$$

Введем числа заполнения

$$v_{k_0} = \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0}^{\dagger}, \quad v_{k_1} = \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger}$$

новых квази частиц, порождаемых операторами  $\alpha^{\dagger}$ . Тогда "вакуумом без взаимодействия", т.е. состоянием  $\psi_v$ , в котором

$$H_0 \psi_v = 0$$



$$u_k = 0, v_k = 1 \quad \text{для} \quad E(k) < E_F$$

то мы получим

$$a_{k0} = a_{k,+}, \quad a_{k1} = a_{k,-} \quad \text{для} \quad E(k) > E_F$$

$$a_{k0} = -a_{k,-}^{\dagger}, \quad a_{k1} = a_{k,+}^{\dagger} \quad \text{для} \quad E(k) < E_F$$

так что, например,  $a_{k0}$ , вне сферы Ферми будет оператором уничтожения электрона с импульсом  $k$  и спином  $+1/2$ , а внутри — оператором уничтожения дырки с импульсом  $-k$  и спином  $-1/2$ . В общем случае, когда  $(u_k, v_k) \neq (0, 1)$ , мы имеем дело с суперпозицией дырки и электрона.

Чтобы не вводить дополнительного условия постоянства числа частиц

$$\sum_{k,s} a_{ks}^{\dagger} a_{ks} = N_0,$$

где  $N_0$  — полное число электронов, воспользуемся известным приемом статистической физики и введем параметр  $\lambda$ , играющий роль химического потенциала. Тогда вместо  $H_{Fz}$  будем иметь дело с гамильтонианом

$$H = H_{Fz} - \lambda N \quad (2.6)$$

Для определения  $\lambda$  воспользуемся условием

$$\bar{N} = N_0 \quad (2.7)$$

Преобразовав  $H$  к новым ферми-амплитудам, получим

$$H = U + H_0 + H_{int}$$

$$H_{int} = H_1 + H_2 + H_3$$

где  $U$  — постоянная.

$$U = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2$$

а также

$$H_1 = \sum_{\substack{(k, k', q) \\ (k' - k = q)}} g \left( \frac{\omega(q)}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ u_k v_k \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger} + u_k v_{k'} \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{-k_1}^{\dagger} + \right. \\ \left. + u_k v_k \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} + u_{k'} v_{k'} \alpha_{-k_1} \alpha_{k_0} \right\} \beta_q + \text{с.п.р.}$$

$$H_2 = \sum_{\substack{(k, k', q) \\ (k' - k = q)}} g \left( \frac{\omega(q)}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ u_k u_{k'} \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0}^{\dagger} + u_k u_{k'} \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{-k_1}^{\dagger} - \right. \\ \left. - v_k v_{k'} \alpha_{k_1} \alpha_{k_1} - v_k v_{k'} \alpha_{-k_0} \alpha_{k_0} \right\} \beta_q + \text{с.п.р.}$$

$$H_3 = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) u_k v_k (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0})$$

$$H_0 = \sum_k (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0} + \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1}) + \\ + \sum_q \omega(q) \beta_q \beta_q$$

Введем числа заполнения

$$v_{k_0} = \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0}, \quad v_{k_1} = \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1}$$

новых квази частиц, порождаемых операторами  $\alpha^{\dagger}$ . Тогда "вакуумом без взаимодействия", т.е. состоянием  $C_v$ , в котором

$$H_0 C_v = 0$$

и где  $\tilde{\epsilon}(k)$  определяется по (2.8). Оставаясь в пределах принятого приближения, заменим в знаменателе правой части (2.9)

на

$$\tilde{\epsilon}(k) = (\tilde{E}(k) - \lambda)(v_k^2 - u_k^2)$$

Тогда, полагая

$$\tilde{E}(k) - \lambda = \xi(k)$$

запишем уравнение (2.9) в виде

$$\xi(k) u_k v_k = \frac{u_k^2 - v_k^2}{2(2\pi)^3} \int g^2 \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} u_{k'} v_{k'} dk' \quad (2.II)$$

2.2. Анализ уравнения компенсации. Уравнение (2.II) обладает, очевидно, тривиальным решением

$$u v = 0, \quad (u, v) = (0, 1)$$

соответствующим нормальному состоянию. Выберем эти  $u, v$  в виде

$$u_k = \theta_g(k) = \begin{cases} 1 & |k| > k_F \\ 0 & |k| < k_F \end{cases} \quad (2.I2)$$

$$v_k = \theta_F(k) = \begin{cases} 0 & |k| > k_F \\ 1 & |k| < k_F \end{cases}$$

Уравнение (2.II) обладает еще решением другого типа, переходящим в тривиальное при отдалении от поверхности Ферми. Этим двум решениям отвечает наличие двух состояний системы: нормаль-

ного и особенного. Последнее обладает более низкой энергией, чем нормальное и потому реализуется. В этом проявляется характерное отличие фермиевских систем от бозевских, где есть только одно основное состояние. В дальнейшем мы покажем, что особенное состояние обладает свойством сверхпроводимости и потому будем называть его сверхпроводящим.

Обозначая

$$C(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int g^2 \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} u_{k'} v_{k'} d\vec{k}' \quad (2.13)$$

и принимая во внимание (2.5), находим из (2.11)

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\tilde{\epsilon}(k)}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\epsilon}^2(k)}} \right\} \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\tilde{\epsilon}(k)}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\epsilon}^2(k)}} \right\} \quad (2.14)$$

Отсюда:

$$u_k v_k = \frac{1}{2} \frac{c(k)}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\epsilon}^2(k)}} \quad \tilde{\epsilon}(k) = \frac{\tilde{\epsilon}^2(k)}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\epsilon}^2(k)}} \quad (2.15)$$

Подставляя (2.15) в (2.13), получаем уравнение для определения  $C(k)$ :

$$C(k) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int g^2 \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \frac{C(k')}{\sqrt{c^2(k') + \tilde{\epsilon}^2(k')}} d\vec{k}' \quad (2.16)$$

Заметим, что это уравнение имеет своеобразную особенность: при  $g^2 \rightarrow 0$  решение  $C$  стремится к нулю как  $\exp(-A/g^2)$ , где  $A = \text{const} > 0$ , ввиду того, что интеграл в правой части

(2.16) становится логарифмическим расходящимся вблизи поверхности  $\xi(k) = 0$ , если положить  $C = 0$ . В такой ситуации нетрудно получить асимптотическую форму решения при малых  $g^2$ :

$$C(k) = \tilde{\omega} e^{-\frac{1}{g^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\omega \{k_0 \sqrt{2(1-t)}\}}{\omega \{k_0 \sqrt{2(1-t)}\} + |\xi(k)|} dt} \quad (2.17)$$

где

$$\rho = g^2 \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{k^2}{\frac{d\tilde{E}(k)}{dk}} \right)_{k=k_0} \quad \tilde{E}(k_0) = \lambda \quad (2.18)$$

и

$$\ln \tilde{\omega} = \int_0^{\infty} \ln \left( \frac{1}{2\xi} \right) \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\omega \{k_0 \sqrt{2(1-t)}\}}{\omega \{k_0 \sqrt{2(1-t)}\} + \xi} dt \right\} d\xi \quad (2.19)$$

и где величина  $\tilde{E}(k)$  определяется выражением (2.10). Учитывая дополнительное условие (2.7) и полученные выражения (2.14) и (2.17), можно заметить, что

$$k_0 = k_F$$

Поправки к выражению (2.10), происходящие от замены входящих в него  $u, v$  на их нормальные значения (2.12) будут экспоненциально малы. Поэтому в формулах (2.17), (2.18) мы можем без потери точности заменить  $\tilde{E}(k)$  на соответствующую форму для нормального состояния и интерпретировать фактор

$$\frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{k^2}{\frac{d\tilde{E}}{dk}} \right)_{k=k_F} = \frac{1}{V} \left\{ \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi k^2 dk}{dE} \right\}_{k=k_F}$$

как относительную плотность  $dn/dE$  числа электронных уровней в бесконечно узком слое вблизи поверхности Ферми. Тогда

$$\rho = g^2 \frac{dn}{dE} \quad (2.20)$$

2.3. Основное состояние и однофермионные возбуждения. Перейдем теперь к вычислению энергии основного состояния во втором приближении. Из всего  $H_{int}$  мы должны теперь <sup>учесть</sup> только  $H_1$ . Получим при этом для собственного значения  $H$  в основном состоянии

$$U = \langle \hat{C}_v^* H_1 H_0^{-1} H_1 C_v \rangle =$$

$$= 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 - \frac{1}{V} \sum_{(k, k', k \neq k')} g^2 \frac{\omega(k-k') \{u_k^2 v_{k'}^2 + u_k v_k u_{k'} v_{k'}\}}{\omega(k-k') + E(k) + E(k')}$$

Подставив сюда найденные для  $u, v$  выражения, вычисляем разность  $\Delta E$  между энергией нормального состояния и энергией сверхпроводящего состояния.

В результате получаем:

$$\frac{\Delta E}{V} = - \frac{dn}{dE} \frac{\xi^2}{2} \exp \left\{ - \frac{2}{\rho} \right\} \quad (2.21)$$

Построим в этом же приближении формулу для энергии элементарного возбуждения. Возьмем для этого возбужденного  $\xi$  состояние

$Q = \alpha_k C_v$  и применим к нему обычным образом теорию возмущений. Получим для энергии элементарного возбуждения с

импульсом  $k$  следующее выражение

$$E_e(k) = \varepsilon(k) - \langle G H_{int} (H_0 - \varepsilon(k))^{-1} H_{int} c_1 \rangle_{\text{св}}$$

раскрывая которое, найдем

$$E_e(k) = \tilde{\varepsilon}(k) \left\{ 1 - \frac{g^2}{V} \sum_{k'} \omega(k-k') \frac{u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2}{[\omega(k-k') + \varepsilon(k')]^2 - \varepsilon^2(k)} \right\} + \\ + \frac{g^2}{V} 2u_k v_k \sum_{k'} \frac{\omega(k-k') [\omega(k-k') + \varepsilon(k')]}{[\omega(k-k') + \varepsilon(k')]^2 - \varepsilon^2(k)} u_{k'} v_{k'}$$

Первый член, пропорциональный  $\tilde{\varepsilon}(k)$ , никакими особыми свойствами не обладает и обращается в нуль на поверхности Ферми.

Второй же член на поверхности Ферми равен

$$\frac{g^2}{V} 2u_k v_k \sum_{k'} \frac{\omega(k-k')}{\omega(k-k') + \varepsilon(k')} u_{k'} v_{k'} = \\ = 2u_k v_k C(k) = C(\chi_F) = \tilde{\omega} e^{-\frac{1}{P}}$$

Таким образом, мы получим, что элементарные возбуждения являются фермиевскими и что они отделены от основного состояния щелью:

$$\Delta = \tilde{\omega} e^{-\frac{1}{P}} \quad (2.22)$$

Для нормального состояния элементарные возбуждения щели не имеют.

Мы подчеркиваем здесь фермиевский тип возбуждений, поскольку в системе есть возбуждения и бозевского типа (см. § 4). В связи с формулами (2.21), (2.22) заметим, что первые качественные результаты принадлежат Фермиху<sup>13/</sup>. Для одномерной задачи он установил,

что разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний пропорциональна  $\exp(-\frac{2}{\rho})$  и что в энергетическом спектре электронов имеется щель порядка  $\exp(-\frac{1}{\rho})$ . Отсюда Фрелихом был сделан важный вывод о неаналитической зависимости решений от  $\rho$  в окрестности точки  $\rho = 0$ . Далее им было показано, что состояние со щелью является токовым (сравни с § 3). Однако, обобщение всех этих результатов на трехмерный случай ему не удалось провести ввиду значительных трудностей.

Интересно также отметить, что полученные Н.Н.Боголюбовым<sup>/6/</sup> результаты относительно разности энергий нормального и сверхпроводящего состояний совпадают с результатом теории Бардина, Купера и Шриффера<sup>/5/</sup>, если параметры  $\omega$  и  $V$  их теории выбрать следующим образом:

$$2\omega = \tilde{\omega}, \quad V = g^2$$

Заметим также, что в этой теории имеется выражение  $2\tilde{\omega} e^{-\frac{1}{\rho}}$ , интерпретируемое как энергия, необходимая для разрушения "пары".

Таким образом, в этом параграфе мы исследовали основное и возбужденное состояния гамильтониана модели Фрелика и установили вид зависимости энергий элементарных возбуждений. Легко видеть, что последние удовлетворяют критерию сверхтекучести, сформулированному во введении. В следующем параграфе мы покажем для более усовершенствованной теории, что из такого спектра элементарных возбуждений следует свойство сверхпроводимости (сверхтекучести фермиевской системы).



### § 3. РЕНОРМИРОВАННАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ В МОДЕЛИ ФРЕЛИХА<sup>\*)</sup>

В предыдущем параграфе были изложены основные принципы нового метода Н.Н.Боголюбова в теории сверхпроводимости. При этом рассматривалась модель Фрелиха и использовались разложения по степеням константы электронно-фононного взаимодействия. Фактически эти разложения шли по степеням безразмерного параметра (2.20):

$$\rho = g^2 \frac{dn}{dE}$$

Заметим, что в задаче имеется еще малый параметр — отношение энергии звукового кванта к энергии Ферми  $\omega/E_F$ . Параметр  $\rho$  не является весьма малым и принимает по оценке Пайнса<sup>/II/</sup> значения между 0,1 и 0,49, отношение же  $\omega/E_F$  действительно мало. Так как в гамильтониане электронно-фононного взаимодействия константа  $g$  входит вместе с множителем  $\sqrt{\omega}$  и так как естественной единицей энергии будет  $E_F$ , то казалось бы, что разложения должны происходить по степеням  $\rho\omega/E_F$ . Однако расчет следующего приближения показывает, что результаты первого приближения относительно изменяются на величины порядка  $\rho$ , а не  $\rho\omega/E_F$ .

Дело здесь в том, что при виртуальном разделении пары фононов без фермионов, энергетический знаменатель пропорционален  $\omega$ , в результате чего в формулах появляются  $\rho$  без сопровождающего

\*) Изложение этого параграфа следует работе

фактора  $\omega/E_F$ .

Таким образом, точность приближения может быть существенно повышена, если провести ренормировку энергии фононов или, что то же самое, применить методику компенсации ~~графов~~ <sup>диаграмм</sup> с тем, чтобы скомпенсировать вклад процессов виртуального рождения пары фононов. Тогда процессы виртуального рождения большого числа фононов, появляющиеся в высших приближениях, также не будут ухудшать сходимости, поскольку в соответствующие матричные элементы  $\rho\omega/E_F$  будет входить в достаточно высокой степени, и снятие одного множителя  $\omega/E_F$  энергетическим знаменателем уже не уничтожит всего малого множителя при  $\rho$ .

3.1. Уравнения компенсации и перенормировки. Будем исходить из выражения для гамильтониана (2.6):

$$H_{F_2} = \sum_{k,s} (E(k) - \lambda) a_{ks}^\dagger a_{ks} + \sum_q \omega(q) b_q^\dagger b_q + H_{int}$$

$$H_{int} = \sum_{\substack{(k, k', q, s) \\ (k' - k = q)}} g(q) \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} a_{ks}^\dagger a_{k's} b_q^\dagger + \text{с.п.р.}$$

в котором вместо постоянной  $g$  введена некоторая вещественная функция  $g(q)$ . Для упрощения выкладок сделаем обычное допущение о том, что функции  $E(k)$ ,  $\omega(q)$ ,  $g(q)$  инвариантны по отношению к отражению  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ . Свойства радиальной симметрии предполагать не будем.

В соответствии с намеченной программой совершим каноническое преобразование квантованных амплитуд фермионов (2.4) и бозонов

(1.3):

$$a_{k,+} = u_k \alpha_{k0} + v_k \alpha_{k1}^{\dagger}$$

$$a_{k,-} = u_k \alpha_{k1} - v_k \alpha_{k0}^{\dagger}$$

$$b_q = \lambda_q \beta_q + \mu_q \beta_{-q}^{\dagger}$$

(3.2)

где  $u_k, v_k, \lambda_q, \mu_q$  - вещественные числа, связанные соотношениями

$$u_k^2 + v_k^2 = 1, \quad \lambda_q^2 + \mu_q^2 = 1$$

(3.3)

и четные относительно замены  $k \rightarrow -k, q \rightarrow -q$

В преобразованном гамильтониане выделим часть

$$H_0 = \sum_k \tilde{E}(k) (\alpha_{k0}^{\dagger} \alpha_{k0} + \alpha_{k1}^{\dagger} \alpha_{k1}) + \sum_q \tilde{\omega}(q) \beta_q^{\dagger} \beta_q$$

в которой  $\tilde{E}(k), \tilde{\omega}(q)$  представляют "перенормированные" энергии фермионных и бозонных возбуждений, а остальные члены отнесем к

гамильтониану взаимодействия. Получим из (3.1)

$$H = H_0 + U + H' + H''$$

где

$$U = \text{const} = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2$$

$$I = \sum_{\substack{k, k', q \\ k' - k = q}} g(q) \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}) (\mu_q + \lambda_q) (\beta_q^{\dagger} + \beta_{-q}) +$$

$$\sum_{\substack{k, k', q \\ k - k' = q}} g(q) \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0}^{\dagger} + \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1}) (\mu_q + \lambda_q) (\beta_q^{\dagger} + \beta_{-q})$$

$$I'' = \sum_k \{ (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\epsilon}(k) \} \{ \alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_0} + \alpha_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1} \} +$$

$$+ 2 \sum_k (E(k) - \lambda) u_k v_k (\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger} + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}) +$$

$$+ \sum_q \{ \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) \} \beta_q \beta_q + \sum_q \omega(q) \lambda_q \mu_q (\beta_q^{\dagger} \beta_{-q}^{\dagger} + \beta_{-q} \beta_q)$$

Применим принцип компенсации "опасных" диаграмм, чтобы скомпенсировать процессы виртуального рождения из вакуума пары фермионов  $\alpha_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k_1}^{\dagger}$  и пары бозонов  $\beta_q^{\dagger} \beta_{-q}^{\dagger}$ . Получим во втором порядке следующие уравнения:

$$2(E(k) - \lambda) u_k v_k - \langle C_v^* \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} H' H_0^{-1} H' C_v \rangle = 0 \quad (3.4)$$

$$2\omega(q) \lambda_q \mu_q - \langle C_v^* \beta_{-q} \beta_q H' H_0^{-1} H' C_v \rangle = 0$$

где  $C_v$  - вакуумная волновая функция с нулевыми числами заполнения

Для определения ренормированных энергий  $\tilde{E}(k)$ ,  $\tilde{\omega}(k)$  имеем в принятом приближении

$$(E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) - \tilde{E}(k) - \langle C_k^\dagger \alpha_{k_0} H' (H_0 - \tilde{E}(k))^{-1} H' \alpha_{k_0}^\dagger C_k \rangle = 0 \quad (3.5)$$

$$\omega(q)(\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) - \langle C_q^\dagger \beta_q H' (H_0 - \tilde{\omega}(q))^{-1} H' \beta_q^\dagger C_q \rangle = 0$$

Подчеркнем, что в полученных уравнениях в выражениях матричных элементов учитываются только связанные диаграммы. В уравнении (3.5) ничего не изменилось бы, если мы поставим  $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$  вместо  $\alpha_{k_0}, \alpha_{k_0}^\dagger$ , ввиду симметрии по отношению к преобразованию (3)  $\hat{z}$  (4). Раскроем теперь уравнение (3.4) и (3.5). Получим

$$\begin{aligned} & \left\{ E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{E}(k) + \tilde{E}(k')} (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2 (u_k^2 - v_k^2) - \lambda \right\} u_k v_k = \\ & = \frac{u_k^2 - v_k^2}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{E}(k) + \tilde{E}(k')} (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2 u_{k'} v_{k'} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\lambda_q \mu_q - (\lambda_q + \mu_q)^2 \frac{g^2(q)}{2V} \sum_{\substack{(k, k') \\ (k' - k = q)}} \frac{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{E}(k) + \tilde{E}(k')} = 0$$

$$\tilde{E}(k) = \left\{ E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k') (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{E}(k) + \tilde{E}(k')} \right\} (u_k^2 - v_k^2) - \quad (3.7)$$

$$- \frac{1}{V} \sum_{k'} \tilde{E}(k') \frac{g^2(k-k') (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2 \omega(k-k')}{[\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{E}(k')]^2 - [\tilde{E}(k)]^2} (u_k^2 v_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2) + \quad (3.8)$$

$$+ 2 u_k v_k \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') (\lambda_{k-k'} + \mu_{k-k'})^2 \omega(k-k') [\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k')]}{[\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k')]^2 - [\tilde{\epsilon}(k)]^2} u_{k'} v_{k'} \quad (3.8)$$

$$\tilde{\omega}(q) = \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) -$$

$$- \frac{\omega(q) g^2(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \sum_{(k, k', k-k=q)} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2 \left\{ \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') - \tilde{\omega}(q)} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\omega}(q)} \right\} \quad (3.9)$$

3.2. Упрощение выведенных соотношений. Займемся сейчас некоторым упрощением этих соотношений. С одной стороны, они излишне сложны, с другой стороны, - и это самое главное - они еще содержат члены, по своей малости, превышающие принятую степень приближения.

Мы должны поэтому ограничиться в них членами не выше первого порядка по отношению к нашему малому параметру  $\rho \omega / \epsilon_F$ .

Начнем с уравнений (3.7) и (3.9). Решая их, найдем:

$$(\lambda_q + \mu_q)^2 = \left\{ 1 - \frac{2}{V} \sum_{(k, k', k-k=q)} g^2(q) \frac{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

$$\tilde{\omega}(q) = \omega(q) \left\{ 1 - \frac{g^2(q)}{2V} \sum_{(k, k', k-k=q)} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2 \left[ \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') - \tilde{\omega}(q)} + \frac{3}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\omega}(q)} \right] \right\}$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{2}{V} g^2(q) \sum_{(k, k', k-k=q)} \frac{(u_k v_{k'} + u_{k'} v_k)^2}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Заметим теперь, что  $u, v$  могут отличаться от своих нормальных значений 0,1 лишь в окрестности поверхности Ферми в энергетическом слое ширины  $< \omega$ . Кроме того ясно, что  $\tilde{\epsilon}(k) \sim |E(k) - E_F|$ .

Поэтому, оставляя в (3.10) лишь главные члены, найдем

$$(\lambda_q + \mu_q)^2 = \left\{ 1 - \frac{4g^2(q)}{V} \sum_{(k, k', k'-k=q)} \frac{\theta_C(k) \theta_F(k')}{E(k) - E(k')} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\omega}(q) = \omega(q) \left\{ 1 - \frac{4g^2(q)}{V} \sum_{(k, k', k'-k=q)} \frac{\theta_C(k) \theta_F(k')}{E(k) - E(k')} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

где  $\theta_C$  и  $\theta_F$  определены согласно (2.12)

Перейдем к уравнению (3.6) и введем в рассмотрение "ренормированную" функцию  $\tilde{g}(q)$ :

$$\tilde{g}^2(q) = g^2(q) \left\{ 1 - \frac{4g^2(q)}{V} \sum_{(k, k', k'-k=q)} \frac{\theta_C(k) \theta_F(k')}{E(k) - E(k')} \right\}^{-1} \quad (3.11)$$

Ренормировка возможна пока значения параметра связи достаточно малы. Во всяком случае они не могут превышать значения, выше которого, в частности, становится мнимой ренормированная частота звука  $\tilde{\omega}(q)$  и ренормированная  $\tilde{g}(q)$ . Такое же пре-

дельное значение для параметра связи было получено другим методом при исследовании устойчивости решетки по отношению к электронно-фононному взаимодействию в работе С.В.Тябликова и В.В.Толмачева [12].

Положим далее

$$\Xi(k) = E(k) - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} (u_k^2 - v_k^2) - \lambda \quad (3.12)$$

$$C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} u_{k'} v_k \quad (3.13)$$

Тогда на основании (3.6) будем иметь

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\Xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \Xi^2(k)}} \right\}, \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\Xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \Xi^2(k)}} \right\} \quad (3.14)$$

и

$$C(k) = \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \frac{C(k')}{\sqrt{C^2(k') + \Xi^2(k')}} \quad (3.15)$$

Рассмотрим теперь последний член в первой части формулы (3.8) и заметим, что он всегда мал (при малом  $\rho$  он будет порядка  $\omega e^{-1/\rho}$ ). Кроме того, когда  $\tilde{\epsilon}(k)$  увеличиваясь достигает величин порядка  $\omega$ , множитель  $u_k v_k$  практически исчезает.

Поэтому, оставаясь в рамках принятого приближения, мы можем заменить знаменатель в этом члене на

$$[\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k)]^2$$



Таким образом, получим на основании (3.12), (3.13), (3.14)

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(k) \left\{ 1 + \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{g^2(k-k') \omega(k-k') (u_k^2 u_{k'}^2 + v_k^2 v_{k'}^2)}{[\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k')]^2 - [\tilde{\epsilon}(k)]^2} \right\} = \\ = \sqrt{\tilde{\xi}^2(k) + c^2(k)} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для нормального состояния, когда

$$u_k = \theta_G(k), \quad v_k = \theta_F(k) \quad (3.17)$$

имеем

$$\tilde{\xi}_n(k) = E(k) - \lambda - \frac{1}{2V} \sum_{k'} \frac{\tilde{g}^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k') \{ \theta_G(k) - \theta_F(k') \}}{\tilde{\omega}(k-k') + |E(k) - E_F| + |E(k') - E_F|}$$

$$\tilde{\epsilon}_n(k) = (1 - \eta_n(k)) |\tilde{\xi}_n(k)|$$

$$\eta_n(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{\tilde{g}^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{[\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}_n(k')]^2 - [\tilde{\epsilon}_n(k)]^2} [\theta_G(k) \theta_G(k') + \theta_F(k) \theta_F(k')]$$

Здесь индексом  $n$  обозначены величины для состояния (3.17). Состоянию, соответствующему нетривиальному решению уравнения (3.15), сопоставим индекс  $s$ . Заметим, что в обоих случаях выражения  $\tilde{\xi}(k) - (E(k) - E_F)$ ,  $\eta(k)$  будут величинами первого порядка малости. Разности же  $\tilde{\xi}_n(k) - \tilde{\xi}_s(k)$ ,  $\eta_n(k) - \eta_s(k)$  будут величинами высшего порядка малости. Поэтому из (3.16) можем получить

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_s(k) &= \sqrt{(1 - \eta_s)^2 \tilde{\xi}_s^2(k) + (1 - \eta_s)^2 c^2(k)} \cong \\ &\cong \sqrt{(1 - \eta_n)^2 \tilde{\xi}_n^2(k) + c^2(k)} \end{aligned}$$

Итак, в рассматриваемом приближении

$$\tilde{\epsilon}_s(k) = \sqrt{\tilde{\epsilon}_n^2(k) + c^2(k)}$$

Заметим далее, что в формулах (3.14) и уравнении (3.15) мы можем заменить  $\tilde{\epsilon}(k)$  и  $|\tilde{\xi}(k)|$  прямо на  $|E(k) - E_F|$ . Имеем таким образом

$$C(k) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{\tilde{g}^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + |\tilde{\xi}(k')| + |\tilde{\xi}(k)|} \frac{C(k')}{\sqrt{\tilde{\xi}^2(k') + c^2(k')}} d^3k' \quad (3.18)$$

где  $\tilde{\xi}(k) = E(k) - E_F$

Мы пришли здесь к уравнению (2.16) предыдущего параграфа. Отличие состоит в том, что теперь полученное уравнение выведено без ограничительного допущения о радиальной симметрии.

Основное же преимущество обусловлено тем, что мы за счет простой ренормировки  $g(q)$  и  $\omega(q)$  добились существенного улучшения степени точности, так как использовали асимптотические приближения не по степеням  $\rho$ , а по степеням  $\rho \omega / E_F$ . Величина

$$\rho(q) = \tilde{g}^2(q) \frac{dn}{dE}$$

не должна быть теперь весьма малой. Достаточно лишь, чтобы решение  $C(k)$  уравнения (3.18) было мало по сравнению с  $\omega$  (важна, так сказать, только экспоненциальная малость).

3.3. Разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний. Перейдем теперь к оценке разности

$$H_S(\lambda) - H_N(\lambda) \quad (3.19)$$

собственных значений гамильтониана  $H$  для состояний  $S$  и  $N$  при одном и том же значении  $\lambda \sim E_F$ . Имеем в рассматриваемом приближении

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= U - \langle C_V^* H' H_0^{-1} H' C_V \rangle = \\ &= 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 - \langle C_V^* H' H_0^{-1} H' C_V \rangle \end{aligned}$$

Раскрывая, получим:

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 - \\ &- \frac{1}{V} \sum_{(k, k'), (q, q')} \frac{\tilde{g}^2(k-k') \tilde{\omega}(k-k')}{E(k-k') + E(k) + E(k')} \{ u_k^2 v_{k'}^2 + u_{k'} v_k u_{k'} v_{k'} \} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Возьмем теперь разность (3.19), подставляя в (3.20) нетривиальные и тривиальные значения  $u_k, v_k$ . Упрощая и отбрасывая члены высшего порядка малости, найдем

$$\begin{aligned} H_S(\lambda) - H_N(\lambda) &= \\ &= - \sum_k \theta_G(k) \frac{v_k^3}{u_k} c(k) - \sum_k \theta_F(k) \frac{u_k^3}{v_k} c(k) \end{aligned}$$

или на основании (3.14)

$$\frac{H_s(\lambda) - H_n(\lambda)}{V} = -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^3k \sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)} \times$$

$$\times \left\{ \theta_0(k) \left[ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right]^2 + \theta_f(k) \left[ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right] \right\}$$

(3.21)

Перейдем к вычислению разности  $E_s^N - E_n^N$  энергий обоих рассматриваемых состояний при одном и том же числе электронов  $N = N_0$ .

Заметим для этого, что

$$H(\lambda) = E(\lambda) - \lambda N(\lambda)$$

$$- \frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} = N(\lambda)$$

Имеем, следовательно,

$$E_s^N - E_n^N = E_s[\lambda_s(N)] - E_n[\lambda_n(N)] =$$

$$= H_s[\lambda_s(N)] - H_n[\lambda_n(N)] + [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)]N =$$

$$= H_s[\lambda_s(N)] - H_n[\lambda_s(N)] + H_n[\lambda_s(N)] - H_n[\lambda_n(N)] +$$

$$+ [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)]N =$$

$$= H_s[\lambda_s(N)] - H_n[\lambda_s(N)] + H_n[\lambda_s(N)] - H_n[\lambda_n(N)] -$$

$$- [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)] \left( \frac{\partial H_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_n(N)} =$$

$$= H_s(\lambda_s) - H_n(\lambda_s) + \frac{1}{2} [\lambda_s(N) - \lambda_n(N)]^2 \frac{\partial^2 H_n}{\partial \lambda^2}$$

Нетрудно заметить, что второй член в последнем выражении

будет второго порядка малости по отношению к первому и потому в принятом приближении

$$E_s^N - E_n^N = H_s(\lambda_s) - H_n(\lambda_s) \quad (3.22)$$

Таким образом, рассматриваемая разность энергий определяется той же формулой (3.21), что и  $H_s(\lambda) - H_n(\lambda)$ .

3.4. Свойство сверхпроводимости. Установим сейчас свойство сверхпроводимости. Так как мы здесь отвлекаемся от изучения действия магнитного поля, то, строго говоря, дело здесь будет идти об установлении свойства сверхтекучести электронной дидкости в модели Фрелиха.

Для этого покажем, что существует такое состояние с отличным от нуля средним суммарным импульсом электронов, у которого энергии элементарных возбуждений все положительны. Тем самым мы установим возможность токового состояния, устойчивого по отношению к слабым возмущениям.

Чтобы формально не выходить из класса состояний с нулевым суммарным импульсом электронов и совершенно не менять предыдущие рассуждения, будет удобно изменить начало отсчета импульсов электронов, т.е. провести трансляцию в этом импульсном пространстве:

$$\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \vec{p} \quad (3.23)$$

Тогда очевидно, что состояние с нулевым суммарным импульсом электронов в новой системе отсчета, в нормальной системе отсчета

будет обладать импульсом равным  $N\vec{p}$ .

С другой стороны нетрудно заметить, что влияние трансляции (3.23) на рассматриваемый гамильтониан  $H$  сводится лишь к замене  $E(\vec{k})$  на

$$E(\vec{k}-\vec{p}) = E(\vec{k}) - \left(\vec{p} \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{k}}\right) + \dots \quad (3.24)$$

Добавка  $-\left(\vec{p} \frac{\partial E}{\partial \vec{k}}\right)$  приводит к появлению в  $H$  дополнительного члена

$$-\sum_{\vec{k}, s} \left(\vec{p} \frac{\partial E}{\partial \vec{k}}\right)^\dagger a_{\vec{k}s} a_{\vec{k}s} = -\sum_{\vec{k}, s} \left(\vec{p} \frac{\partial E}{\partial \vec{k}}\right) (\alpha_{\vec{k}0}^\dagger \alpha_{\vec{k}0} - \alpha_{\vec{k}1}^\dagger \alpha_{\vec{k}1})$$

который включим в  $H'$ . Предположим, что импульс  $\vec{p}$  столь мал, что

$$\left(\vec{p} \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{k}}\right), \quad E(\vec{k}) \sim E_F$$

будут величинами порядка  $C(\vec{k})$ . Тогда ввиду малости дополнительного члена  $H'$  в  $H$  влиянием на  $u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}, \lambda_{\vec{k}}, \mu_{\vec{k}}$  следует пренебречь и единственным его эффектом будет изменение энергии элементарных возбуждений:

$$\tilde{E}(\vec{k}) \rightarrow \tilde{E}(\vec{k}) \pm \left(\vec{p} \frac{\partial E(\vec{k})}{\partial \vec{k}}\right)$$

Обозначим через  $\Delta$  энергетическую щель, отделяющую энергию основного неупорядоченного состояния от энергии возбуждений. Иначе говоря, обозначим через  $\Delta$  наименьшее значение  $C(\vec{k})$  на поверхности Ферми.

Так как  $\tilde{E}(k) > \Delta$ , то элементарные возбуждения останутся положительными для токового состояния, если средняя скорость электронов настолько мала, что

$$\left| \vec{p} \frac{\partial E}{\partial \vec{k}} \right| < \Delta, \quad E(k) \sim E_F$$

или в радиально симметричном случае

$$|uk_F| < \Delta$$

где  $u$  — это средняя скорость.

Видим, следовательно, что при достаточно малых скоростях токовое состояние остается устойчивым по отношению к малым возмущениям.

Разумеется, если бы  $\Delta = 0$ , это свойство не имело бы места, поскольку тогда энергии элементарных возбуждений могли бы принимать отрицательные значения. Подчеркнем, что пока мы не принимаем во внимание действие магнитного поля, токовое состояние мы должны считать метастабильным. Его энергия тогда окажется большей энергии покоящегося состояния на величину, пропорциональную  $u^2$ . Формально это приращение энергии мы можем вычислить, доведя в (3.24) следующий член

$$\frac{1}{2} \sum_{(\alpha, \beta=1,2,3)} p^\alpha p^\beta \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^\alpha \partial k^\beta}$$

и учитывая его влияние на энергию основного токового состояния.

Подчеркнем еще аналогию со случаем бозе-газа. В этом случае вместо ферми-сферы мы имеем в низшем энергетическом состоянии конденсат. При отсутствии взаимодействия, т.е. в случае идеаль-

ного бозе-газа свойства сверхтекучести не будет. Оно появляется только из-за наличия хотя бы слабого взаимодействия. Тогда появляется также существенное взаимодействие частиц вне конденсата с противоположными импульсами  $\pm k$  при малых  $k$ , что препятствует возможности применения обычной теории возмущения.

В рассматриваемом здесь случае идеального электронного газа положение совершенно аналогично: газ без взаимодействия свойством сверхпроводимости (сверхтекучести) не обладает и только электронно-фононное взаимодействие, ведущее к взаимодействию электронов с импульсами  $\pm k$  и спинами  $\pm \frac{1}{2}$ , ведет к появлению свойства сверхпроводимости. В некотором приближении это взаимодействие можно свести к эквивалентному взаимодействию между фермионами и тогда аналогия с бозе-газом в отношении свойства сверхтекучести делается еще более полной.

До последнего времени считалось, что свойство сверхтекучести возможно только для систем частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Ввиду создавшейся ситуации с теорией сверхпроводимости это положение нуждается в пересмотре.

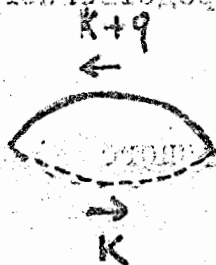
Повидимому, реальный случай для изучения свойств сверхтекучести ферми-систем, именно сверхтекучести, а не сверхпроводимости, представляет теория ядерной материи.



## § 4. СПЕКТР КОЛЛЕКТИВНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО СОСТОЯНИЯ

4.1. Метод приближенного вторичного квантования в применении к системе с кулоновским взаимодействием. До сих пор мы рассматривали элементарные возбуждения простейшего "индивидуального" типа — появление фермиона с энергией  $\tilde{\epsilon}(k)$  или фонона с энергией  $\tilde{\omega}(k)$ . Займемся теперь исследованием более сложной ветви спектра, соответствующей коллективным возбуждениям фермионов. Типичный случай такого рода возбуждений в фермионных системах представляет плазменные колебания в плотном электронном газе.

Вполне корректный и вместе с тем достаточно простой анализ их можно произвести с помощью методики, разработанной Гелл-Манном, Брюкнером и Савада<sup>/13/</sup>. Так, для получения основного приближения можно ограничиться суммированием только тех диаграмм, в которых не разрушается элементарный комплекс частица-дырка (см. фиг. 5):

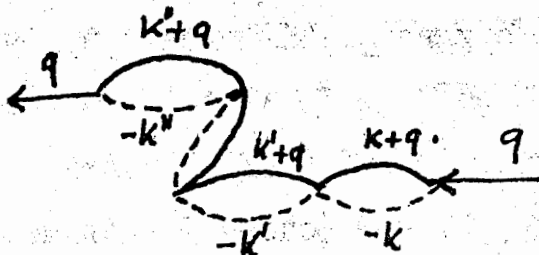


Фиг. 5

С физической точки зрения важность диаграмм именно этого типа обусловлена наличием кулоновского притяжения между частицей

и дыркой.

Чтобы получить секулярное уравнение для определения энергетического спектра  $E(q)$  плазменных колебаний, следует просуммировать диаграммы типа фиг.6.



Фиг.6

Для суммирования их удобно воспользоваться методом приближенного вторичного квантования и построить упрощенный гамильтониан, допускающий точную диагонализацию таким образом, чтобы он приводил только к диаграммам рассматриваемого типа, но с тем же вкладом, как и у точного гамильтониана. При этих условиях диагонализацией упрощенного гамильтониана мы естественно получим те же результаты, что и путем непосредственного суммирования диаграмм.

Для построения такого упрощенного "эквивалентного" гамильтониана необходимо обеспечить выполнение следующих требований: надо, чтобы комплекс фиг.5 не разрывался, чтобы вершинные части упрощенного гамильтониана имели тот же вклад, что и те вершинные части точного гамильтониана, которые учитываются в рассматриваемых диаграммах и, наконец, чтобы энергетические знаменатели были оди-

наковы в обоих случаях.

Первому условию удовлетворим, описав появление и уничтожение комплекса частица-дырка не произведением ферми-амплитуд,

$$a_{k+q}^+ b_k^+, \quad b_k a_{k+q}$$

как в точном случае, а бозе-амплитудами<sup>x)</sup>

$$b_q^+(k), \quad b_q(k)$$

с двумя индексами  $k, q$ .

x) Заметим, что в диаграммах фиг.6 все комплексы различны:

$k \neq k' \neq k''$ . При пользовании бозе-амплитудами у нас в ~~диаграммах~~ <sup>диаграммах</sup> смогут появляться несколько одинаковых комплексов, например,  $k = k'$ , несводимые к одному. Однако, такие лишние элементы будут давать лишь бесконечно малый вклад в случаях расчета элементарных возбуждений, поскольку проводится интеграция по всем импульсам  $k, k', k''$  и мы имеем линейную цепочку комплексов.

При расчете основного состояния иногда может возникнуть интересная ситуация, когда необходимо прямо запретить повторение в ~~диаграммах~~ <sup>диаграммах</sup> одинаковых комплексов. В этих случаях <sup>/I4/</sup> следует считать амплитуды  $\beta^+, \beta$  не бозевскими, а <sup>n</sup> фермионскими. Иначе говоря, мы должны предписать для них все перестановочные соотношения типа Бозе, кроме соотношения

$$\beta^+ \beta^+ - \beta^+ \beta^+ = 1$$

которое следует заменить на

$$\beta^+ \beta^+ + \beta \beta = I.$$

В рассматриваемых диаграммах имеются вершинные части типа, изображенного на фиг. 7.



Фиг. 7

В точном гамильтониане им соответствуют члены

$$P_q(k, k') a_{k+q}^\dagger b_k^\dagger a_{k'-q}^\dagger b_{k'}$$

$$* P_q(k, k') b_{k'} a_{k'-q} b_k a_{k+q}, \quad Q_q(k, k') a_{k+q}^\dagger b_k^\dagger b_{k'} a_{k'+q}$$

Поэтому гамильтониан взаимодействия в упрощенной модели мы должны составить из членов вида

$$P_q(k, k') \beta_q(k) \beta_{-q}(k'), \quad * P_q(k, k') \beta_{-q}(k') \beta_q(k), \quad Q_q(k, k') \beta_q(k) \beta_q(k')$$

Наконец, чтобы обеспечить правильные энергетические знаменатели, необходимо в качестве  $H_0$ -собственной энергии комплексов частица-дырка взять выражение

$$\sum_{k, q} \{ \epsilon_+(k+q) + \epsilon_-(k) \} \beta_q(k) \beta_q(k)$$

в котором  $\epsilon_+, \epsilon_-$  — энергия частицы и дырки.

Таким образом, мы получаем упрощенный полный гамильтониан в виде квадратичной формы из бозе-операторов. Составив для нее секулярное уравнение, получим тем самым уравнение для определения энергии  $\epsilon(q)$  коллективных возбуждений, в данном случае, плазменных колебаний. При фиксированном  $q$  величина  $\epsilon(q)$  будет

изолированным корнем этого уравнения, соответствующим, так сказать, "связанному" состоянию" пары частица-дырка. Непрерывный спектр здесь — спектр обычных однофермионных возбуждений.

Мы кратко изложили сейчас характерные приемы метода приближенного вторичного квантования в применении к хорошо известному случаю плазменных колебаний плотного электронного газа /15/, так как именно этот метод будет положен в основу нашего исследования коллективных возбуждений сверхпроводящего состояния, к которому теперь и приступим.

4.2. Коллективные возбуждения в модели Фрелиха. Прежде всего заметим, что в рассматриваемой модели Фрелиха имеется притяжение между электронами с противоположными спинами и импульсами  $\pm \vec{k}$  для  $\vec{k}$ , лежащих вблизи поверхности Ферми. Такое же притяжение имеется и у дырок. Ясно, что это притяжение должно иметь место и в том случае, когда соответствующие импульсы частиц пары не точно противоположны, а, скажем, равны  $\vec{k} + \vec{q}$ ,  $-\vec{k}$  с достаточно малым  $\vec{q}$ .

Перейдем, как всегда, к фермионам  $(\vec{k}, 0)$ ,  $(\vec{k}, 1)$ , характеризуемым амплитудами

$$\alpha_{k_0}^+, \alpha_{k_0}^-; \alpha_{k_1}^+, \alpha_{k_1}^-$$

Заметим, что возникновение пары

$$\alpha_{k+q,0}^+, \alpha_{k_1}^+$$

не изменяет спин и изменяет суммарный импульс на вектор  $\vec{q}$ . В связи с этим нетрудно обнаружить наличие эффективного притяжения между фермионами  $(k+q, 0)$ ,  $(k, 1)$  при достаточно малых  $\vec{q}$ .

Отсюда мы получаем важное указание для программы надлежащего применения метода приближенного вторичного квантования. В соответствии с этим введем в качестве "неразложимого элемента" диаграмм комплекс, характеризуемый при точном рассмотрении произведениями ферми-амплитуд:

$$\alpha_{k+q,0}^{\dagger} \alpha_{k,1}^{\dagger}, \alpha_{k,1} \alpha_{k+q,0}$$

В нашей приближенной модели мы сопоставим этому комплексу бозе-амплитуды

$$\beta_q^{\dagger}(k), \beta_q(k)$$

с двумя индексами. Нам следует теперь получить гамильтониан взаимодействия  $\Gamma'$  между различными комплексами в виде:<sup>x)</sup>

$$\begin{aligned} \Gamma' = & - \sum_{\substack{(k,k',p) \\ k \neq k'}} \beta_p^{\dagger}(k) \beta_p(k') A_p(k,k') - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\substack{(k,k',p) \\ k \neq k'}} B_p(k,k') \{ \beta_{-p}^{\dagger}(k') \beta_p^{\dagger}(k) + \beta_p(k) \beta_{-p}(k') \} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Тогда, добавив сюда собственную энергию пар, получим полный гамильтониан упрощенной модели:

$$\Gamma = \sum_{(k,p)} \{ \tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k) \} \beta_p^{\dagger}(k) \beta_p(k) + \Gamma' \quad (4.2)$$

Как известно /15/, диагонализация такой квадратичной формы сводится к решению системы однородных линейных уравнений в  $C$ -числах  $\varphi_k, \chi_k$ :

$$\{ \tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k) - E \} \varphi_p(k) = \sum_{k'} A_p(k,k') \varphi_p(k') + \sum_{k'} B_p(k,k') \chi_p(k') \quad (4.3)$$

$$\{ \tilde{\epsilon}(k-p) + \tilde{\epsilon}(k) + E \} \chi_p(k) = \sum_{k'} B_{-p}(k,k') \varphi_p(k') + \sum_{k'} A_{-p}(k',k) \chi_p(k')$$

x) См. сноску на следующей странице.

с условием нормировки

$$\sum_{(k,p)} \{ \varphi_p^2(k) - \chi_p^2(k) \} = 1 \quad (4.4)$$

Энергия коллективных возбуждений  $E = \varepsilon_c(p)$  для данного фиксированного импульса  $p$  определяется изолированным корнем соответствующего (4.3) секулярного уравнения. Нам остается только найти явные выражения для  $A$  и  $B$ . Заметим для этого, что в упрощенной модели

$$A_p(k, k') = \langle \beta_p(k) \Gamma' + \beta_p(k') \rangle_0$$

$$B_p(k, k') = \langle \beta_{-p}(k') \beta_p(k) \Gamma' \rangle_0$$

В рассматриваемой же точной модели Фрелиха такие вершинные части осуществляются только через обмен фононами.

Учитывая в первом приближении лишь обмен одним фононом, положим

$$-A_p(k, k') = \langle \alpha_{k,1} \alpha_{k+p,0} N' N_0^{-1} N' + \alpha_{k+p,0} \alpha_{k,1} \rangle_0 \quad (4.5)$$

$$-B_p(k, k') = \langle \alpha_{k,1} \alpha_{k+p,0} \alpha_{k,1} \alpha_{k+p,0} N' N_0^{-1} N' \rangle_0$$

Здесь  $N'$  - гамильтониан фермион-фононного взаимодействия (см. формулы § 2), который напомним в форме

х) Не производя никаких вычислений, можно сразу же заметить, что  $A_p(k, k')$ ,  $B_p(k, k')$  должны быть вещественны, так как гамильтониан в модели Фрелиха инвариантен по отношению к инверсии времени и содержит только вещественные коэффициенты.

$$\begin{aligned}
 H' = & \sum_{\substack{(k, k', q) \\ k' - k = q}} \tilde{g}(q) \left( \frac{\tilde{\omega}(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) (\alpha_{k_0}^+ \alpha_{k_1}^+ + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}') (\beta_q^+ + \beta_{-q}) + \\
 & + \sum_{\substack{(k, k', q) \\ k' - k = q}} \tilde{g}(q) \left( \frac{\tilde{\omega}(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) (\alpha_{k_0}^+ \alpha_{k_0}' + \alpha_{k_1}^+ \alpha_{k_1}') (\beta_q^+ + \beta_{-q})
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (4.5), найдем

$$\begin{aligned}
 A_p(k, k') = & \tilde{g}^2(k-k') \frac{\tilde{\omega}(k-k')}{2V} \{ u_{k+p} u_{k+p} - v_{k+p} v_{k+p} \} \times \\
 & \times \{ u_k u_k - v_k v_k \} \left\{ \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\omega}(k-k)} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\omega}(k'-k)} \right\} + \\
 & + \tilde{g}^2(p) \frac{1}{2V} \{ u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p} \} \{ u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p} \} + \\
 & + \tilde{g}^2(p) \frac{\tilde{\omega}(p)}{2V} \frac{\{ u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p} \} \{ u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p} \}}{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\omega}(p)} \quad (4,6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_p(k, k') = & - \tilde{g}^2(k'-k-p) \frac{\tilde{\omega}(k'-k-p)}{2V} \frac{\{ u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p} \} \{ u_{k'-p} v_k + u_k v_{k'-p} \}}{\tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\omega}(k'-k-p)} - \\
 & - \tilde{g}^2(k-k'+p) \frac{\tilde{\omega}(k-k'+p)}{2V} \frac{\{ u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p} \} \{ u_{k'-p} v_k + u_k v_{k'-p} \}}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k'-p) + \tilde{\omega}(k-k'+p)} + \\
 & + \tilde{g}^2(p) \frac{\tilde{\omega}(p)}{2V} \frac{\{ u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p} \} \{ u_{k'-p} v_{k'} + u_{k'} v_{k'-p} \}}{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\omega}(p)} + \\
 & + \tilde{g}^2(p) \frac{\tilde{\omega}(p)}{2V} \frac{\{ u_{k+p} v_k + u_k v_{k+p} \} \{ u_{k'-p} v_{k'} + u_{k'} v_{k'-p} \}}{\tilde{\epsilon}(k'-p) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\omega}(p)} \quad (4,7)
 \end{aligned}$$



Чтобы упростить полученные слишком сложные выражения, допустим, что для малых  $\rho$  можно положить:

$$\tilde{q}(\rho) = 0 \quad \text{по всей видимости} \quad [11]$$

Такое допущение является разумным и с физической точки зрения,

(3.4)

$$\{ \chi \} \rho + \dots = (\chi, \dots)$$

$$\rho = (\chi, \dots)$$

$$(\chi, \dots) = (\chi, \dots)$$

Произведем кроме того "расчистку" этих формул и освободимся в них от членов такой малости, которая по существу не должна учитываться в принятом приближении. Заметим прежде всего, что в рассматриваемом процессе коллективных колебаний, как это видно хотя бы из уравнений (4.3), существенны лишь большие передачи импульсов  $k-k'$ . Поэтому в величинах типа  $\tilde{q}^2(k-k'-\rho)$   $\tilde{\omega}(k-k'-\rho)$  плавно<sup>x)</sup> зависящих от импульса, мы можем пренебречь добавочным импульсом  $\rho$ .

Далее, так как в том энергетическом слое, от которого практически зависит весь эффект, энергии  $\tilde{\epsilon}(k)$  малы по сравнению с  $\tilde{\omega}$ , мы заменим (как, кстати сказать, и при выводе основного уравнения для  $C(k)$ ) величины  $(\chi, \dots)$  просто на

$$\tilde{\epsilon}(k), \tilde{\epsilon}(k'-\rho), \dots$$

$$|\tilde{\xi}(k)|, |\tilde{\xi}(k')|$$

где, как и раньше:

$$\tilde{\xi}(k) = E(k) - E_F$$

x) Заметим, что, к сожалению, мы не можем сразу убрать  $\rho$  из выражений типа  $U(k+\rho)$ , так как в основной области, где  $|\tilde{\xi}(k)| \sim \Delta$ , эти функции быстро меняются.

Таким образом получим

$$\begin{aligned} A_p(k, k') &= \frac{J(k, k')}{V} \{u_{k'+p} u_{k+p} - v_{k'+p} v_{k+p}\} \{u_{k'} u_k - v_{k'} v_k\} \\ B_p(k, k') &= -\frac{J(k, k')}{V} \{u_{k+p} v_{k'} + u_{k'} v_{k+p}\} \{u_{k-p} v_k + v_{k-p} u_k\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$J(k, k') = \tilde{g}^2(k-k') \frac{\tilde{\omega}(k-k')}{|\tilde{\xi}(k)| + |\tilde{\xi}(k')| + \tilde{\omega}(k-k')}$$

Как видно, выражение  $J(k, k')$  здесь будет тем же самым, что и в основном уравнении для определения  $C(k)$  :

$$C(k) = \sum_{k'} \frac{J(k, k')}{2V} \frac{C(k')}{\sqrt{C^2(k') + \tilde{\xi}^2(k')}} \quad (4.9)$$

Положим для сокращения

$$u_{k'} u_k - v_{k'} v_k = L(k, k')$$

$$u_{k'} v_k + v_{k'} u_k = M(k, k')$$

Тогда (4.8) можно представить в форме

$$A_p(k, k') = \frac{J(k, k')}{V} L(k+p, k'+p) L(k, k')$$

$$B_p(k, k') = -\frac{J(k, k')}{V} M(k+p, k') M(k, k'-p)$$

#### 4.3. Решение секулярных уравнений. Продольные возбуждения.

Обратимся теперь к секулярным уравнениям (4.3) и введем новые неизвестные

$$\varphi_p(k) + \chi_p(k) = \vartheta_p(k)$$

$$\varphi_p(k) - \chi_p(k) = \theta_p(k)$$

Получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k-p)}{2} + \tilde{\epsilon}(k) \right\} \theta_p(k) - \\ & - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') + \right. \\ & \left. + \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) + M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \theta_p(k') = \\ & = \left\{ E - \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) - \tilde{\epsilon}(k-p)}{2} \right\} \theta_p(k) + \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') - \right. \\ & \left. - \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) - M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \theta_p(k') \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\left\{ \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k-p)}{2} + \tilde{\epsilon}(k) \right\} \theta_p(k) -$$

$$- \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') - \right.$$

$$\left. - \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) + M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \theta_p(k') = 0.$$

$$= \left\{ E - \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) - \tilde{\epsilon}(k-p)}{2} \right\} \theta_p(k) +$$

$$+ \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') + \right. \quad (4.11)$$

$$\left. + \frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) - M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} \right\} \theta_p(k')$$

Рассмотрим сперва случай, когда  $\rho = 0$ . Тогда уравнения (4.I0), (4.II) существенно упростятся и мы будем иметь:

$$2\sqrt{\xi^2(k) + c^2(k)} \theta_0(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \theta_0(k') = E \theta_0(k) \quad (4.I2)$$

$$2\sqrt{\xi^2(k) + c^2(k)} \vartheta_0(k) + \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{c(k)c(k') - \xi(k)\xi(k')}{\{[\xi^2(k) + c^2(k)][\xi^2(k') + c^2(k')]\}^{1/2}} \times \\ \times J(k, k') \vartheta_0(k') = E \vartheta_0(k) \quad (4.I3)$$

Видим на основании (4.9), что система эта имеет решение

$$\vartheta_0(k) = 0 \quad \theta_0(k) = S \frac{c(k)}{\sqrt{\xi^2(k) + c^2(k)}}; \quad S = \text{const}$$

$$E = 0$$

Таким образом, приходим к важному заключению о том, что спектр коллективных возбуждений начинается с нуля.

Перейдем теперь к исследованию коллективных возбуждений при  $\rho$  малых, но отличных от нуля. Чтобы не усложнять вычислений, ограничимся здесь случаем радиальной симметрии.

Прежде всего нам надо будет разложить коэффициенты, входящие в наши уравнения по степеням  $\rho$ . Так как в существенной энергетической области  $E(k)$  весьма близко к  $E_F$ , можно положить

$$\xi(k + \rho) = S(\vec{\rho} \vec{e}) + \xi(k)$$

где  $S$  - абсолютная величина скорости электронов на сфере Ферми,  
 $\vec{e}$  - орт вектора  $\vec{k}$ . Удобнее принять направление  $\vec{\rho}$  за

ось отсчета  $\vec{e}$  :

$$\vec{\zeta}(k+p) = \text{sp} e_0 + \vec{\zeta}(k)$$

Заметим далее, что в выражениях, заключающих  $\vec{\zeta}^2 + C^2(\vec{\zeta})$ , мы можем пренебречь изменением  $C(\vec{\zeta})$  по сравнению с  $\vec{\zeta}$ , поскольку  $C(\vec{\zeta})$  является медленно меняющейся функцией. Найдем тогда

$$u(k+p) = u(\vec{\zeta}) + \text{sp} e_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{\zeta}} + \dots$$

$$\vec{E}(k+p) = \vec{E}(\vec{\zeta}) + \text{sp} e_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{\zeta})}{\partial \vec{\zeta}} + \dots$$

Удобно при этом ввести в качестве аргументов вместо вектора  $\vec{K}$  число  $\vec{\zeta}$  и орт  $\vec{e}$ . Таким образом придем к асимптотическим формулам вида:

$$\frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') = \frac{1}{2} + \frac{\vec{\zeta}\vec{\zeta}' - CC'}{2 [(\vec{\zeta}^2 + C^2)(\vec{\zeta}'^2 + C'^2)]^{1/2}} +$$

$$+ \text{sp} e_0 P_1(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + \text{sp} e_0' P_2(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + \dots$$

$$\frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} L(k, k') = \text{sp} e_0 Q_1(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + \text{sp} e_0' Q_2(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + \dots$$

$$\frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) + M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\vec{\zeta}\vec{\zeta}' - CC'}{2 [(\vec{\zeta}^2 + C^2)(\vec{\zeta}'^2 + C'^2)]^{1/2}} +$$

$$+ (\text{sp})^2 \{ e_0^2 Q_1(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + e_0 e_0' Q_2(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + e_0'^2 Q_3(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + Q_4(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') \} + \dots$$

$$\frac{M(k+p, k') M(k, k'-p) - M(k-p, k') M(k, k'+p)}{2} =$$

$$= \text{sp} e_0 S_1(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + \text{sp} e_0' S_2(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}') + \dots$$

Применим теперь к секулярным уравнениям (4.10), (4.11) обычную теорию возмущений, считая  $\rho$  и  $E$  величинами первого порядка малости. Положим

$$\begin{aligned} \theta(k) &= \theta_0(\xi) + sp e_0 \theta_1(\xi) + \dots \\ \vartheta(k) &= E \vartheta_1(\xi) + sp e_0 \bar{\vartheta}_1(\xi) + \dots \end{aligned} \quad \theta_0(k) = s \frac{c}{\sqrt{\xi^2 + c^2}} \quad (4.14)$$

Подставив эти выражения в (4.10), (4.11) и отделив члены различных порядков, можем определить  $\theta_1(\xi)$ ,  $\vartheta_1(\xi)$ ,  $\bar{\vartheta}_1(\xi)$  через  $\theta_0(k)$ . Воспользовавшись полученными выражениями, раскроем уравнение (4.10) с точностью до величин второго порядка малости. Таким образом построим соотношение вида

$$2 \tilde{\epsilon}(k) \theta(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \theta(k') = F(E, sp, k) \quad (4.15)$$

где  $F(E, sp, k)$  — квадратичная форма по отношению к  $E, sp$ . Умножим (4.15) на  $C(k) [2V \tilde{\epsilon}(k)]^{-1}$  и просуммируем по  $k$ . В силу уравнения (4.9), получим

$$\frac{1}{V} \sum_k F(E, sp, k) \frac{C(k)}{\tilde{\epsilon}(k)} = 0$$

Отсюда и определим

$$E = \alpha sp$$

где  $\alpha$  — численный коэффициент. Так, если отбросить члены, исчезающие вместе с параметром  $\rho = \frac{v^2}{g} \frac{dn}{d\xi}$ , то будем иметь:

$$E \vartheta_1(\xi) + sp e_0 \bar{\vartheta}_1(\xi) = \frac{E - e_0 ps}{2 \tilde{\epsilon}(\xi)} \theta_0(\xi)$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{3}$$

Получим, следовательно, два корня для  $E$ . Чтобы определить должный знак, обратимся к условию нормировки (4.4), которое запишем в форме

$$\sum_k \vartheta_p(k) \vartheta_p(k) = 1$$

Откуда

$$E \sum \frac{\vartheta_0^2(\xi)}{2\xi(\xi)} = 1$$

и поэтому

$$E > 0$$

Итак, в принятом приближении

$$\varepsilon_c(p) = \frac{sp}{\sqrt{3}} \quad (4.16)$$

Заметим теперь, что коллективные возбуждения будут существовать лишь пока

$$\varepsilon_c(p) < 2\Delta$$

где  $\Delta$  — величина энергетической щели (т.е. значение  $C$  при  $\xi = 0$ ). Действительно, в противном случае  $E = \varepsilon_c(p)$  перекрывается с фермионным спектром

$$\tilde{\varepsilon}(k) + \tilde{\varepsilon}(k+p)$$

и перестает быть изолированным корнем секулярного уравнения.

Подтвердим это интуитивное рассуждение прямым расчетом. Для упрощения будем удерживать только главные члены по параметру  $p$  и заменим функцию  $J(k, k')$  постоянной  $J$  в некотором энергетическом слое  $(E_F \pm \omega_{\varphi})$  и нулем вне этого слоя.

В таком приближении из (4.II) найдем:

$$\vartheta_p(k) = \frac{E - \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) - \tilde{\epsilon}(k-p)}{2}}{\tilde{\epsilon}(k) + \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k-p)}{2}} \vartheta_p(k)$$

Это выражение подставим в (4.10) и ограничимся тут опять только основными членами. Тогда получим

$$\left\{ \tilde{\epsilon}(k) + \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k-p)}{2} - \frac{\left( E - \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) - \tilde{\epsilon}(k-p)}{2} \right)^2}{\tilde{\epsilon}(k) + \frac{\tilde{\epsilon}(k+p) + \tilde{\epsilon}(k-p)}{2}} \right\} \vartheta_p(k) =$$

$$= \frac{J}{V} \sum_{k'} \vartheta_p(k')$$

Соответствующее секулярное уравнение будет

$$1 = \frac{J}{2V} \sum_k \left\{ \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+p) - E} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k-p) + E} \right\}$$

С другой стороны, основное уравнение для  $C$  в рассматриваемом приближении имеет вид:

$$C = \frac{J}{2V} C \sum \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k)}$$

Поэтому наше секулярное уравнение может быть представлено в форме

$$\sum_k \left\{ \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+p) - E} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k-p) + E} - \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k)} \right\} = 0 \quad (4.17)$$

При фиксированном  $p$  это уравнение имеет непрерывный спектр

$$E = \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+p) + O\left(\frac{1}{V}\right)$$

где

$$O\left(\frac{1}{V}\right) \rightarrow 0, \quad V \rightarrow \infty$$



Непрерывный спектр начинается от значения  $E = 2C = 2\Delta$  и характеризуется при данном  $\vec{p}$  векторным индексом  $\vec{K}$ . Как видно, он соответствует просто возбуждению двух "индивидуальных" фермионов.

Дискретный спектр, соответствующий коллективным возбуждениям, возможен лишь при таких значениях  $\vec{p}$ , при которых уравнение (4.17) имеет изолированный корень

$$E < 2\Delta$$

Удобно написать (4.17) в интегральной форме. Имеем

$$\int_{-1}^{+1} dt \int_0^{\infty} d\zeta \left\{ \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + c^2} + \sqrt{(\zeta + sp/c)^2 + c^2} - E} + \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + c^2} + \sqrt{(\zeta - sp/c)^2 + c^2} + E} - \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + c^2}} \right\} = 0$$

или

$$\phi\left(\frac{E}{c}, \frac{sp}{c}\right) + \phi\left(-\frac{E}{c}, \frac{sp}{c}\right) = 0$$

где

$$\phi(\xi, \nu) = \int_{-1}^{+1} dt \int_0^{\infty} d\zeta \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2} + \sqrt{1+(\nu+\zeta)^2} - \xi} - \frac{1}{2\sqrt{1+\zeta^2}} \right\}$$

При  $sp \ll c$  мы, естественно, получим для  $E$  значение (4.16). Но и вплоть до  $E = 2C$  отношение  $\frac{E}{sp}$  будет величиной порядка единицы. Уравнение для определения  $p_{\max}$  будет

$$\phi\left(2, \frac{sp}{c}\right) + \phi\left(-2, \frac{sp}{c}\right) = 0$$

откуда

$$sp_{\max} = \gamma c$$

где  $\gamma$  - численный коэффициент.

Пользуясь случаем, заметим, что эти уравнения мы могли бы получить и без упрощения структуры функции  $J(k, k')$ . Их применимость обусловлена лишь малостью параметра  $\rho$ .

Благодаря тому, что коллективные колебания существуют лишь для импульсов  $p$ , меньших  $p_{\text{max}}$ , тот факт, что  $\xi_c(p)$  не исчезает при полном отсутствии электронно-фотонного взаимодействия, не является парадоксальным. Действительно, в таком случае формула (4.16) вообще не будет иметь области применимости, поскольку  $\Delta = 0$ .

Мы рассматривали до сих пор коллективные возбуждения только для сверхпроводящего состояния. Проанализируем теперь, какую роль они играют для нормального состояния. Возьмем для простоты случай  $\rho = 0$ . Тогда из уравнений (4.12), (4.13) получим:

$$2|\xi(k)|\theta(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \theta(k') = E \theta(k) \quad (4.18)$$

$$2|\xi(k)|\vartheta(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} \frac{\xi\xi'}{|\xi\xi'|} J(k, k') \theta(k') = E \theta(k) \quad (4.19)$$

Рассмотрим радиально-симметричные решения и перейдем в (4.18), (4.19) к интегральной форме. Получим

$$2|\xi| \theta(\xi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi\xi') \theta(\xi') d\xi' = E \theta(\xi) \quad (4.20)$$

$$2|\xi| \vartheta(\xi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi\xi'}{|\xi\xi'|} \rho(\xi\xi') \vartheta(\xi') d\xi' = E \theta(\xi) \quad (4.21)$$

где

и

$$\rho(\xi, \xi') = \frac{1}{4\xi^2} \int_{-1}^{\frac{\xi^2}{dE}} \frac{\xi^2}{k} \delta(k_F \sqrt{2(1-t)}) \frac{\omega(k_F \sqrt{2(1-t)})}{|\xi| + |\xi'| + \omega(k_F \sqrt{2(1-t)})} dt$$

В интегральных уравнениях (4.20), (4.21) мы использовали бесконечные пределы интегрирования, поскольку точные значения их безразличны - весь вклад практически обусловлен интервалом  $|\xi| \approx \xi$

Положим:

$$C_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, \xi') \theta(\xi') d\xi' \quad (4.22)$$

$$C_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi'}{|\xi'|} \rho(\xi, \xi') \theta(\xi') d\xi' \quad (4.23)$$

Тогда из (4.20), (4.21) будем иметь

$$\theta(\xi) = \frac{2|\xi| C_1(\xi) + \frac{\xi}{|\xi|} C_2(\xi) E}{4\xi^2 - E^2}$$

Подставим это выражение в (4.22), и заметим, что

$C_1(\xi), C_2(\xi), \rho(\xi, \xi')$  - четные функции  $\xi, \xi'$

Следовательно,

$$C_1(\xi) = \int_0^{\infty} \rho(\xi, \xi') \frac{4\xi'}{\xi'^2 - E^2} C_1(\xi') d\xi'$$

Отсюда при малых  $\rho = \rho(0,0)$  получим асимптотическую формулу

вида

$$-E^2 \sim 4\omega_0^2 e^{-\frac{2}{\rho}}$$

где  $\omega_0$  - некоторое среднее значение  $\omega$ .

Итак, энергия коллективных возбуждений оказывается чисто мнимой, что и указывает на неустойчивость нормального состояния. Именно эти коллективные возбуждения обуславливают неустойчивость, тогда как фермионные и фононные возбуждения нормального состояния обладают положительными энергиями.

#### 4.4. Решение секулярных уравнений. Поперечные возбуждения.

До сих пор мы рассматривали только такие решения секулярных уравнений (4.10), (4.11), которые можно представить в форме рядов (4.14). Точнее говоря, мы ограничивались только такими зависимостями  $\theta_p(k)$  и  $\vartheta_p(k)$ , при которых

$$\theta_p(k) = \theta(|\vec{p}|, |k|, (\vec{e}, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})) \quad (4.24)$$

$$\vartheta_p(k) = \vartheta(|\vec{p}|, |k|, (\vec{e}, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}))$$

Указанные решения соответствуют продольным волнам. Однако, помимо продольных волн у секулярных уравнений имеется еще целый класс решений другого типа, соответствующих поперечным волнам. Другими словами, для этих уравнений:

$$\theta_p(k) = \theta(|\vec{p}|, |k|, (\vec{e}, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})) \left[ \vec{k} \times \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right]_n \quad (4.25)$$

$$\vartheta_p(k) = \vartheta(|\vec{p}|, |k|, (\vec{e}, \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|})) \left[ \vec{k} \times \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \right]_n$$

где индекс  $n$  указывает на компоненту векторного произведения по направлению  $n$ .

Ради простоты рассмотрим случай  $\vec{p} = 0$ . В этом случае достаточно рассмотреть уравнения (4.12) и (4.13). Однако, теперь

мы будем искать не сферически симметричные решения, а решения типа

$$\theta_0(\mathbf{k}) = \theta_0(|\mathbf{k}|) e_x$$

$$\vartheta_0(\mathbf{k}) = \vartheta_0(|\mathbf{k}|) e_x$$

Для удобства без ограничения общности мы считаем  $\mathbf{p}$  направленным по оси  $z$ , а  $\mathbf{k}$  - по оси  $x$ ;  $e_x$  -  $x$ -ая компонента орта вектора  $\vec{k}$ . Для  $\theta_0(|\mathbf{k}|)$  и  $\vartheta_0(|\mathbf{k}|)$  будем иметь при этом уравнения

$$2\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})\theta_0(\mathbf{k}) - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \theta_0(\mathbf{k}') = E \vartheta_0(\mathbf{k}) \quad (4.26)$$

$$2\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})\vartheta_0(\mathbf{k}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} \tilde{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{c(\mathbf{k})c(\mathbf{k}') - \tilde{\epsilon}(\mathbf{k})\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}')}{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}')} \vartheta_0(\mathbf{k}') = E \theta_0(\mathbf{k}) \quad (4.27)$$

где

$$\tilde{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 J(|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'|, \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|t}) t dt$$

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) = \sqrt{\tilde{\epsilon}^2(\mathbf{k}) + c^2(\mathbf{k})}$$

Далее удобно будет ограничиться рассмотрением случая, когда

$\tilde{J}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  сосредоточено вблизи поверхности Ферми и его можно заменить некоторой константой  $\tilde{J}$  внутри слоя  $E_F \pm \omega$ . Кроме того, для самого  $J(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  примем такую же аппроксимацию: заменим его константой  $J$  внутри слоя  $E_F \pm \omega$  и культируем нулем вне этого слоя. При сделанных предположениях секулярные уравнения (4.26), (4.27) легко разрешаются, если ввести вместо функций  $\theta_0(\mathbf{k})$  и  $\vartheta_0(\mathbf{k})$  новые неизвестные:

$$x = \frac{\tilde{J}}{V} \sum \theta_0(\mathbf{k})$$

$$y = \frac{\tilde{J}}{V} \sum \frac{c(\mathbf{k})}{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})} \vartheta_0(\mathbf{k})$$

$$z = \frac{\tilde{J}}{V} \sum \frac{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})}{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})} \vartheta_0(\mathbf{k})$$

где суммирование ведется по области  $E_F \pm \bar{\omega}$  вблизи сферы Ферми.

Уравнение для определения  $E$  принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\xi(k)}{4\xi^2(k) - E^2} - 1 & - \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{C(k)E}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} & \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{\xi(k)E}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} \\ \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{C(k)E}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} & - \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2C^2(k)}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} - 1 & \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\xi(k)C(k)}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} \\ \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{\xi(k)E}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} & - \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\xi(k)C(k)}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} & \frac{\bar{J}}{V} \sum \frac{2\xi^2(k)}{\xi(k)(4\xi^2(k) - E^2)} - 1 \end{aligned} \right\} = 0 \quad (4.28)$$

Произведем теперь асимптотическое разложение детерминанта (4.28) при малых  $C$ , ограничиваясь при этом лишь не исчезающими при  $C \rightarrow 0$  членами. Фактически такое разложение будет происходить по малому параметру  $C/\omega$  или  $C/\bar{\omega}$ . Окончательно (4.28) принимает вид:

$$\left\{ \left( \bar{\rho} \ln \frac{2\Omega}{\epsilon} - 1 + \epsilon^2 \right) \left( \frac{\bar{\rho}}{\epsilon \sqrt{1 - \epsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} + 1 \right) - \epsilon^2 \right\} \times \left\{ \bar{\rho} \ln \frac{2\Omega}{\epsilon} - \bar{\rho} \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon} \operatorname{arctg} \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right\} = 0 \quad (4.29)$$

Здесь

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{J}}{2\Omega} \frac{k_F^3}{E_F(k_F)}, \quad \Omega = \min(\omega, \bar{\omega}), \quad \epsilon = \frac{E}{2C}$$

Исследование корней уравнения (4.29) не представляет большого труда. Результат этого исследования следующий. Уравнение (4.28) асимптотически при малых  $C/\Omega$  имеет единственный корень, если только  $\frac{C}{\Omega} > \frac{1}{2}$  лежит в пределах

$$-1 < \tilde{\rho} < \frac{1}{\ln \frac{2\Omega}{c}}$$

(4.30)

При  $\tilde{\rho}$  близких к  $-1$  корень отсвывается от нуля. Его значение равно

$$D = 2c \sqrt{\frac{3}{2}(1+\tilde{\rho})}$$

При увеличении  $\tilde{\rho}$  от  $-1$  до  $0$  корень увеличивается и достигает значения  $2c$ , когда он сливается с непрерывным спектром. При  $\tilde{\rho}$  близких к нулю

$$D = 2c \left(1 - \frac{\pi^2}{8} \tilde{\rho}^4 \ln^2 \frac{2\Omega}{c}\right)$$

При дальнейшем увеличении  $\tilde{\rho}$  от  $0$  до  $(\ln \frac{2\Omega}{c})^{-1}$  корень пробегает отрезок  $(0, 2c)$  в обратном направлении и для  $\tilde{\rho}$  близких к  $(\ln \frac{2\Omega}{c})^{-1}$  имеет вид

$$D = 2c \sqrt{\ln \frac{2\Omega}{c} \left(1 - \tilde{\rho} \ln \frac{2\Omega}{c}\right)}$$

Рассмотренный нами корень возникает от первого множителя в (4.29). Второй множитель может иметь корень только в весьма узкой области изменения значений  $\tilde{\rho}$ .

$$\frac{1}{\ln \frac{2\Omega}{c}} < \tilde{\rho} < \frac{1}{\ln \frac{2\Omega}{c} - 1}$$

которая асимптотически при  $\Omega/c \rightarrow 0$  стягивается в точку. Поэтому рассмотрение этого корня не представляет интереса.

Заметим еще, что если  $\tilde{\rho}$  выходит за пределы (4.30), появляется чисто мнимый корень у секулярного уравнения, свидетельствуя —

щий о неустойчивости основного состояния в этом случае.

Нам остается теперь сделать замечания относительно того, как будет себя вести найденный корень при  $\beta$ , отличных от нуля. Не производя выкладок непосредственно, из рассмотрения секулярных уравнений (4.10), (4.11) можно заключить, что при малых  $\beta$

$$E(p) = \sqrt{D^2 + \alpha p^2 u_F^2}$$

где  $u_F$  — скорость на поверхности Ферми и  $\alpha$  — численный множитель.

В заключение поясним физический смысл найденных поперечных решений. Возьмем физическую величину

$$m \text{rot } \vec{V}(\vec{r}) = \frac{1}{i} \sum_j \left[ \frac{\partial}{\partial z} \delta(\vec{r}_j - \vec{r}) \times \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} \right], \quad (4.31)$$

представляющую собой вихрь поля скоростей  $\vec{V}(\vec{r})$ . В представлении вторичного квантования (4.31) представляется в виде:

$$m \text{rot } \vec{V}(\vec{r}) = \frac{i}{V} \sum_{k, k'} (\hat{a}_{k,+}^{\dagger} a_{k',+}^{\dagger} + \hat{a}_{-k,-}^{\dagger} a_{-k',-}^{\dagger}) e^{i(k-k')\cdot r} [k \times k']$$

Переходя от операторов  $\hat{a}, a$  к операторам  $\hat{\alpha}, \alpha$  посредством  $u, v$  — преобразования, получим

$$\begin{aligned} m \text{rot } \vec{V}(\vec{r}) = & \\ = \frac{i}{V} \sum_{k, k'} M(k, k') (\hat{\alpha}_{k_1}^{\dagger} \alpha_{k_1} - \hat{\alpha}_{k_0}^{\dagger} \alpha_{k'_0}) e^{i(k-k')\cdot r} [k \times k'] + & \\ + \frac{i}{V} \sum_{k, k'} L(k, k') (\alpha_{k_1} \alpha_{k'_0} - \hat{\alpha}_{k_0}^{\dagger} \hat{\alpha}_{k'_1}^{\dagger}) e^{i(k-k')\cdot r} [k \times k'] & \end{aligned} \quad (4.32)$$

Постараемся представить этот оператор с помощью коллективных



бозе-амплитуд  $\beta_q^+(k), \beta_q(k)$ . Легко видеть, что это достигается путем сопоставления оператору (4.32) следующего "модельного" оператора:

$$\text{model } \vec{V}(\vec{z}) = \frac{i}{V} \sum_{q,k} L(k+q, k) \beta_q^+(k) e^{iqz} [k \times q] + \text{conj.} \quad (4.33)$$

Теперь нам остается преобразовать оператор (4.33) к новым бозе-амплитудам, диагонализирующим квадратичную форму (4.2). Будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{model } \vec{V}(\vec{z}) &= \\ &= \frac{i}{2V} \sum_{\mu, q} \xi_{\mu}^{\pm} \left\{ \sum_k L(k+q, k) (\vartheta_q^+(k; \mu) + \vartheta_q^-(k; \mu)) [k \times q] \right\} e^{iqz} + \\ &+ \frac{i}{2V} \sum_{\mu, q} \xi_{\mu} \left\{ \sum_k L(k+q, k) (\vartheta_q^+(k; \mu) - \vartheta_q^-(k; \mu)) [k \times q] \right\} e^{iqz} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Напомним, что новые бозе-амплитуды  $\xi_{\mu}^{\pm}, \xi_{\mu}$  связаны со старыми  $\beta_q^+, \beta_q$  преобразованиями:

$$\beta_q(k) = \sum_{\mu} \left\{ \xi_{\mu} \vartheta_q^-(k; \mu) + \xi_{\mu}^+ \chi_{-q}^-(k; \mu) \right\}$$

Рассмотренные ранее продольные волны согласно (4.24) обращают в нуль суммы в фигурных скобках в (4.34). Совсем не так обстоит дело с поперечными волнами. Ввиду (4.25), выражения в фигурных скобках уже больше не равны нулю в этом случае. Таким образом, можно утверждать, что поперечные коллективные возбуждения представляют собой вихревые образования. По всей видимости их свойства окажутся во многом эквивалентными тем, которые изу-

чались для так называемых ротон в связи с построением микроскопической теории сверхтекучести. Там, однако, не установлено существование специальной ветви спектра, характеризующей эти возбуждения.

## § 5. УЧЕТ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОНАМИ

5.1. Постановка задачи. До сих пор мы рассматривали только взаимодействие электронов с фононами. Кулоновское взаимодействие не вводилось явным образом в гамильтониан.

Приступим теперь к обобщению наших рассуждений для случая более реалистической модели с гамильтонианом вида

$$H = \sum_{k,s} (E(k) - \lambda) a_{ks}^\dagger a_{ks} + \sum_q \omega(q) b_q^\dagger b_q + H_{ph} + H_c \quad (5.1)$$

$$H_{ph} = \sum_{\substack{(k,k',q,s) \\ (k'-k=q)}} g(q) \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} a_{ks}^\dagger a_{k's} b_q + \text{с.п.р.} \quad (5.2)$$

$$H_c = \sum_{\substack{(k_1, k_2, k_1', k_2') \\ (k_1 + k_2 = k_1' + k_2')}} \frac{1}{V} I(k_1, k_2, k_1', k_2') a_{k_1 s_1}^\dagger a_{k_2 s_2}^\dagger a_{k_2' s_2} a_{k_1' s_1} \quad (5.3)$$

функция  $I$  так же, как и  $E(k)$ ,  $\omega(q)$ ,  $g(q)$  предполагается вещественной и инвариантной при отражении импульсов.

В качестве малого параметра возьмем, как и в § 3, величину порядка  $\omega/E_F$ , и в получаемых асимптотических формулах ограничимся главными членами. Допущение о малости  $H_c$  не является необходимым для нашего метода и потому при суммировании диаграмм мы должны будем формально учитывать диаграммы всех порядков по отношению к  $H_c$ .

Кроме того, чтобы максимально упростить результаты вычислений, будем предполагать, что  $u, v$  практически отличаются от своих нормальных значений лишь в весьма узком энергетическом слое около поверхности Ферми. Основываясь на таком допущении,

мы можем удерживать в наших формулах лишь главные члены по отношению к эффективной толщине этого слоя. Заметим, что, как было показано в § 2, эта величина имеет "экспоненциальный" порядок малости  $\omega e^{-\frac{1}{\rho}}$ , если не учитывать кулоновского взаимодействия между электронами.

Поскольку кулоновское взаимодействие может только уменьшать эффективную величину  $\rho$ , сделанное предположение представляется весьма разумным. К тому же, получив в явной форме приближенное уравнение для определения  $u, v$ , мы сможем *post factum* проанализировать вопрос об эффективной ширине того энергетического слоя, в котором  $u, v$  заметно отличаются от своих нормальных значений, а тем самым и вопрос о степени точности сделанного приближения.

Мы будем здесь применять рассуждения § 3 и проведем компенсацию как двухфермионного, так и двухбозонного <sup>диаграмм</sup> графов.

5.2. Условия компенсации и перенормировки. Соведем каноническое преобразование из § 3.1

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k \alpha_{k0} + v_k \alpha_{k1}^+ \\ a_{-k,-} &= u_k \alpha_{k1} - v_k \alpha_{k0}^+ \\ b_q &= \lambda_q \beta_q + \mu_q \beta_{-q}^+ \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $u_k, v_k, \lambda_q, \mu_q$  - вещественные числа, связанные соотношениями  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ ,  $\lambda_q^2 - \mu_q^2 = 1$   $\xi$  и четные относительно  $k$  и  $q$  д.

В преобразованном гамильтониане выделим часть

$$U + H_0 =$$

$$= U + \sum_K \tilde{\epsilon}(k) (\alpha_{k_0}^\dagger \alpha_{k_0} + \alpha_{k_1}^\dagger \alpha_{k_1}) + \sum_q \tilde{\omega}(q) \beta_q^\dagger \beta_q$$

в которой  $U$  представляет энергию основного состояния,  $\tilde{\epsilon}(k), \tilde{\omega}(q)$  - перенормированные энергии фермионных и бозонных возбуждений. Остальные члены отнесем к гамильтониану взаимодействия. Тогда из (5.1) получим

$$H = U + H_0 + H_{int}$$

$$H_{int} = V' + H' + H'' + H_{ph} + H_c \quad (5.5)$$

где

$$V' = \text{const} = 2 \sum_K (E(k) - \lambda) v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 - U$$

$$H' = \sum_K \{ (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\epsilon}(k) \} (\alpha_{k_0}^\dagger \alpha_{k_0} + \alpha_{k_1}^\dagger \alpha_{k_1}) +$$

$$+ 2 \sum_K (E(k) - \lambda) u_k v_k (\alpha_{k_0}^\dagger \alpha_{k_1}^\dagger + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0})$$

$$H'' = \sum_q \{ \omega(q) (\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) \} \beta_q^\dagger \beta_q + \sum_q \omega(q) \lambda_q \mu_q (\beta_q^\dagger \beta_{-q}^\dagger + \beta_q \beta_q)$$

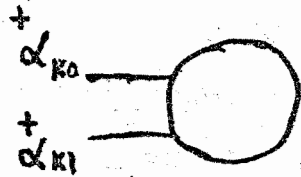
$$H_{ph} = \sum_{\substack{(k, k', q) \\ k' - k = q}} g(q) \left( \frac{\omega(q)}{2V} \right)^{\frac{1}{2}} \{ (\lambda_q + \mu_q) (\beta_q^\dagger + \beta_{-q}) \times$$

$$\times \{ (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) (\alpha_{k_0}^\dagger \alpha_{k_1}^\dagger + \alpha_{k_1} \alpha_{k_0}) +$$

$$+ (u_k u_{k'} - v_k v_{k'}) (\alpha_{k_0}^\dagger \alpha_{k_0} + \alpha_{k_1}^\dagger \alpha_{k_1}) \}$$

и где  $H_c$  представляет выражение (5.3), преобразованное к новым фермионным амплитудам. Приступим теперь к получению основных уравнений принципа компенсации. Приравняем нулю сумму вкладов всех диаграмм типа, изображенных на фиг. 8. Кружком на этом рис. обозначаются сильно связанные графы, которые нельзя разбить на

две части, соединенные только двумя фермионными или только двумя бозонными линиями.



Фиг. 8

Получим

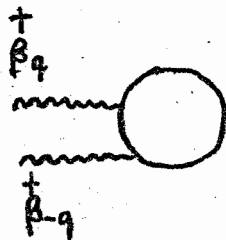
$$2(E(k)-\lambda)u_k v_k + \langle C_v^* \alpha_{k1} \alpha_{k0} H_c C_v \rangle + \sum_{(m>1)} \langle C_v^* \alpha_{k1} \alpha_{k0} R_m(0) C_v \rangle_{\text{связ}} = 0 \quad (5.6)$$

где вообще

$$R_m(E) = (-1)^{m-1} H_{\text{int}} (H_0 - E)^{-1} H_{\text{int}} + \dots + (H_0 - E)^{-1} H_{\text{int}}$$

$C_v$ , как всегда обозначает "вакуумное состояние", в котором все числа заполнения  $\alpha_{k0} \alpha_{k0}$ ,  $\alpha_{k1} \alpha_{k1}$ ,  $\beta_q \beta_q$  равны нулю. Знак "связ" указывает, что здесь учитываются лишь члены, соответствующие выше упомянутым сильно связным диаграммам.

Приравняем далее нулю сумму вкладов всех диаграмм типа рис. 9.



Фиг. 9

Кружком опять обозначим диаграммы, которые нельзя разбить на две части, соединенные только двумя бозонными или только двумя

фермионными линиями.

Получим

$$2\omega(q)\lambda_q\mu_q + \sum_{(m>1)} \langle C_V^* \beta_{-q} \beta_q R_m(0) C_V \rangle_{\mathcal{G}_{\mathbb{Z}^3}} = 0$$

Теперь нам надо будет составить еще уравнения для определения  $U$ ,  $\tilde{E}(k)$  и  $\tilde{\omega}(q)$ . Они имеют вид

$$U = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 + \sum_q \omega(q) \mu_q^2 + \sum_{(m>1)} \langle C_V^* R_m(0) C_V \rangle_{\mathcal{G}_{\mathbb{Z}^3}} \quad (5.8)$$

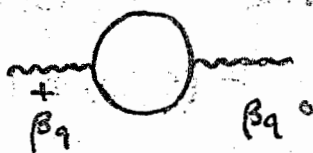
$$(E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) - \tilde{E}(k) + \langle C_V^* \alpha_{k0} H_C \alpha_{k0}^+ C_V \rangle_{\mathcal{G}_{\mathbb{Z}^3}} + \sum_{(m>1)} \langle C_V^* \alpha_{k0} R_m(\tilde{E}(k)) \alpha_{k0}^+ C_V \rangle_{\mathcal{G}_{\mathbb{Z}^3}} = 0 \quad (5.9)$$

$$\omega(q)(\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) + \sum_{(m>1)} \langle C_V^* \beta_q R_m(\tilde{\omega}(q)) \beta_q^+ C_V \rangle_{\mathcal{G}_{\mathbb{Z}^3}} = 0 \quad (5.10)$$

Уравнения (5.9) и (5.10) представляют собой не что иное, как условия аннулирования сумм вкладов от собственной энергетических диаграмм, изображенных на фиг. IО и II.



Фиг. IО



Фиг. II

т.е. условия отсутствия радиационных поправок к перенормированным энергиям  $\tilde{E}(k)$  и  $\tilde{\omega}(q)$ .

5.3. Переход к "зависящей от времени" формулировке. Удобно теперь перейти к более компактной "зависящей от времени" форме записи, используя формулировку, подобную той, которая обычно применяется в ковариантной квантовой теории поля (и на возможность применения которой в квантовой статистике недавно было указано Голдстоном /16/. Заметим для этого, что сумма

$$R(E) = \sum_{m \geq 1} R_m(E) = H_{int} + H_{int} \frac{1}{E - H_0} H_{int} + \dots \quad (5.11)$$

с помощью  $S$  - матрицы

$$S = S_{-\infty}^0 = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right) \quad (5.12)$$

может быть представлена в компактной форме. В самом деле, пусть  $C_E$  - собственное состояние оператора  $H_0$  с собственным значением  $E$ , т.е.

$$H_0 C_E = E C_E$$

Тогда с помощью соотношения

$$R C_E = R(E) C_E$$

можно ввести оператор  $R$ , имеющий вид

$$R = H_{int} S = T \left( H_{int}(0) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right) \quad (5.13)$$

В формулах (5.12) и (5.13)  $H_{int}(\tau)$  - гамильтониан  $H_{int}$  в представлении взаимодействия

$$H_{int}(\tau) = e^{-i H_0 \tau} H_{int} e^{i H_0 \tau}$$

Используя введенный оператор  $R$  уравнения (5.6.), (5.7.), (5.8.), (5.9) и (5.10), запишем в виде



$$\langle \alpha_{k_1} \alpha_{k_0} R \rangle_c = 0 \quad (5.14)$$

$$\langle \beta_{-1} \beta_1 R \rangle_c = 0 \quad (5.15)$$

$$U = \langle R \rangle_c \quad (5.16)$$

$$\langle \alpha_{k_0} R \alpha_{k_0}^+ \rangle_c = 0 \quad (5.17)$$

$$\langle \beta_1 R \beta_1^+ \rangle_c = 0 \quad (5.18)$$

где мы использовали более краткое обозначение для имеющегося здесь усреднения.

Ниже окажется также удобным использовать понятие вариационной производной от  $R$  по операторам полей. Мы введем их обычным образом<sup>х)</sup>. Оговорим здесь особо лишь свойства производных по ~~формам~~<sup>ферми</sup>-операторам. Производные  $\delta/\delta a$  и  $\delta/\delta \alpha$  будем всегда считать правыми производными. Например,

$$\frac{\delta C}{\delta a_q(t)} = \lim_{\eta \rightarrow 0} A_q(t, a+\eta).$$

где  $A_q$  - коэффициент главной части приращения

$$\delta C(a+\eta) = \sum_q \int A_q(t, a+\eta) \delta \eta_q(t) dt \quad .$$

<sup>х)</sup> Подобно тому как это сделано, например, в § 47.1 монографии /17/.

Производные  $\delta/\delta\alpha^+$  и  $\delta/\delta\alpha^+$  будем по определению считать левыми производными:

$$\frac{\delta C}{\delta\alpha_q^+(t)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} B_q(t, \alpha + \xi); \quad \delta C^+(\alpha + \xi) = \sum_q \int \delta \xi_q(t) B_q(t, \alpha + \xi) dt$$

Напомним еще, что "ферми-производная слева" совпадает с производной справа, когда функционал  $C$  является "полиномом" нечетной степени от ферми-операторов и отличается от нее знаком, когда  $C$  — "полином" четной степени. Уравнения (5.14), (5.15), (5.17) и (5.18) представим теперь в виде

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta\alpha_{k1}^+(t) \delta\alpha_{k0}^+(t')} \right\rangle_c [\alpha_{k1}, \alpha_{k1}^+(t)]_+ [\alpha_{k0}, \alpha_{k0}^+(t')]_+ dt dt' = 0$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta\beta_q^+(t) \delta\beta_q^+(t')} \right\rangle_c [\beta_{-q}, \beta_{-q}^+(t)]_- [\beta_q, \beta_q^+(t')]_- dt dt' = 0$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta\alpha_{k0}^+(t) \delta\alpha_{k0}^+(t')} \right\rangle_c [\alpha_{k0}, \alpha_{k0}^+(t)]_+ [\alpha_{k0}(t'), \alpha_{k0}^+]_+ dt dt' = 0$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta\beta_q^+(t) \delta\beta_q^+(t')} \right\rangle_c [\beta_q, \beta_q^+(t)]_- [\beta_q(t'), \beta_q^+]_- dt dt' = 0$$

Здесь  $\alpha(t), \alpha^+(t), \beta(t), \beta^+(t)$   
взаимодействия.

— операторы в представлении

$$\alpha_{k_0}(t) = \alpha_{k_0} e^{-i\tilde{\epsilon}_k(t)} \quad + \quad \alpha_{k_1}(t') = \alpha_{k_1} e^{i\tilde{\epsilon}_k(t')}$$

$$\beta_q(t) = \beta_q e^{-i\tilde{\omega}(q)t} \quad + \quad \beta_q(t') = \beta_q e^{i\tilde{\omega}(q)t'}$$

(5.19)

Вычисляя коммутаторы, находим

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \alpha_{k_1}^+(t) \delta \alpha_{k_0}^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}_k(t+t')} dt dt' = 0 \quad (5.20)$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \alpha_{k_0}^+(t) \delta \alpha_{k_0}^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}_k(t-t')} dt dt' = 0 \quad (5.21)$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \beta_{-q}^+(t) \delta \beta_q^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t+t')} dt dt' = 0 \quad (5.22)$$

$$\int \left\langle \frac{\delta^2 R}{\delta \beta_q^+(t) \delta \beta_q^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} dt dt' = 0 \quad (5.23)$$

Заметим, что при усреднении в формулах (5.20)–(5.23) и ниже в соответствии с ранее сказанным учитываются лишь сильно связанные диаграммы. Ввиду этого формулы (5.20)–(5.23) можно несколько преобразовать, выписав явно результат вЂрирования слагаемых  $H'(0)$  и  $H''(0)$  из гамильтониана  $H_{int}(0)$ . Получаем этим путем

$$2(E(k)-\lambda)u_k v_k + \quad (5.24)$$

$$+ \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \alpha_{k_1}^+(t) \delta \alpha_{k_0}^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}_k(t+t')} dt dt' = 0$$

$$(E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\epsilon}(k) -$$

$$- \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \alpha_{k_0}^+(t) \delta \alpha_{k_0}^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} dt dt' = 0$$

(5.25)

$$\omega(q) \lambda_q \mu_q +$$

$$+ \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \beta_{-q}^+(t) \delta \beta_{-q}^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t+t')} dt dt' = 0$$

(5.26)

$$\omega(q)(\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) -$$

$$- \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \beta_q^+(t) \delta \beta_q^+(t')} \right\rangle_c e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} dt dt' = 0$$

(5.27)

Здесь

$$R' = T \left( (H_c(\omega) + H_{ph}(\omega)) e^{-i \int_{-\infty}^0 H_{int}(\tau) d\tau} \right)$$

(5.28)

5.4. Окончательная форма уравнения компенсации электронных диаграмм. Займемся теперь преобразованием уравнения компенсации (5.24). Прежде всего произведем в нем переход от  $\alpha$ -представления к  $a$ -представлению. В качестве первого шага для этого воспользуемся вытекающими из (5.4) формулами

$$\frac{\delta}{\delta \alpha_{k_0}^+(t)} = u_k \frac{\delta}{\delta \alpha_{k,+}^+(t)} - v_k \frac{\delta}{\delta a_{-k,-}(t)}$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha_{k_1}^+(t)} = u_k \frac{\delta}{\delta a_{-k,-}(t)} + v_k \frac{\delta}{\delta a_{k,+}(t)}$$

Введенные в этих формулах операторы  $a_{k,\pm}(t)$  и  $a_{k,\pm}^+(t)$  уже не имеют простой временной зависимости типа (5.19). Однако в предельном случае

$$u_k = \theta_G(k), \quad v_k = \theta_F(k) \quad (5.29)$$

Эта зависимость может быть выражена в виде

$$\left. \begin{aligned} a_{k,\pm}(t) &= a_{k,\pm} e^{-i\tilde{\epsilon}(k)t} \\ a_{k,\pm}^+(t) &= a_{k,\pm}^+ e^{i\tilde{\epsilon}(k)t} \end{aligned} \right\} \text{при } k > k_F$$

$$\left. \begin{aligned} a_{k,\pm}(t) &= \pm a_{k,\mp}^+ e^{i\tilde{\epsilon}(k)t} \\ a_{k,\pm}^+(t) &= \pm a_{-k,\mp}^- e^{-i\tilde{\epsilon}(k)t} \end{aligned} \right\} \text{при } k < k_F$$

где  $a_{k\sigma}^+$  и  $a_{k\sigma}^-$  - операторы рождения и уничтожения "дырок" в сфере Ферми. Здесь фактически введено еще одно новое представление электронных операторов, отличающееся от исходного  $a$ -представления переименованием операторов уничтожения и рождения внутри сферы Ферми

$$\left. \begin{aligned} a_{k,\pm} &= \pm a_{-k,\mp}^+ \\ a_{k,\pm}^+ &= \pm a_{-k,\mp}^- \end{aligned} \right\} \text{при } k < k_F \quad (5.30)$$

Как видно, это представление, которое мы будем иногда именовать  $a'$ -представлением, соответствует  $a$ -представлению с предельными тривиальными значениями величин  $u_k, v_k$  (5.20). Получаем этим путем из (5.24)

$$2(E(k) - \lambda) u_k v_k +$$

$$+ u_k v_k \int dt dt' e^{i\tilde{E}(k)(t+t')} \left\{ \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k,+}(t) \delta a_{k,+}^+(t')} \right\rangle_c - \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k,-}^+(t) \delta a_{k,-}(t')} \right\rangle_c \right\} = \int dt dt' e^{i\tilde{E}(k)(t+t')} \left\{ u_k^2 \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k,+}^+(t) \delta a_{k,-}^+(t')} \right\rangle_c + v_k^2 \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k,+}(t) \delta a_{k,-}(t')} \right\rangle_c \right\} \quad (5.31)$$

Воспользуемся теперь допущением о том, что ширина энергетической полосы, в которой  $u_k$  и  $v_k$  заметно отличаются от своих "нормальных" значений (5.29), является весьма малой величиной и в соответствии с этим оставим в уравнении (5.31) лишь главные члены.

Так, в левой части (5.31) в коэффициенте при произведении  $u v$ , стремящемся к нулю при удалении от поверхности Ферми, заменим  $u$  и  $v$  их значениями (5.29). Это сведется к тому, что матричные элементы вторых вариационных производных будут браться не по состоянию  $\epsilon_v$ , а по состояниям  $\epsilon_0$  - ферми-сфере, соответствующей "вакуумному состоянию невзаимодействующих электронов".

Подобная замена  $\epsilon_v$  на  $\epsilon_0$  в правой части (5.31) обратила бы ее в нуль. Поэтому, прежде чем делать соответствующий предельный переход, коэффициенты при  $u^2$  и  $v^2$  следует слегка преобразовать, чтобы выделить соответствующие малые величины порядка  $u v$ . Возьмем, например, коэффициент при  $u_k^2$  и представим его в виде<sup>x)</sup>

x) Здесь использовано положение, известное в квантовой теории поля под названием "обобщенной теоремы Вика" (см. /17/, § 34.2)

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \bar{a}_{k,+}^{\dagger}(\tau) \delta \bar{a}_{-k,-}^{\dagger}(\tau)} \right\rangle_c = \\
 & = - \sum_{k'} \int \left\langle \frac{\delta^4 R'}{\delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau) \delta \bar{a}_{k,+}^{\dagger}(\tau) \delta \bar{a}_{-k,-}^{\dagger}(\tau)} \right\rangle_c \overline{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau)} d\tau d\tau'
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Здесь

$$\overline{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau)} \equiv \langle T a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau) \rangle_c$$

-хронологическое спаривание, которое в  $a$ -представлении равно нулю. Однако, в  $\alpha$ -представлении, в соответствии с (5.4) оно имеет вид

$$\overline{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} = -u_{k'} v_{k'} e^{-i\tilde{\epsilon}(k')|\tau-\tau'|} \tag{5.33}$$

т.е. имеет "первый порядок малости по  $uv$ ". Переходя теперь к пределу  $\alpha \rightarrow a$  в первом множителе под интегралом (5.32) и замечая, что под знаком четвертой вариационной производной  $R'$  можно заменить на  $R$ , находим

$$\begin{aligned}
 & \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \bar{a}_{k,+}^{\dagger}(\tau) \delta \bar{a}_{-k,-}^{\dagger}(\tau)} \right\rangle_c = \\
 & = \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau) \delta \bar{a}_{k,+}^{\dagger}(\tau) \delta \bar{a}_{-k,-}^{\dagger}(\tau)} \right\rangle_c e^{-i\tilde{\epsilon}(k')|\tau-\tau'|} d\tau d\tau'
 \end{aligned}$$

Примем теперь еще во внимание, что отклонения  $u_k^2$  и  $v_k^2$  от их предельных значений (5.29) практически исчезают вне узкого

слоя около поверхности Ферми. В результате уравнение (5.31) можем представить в виде

$$2\zeta(k) u_k v_k = (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} Q(k, k') \quad (5.34)$$

где

$$\zeta(k) = E(k) - \lambda - \frac{1}{2} \int dt dt' e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t+t')} \left\{ \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \tilde{a}_{k,+}^+(t) \delta \tilde{a}_{k,+}(t)} \right\rangle_0 + \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \tilde{a}_{k,-}^+(t) \delta \tilde{a}_{k,-}(t)} \right\rangle_0 \right\} \quad (5.35)$$

$$Q(k, k') = \begin{cases} = \int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \tilde{a}_{k',+}^+(z) \delta \tilde{a}_{-k',-}(z) \delta \tilde{a}_{k,+}^+(t) \delta \tilde{a}_{-k,-}(t)} \right\rangle_0^* \\ \quad \times e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t+t') - i\tilde{\epsilon}(k')|z-t|} dt dt' dz dt' \quad \text{при } k > k_F \\ \\ = \int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \tilde{a}_{k',+}^+(z) \delta \tilde{a}_{-k',-}(z) \delta \tilde{a}_{k,+}(z) \delta \tilde{a}_{-k,-}(z)} \right\rangle_0^* \\ \quad \times e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t+t') - i\tilde{\epsilon}(k')|z-t|} dt dt' dz dt' \quad \text{при } k < k_F \end{cases} \quad (5.36)$$

Напомним, что в соответствии со смыслом предельного перехода  $\tilde{a} \rightarrow a$  функционал  $R$ , входящий в уравнения (5.35) и (5.36) зависит от гамильтониана  $H_{int}$ , полученного из формул (5.8) путем замены  $u_k$  и  $v_k$  их предельными значениями (5.29). Так, например,



$$H' = \sum_{(k > k_F, s)} (E(k) - \lambda - \bar{\epsilon}(k)) a_{ks}^+ a_{ks} + \sum_{(k' < k_F, s')} (-E(k') + \lambda - \bar{\epsilon}(k')) a_{k's'} a_{k's'}^+$$

$$H_{ph} = \sum_{\substack{(k, k', q, s) \\ (k' - k = q)}} g(q) \left( \frac{\omega(q)}{2v} \right)^{\frac{1}{2}} a_{ks}^+ a_{k's'} (\beta_q^+ + \beta_{-q}) (\lambda_q + \mu_q)$$

Уравнение (5.34) является уравнением для определения  $u$  и  $v$ , связанных между собой соотношением  $u^2 + v^2 = 1$ . Удобно поэтому произвести в нем замену переменных и преобразовать его к уравнению, в которое явно входит одна неизвестная величина.

Положим для этого

$$c(k) = \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} Q(k, k') \quad (5.37)$$

Разрешая теперь (5.29) относительно  $u$  и  $v$ , находим

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{c^2(k) + \bar{\epsilon}^2(k)}} \right\} \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{c^2(k) + \bar{\epsilon}^2(k)}} \right\} \quad (5.38)$$

а также

$$u_k v_k = \frac{1}{2} \frac{c(k)}{\sqrt{c^2(k) + \bar{\epsilon}^2(k)}} \quad (5.39)$$

Уравнение (5.34) тем самым приводится к форме

$$c(k) = \frac{1}{2} \sum_{k'} Q(k, k') \frac{c(k')}{\sqrt{c^2(k') + \bar{\epsilon}^2(k')}} \quad (5.40)$$

Как указывалось, целью настоящего параграфа является последовательный учет влияния кулоновского взаимодействия. Нам следует поэтому изучить теперь структуру выражений  $\xi(k)$  и  $Q(k, k')$  для рассматриваемого случая. Однако, мы несколько отложим это исследование и установим сейчас связь между энергией основного состояния и решением уравнения (5.40).

5.5. Энергия основного состояния и энергия однофермионного возбуждения. В соответствии с (5.16) энергия основного состояния выражается формулой

$$U = \langle R \rangle_c$$

Мы будем сейчас преобразовывать это выражение методом, аналогичным тому, который использовался в § 5.4. при получении формулы (5.36). Используя обобщенную теорему Вика, можем написать

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_c &= 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 - \\ &- \sum_{k_s} \int dt dt' \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k_s}^+(t) \delta a_{k_s}(t')} \right\rangle_c \overbrace{a_{k_s}(t) a_{k_s}(t')}^+ + \\ &+ \sum_{k, k'} \int dt dt' \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k,+}^+(t) \delta a_{-k,-}^+(t) \delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_c \times \\ &\times \overbrace{a_{k,+}(t) a_{-k,-}(t)}^+ \overbrace{a_{k',+}(\tau) a_{-k',-}(\tau')} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Выписывая явные выражения для входящих в (5.41) хронологических спариваний

$$\overline{a_{k,+}(t) a_{k,+}(t')} = \begin{cases} v_k^2 e^{-i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} & t > t' \\ -u_k^2 e^{-i\tilde{\epsilon}(k)(t'-t)} & t' < t \end{cases}$$

$$\overline{a_{k,+}(t) a_{-k,-}(t')} = u_k v_k e^{-i\tilde{\epsilon}(k)|t-t'|}$$

$$\overline{a_{k',+}(t) a_{-k',-}(t')} = -u_{k'} v_{k'} e^{-i\tilde{\epsilon}(k')|t-t'|}$$

Перейдем к пределу (5.29) в матричных элементах вариационных производных. Получим

$$\begin{aligned} \langle R \rangle_c &= 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2 - \sum_{k,s} v_k^2 \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{ks}^+(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} dt dt' + \\ &+ \sum_{k,s} u_k^2 \int_{t' > t} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{ks}^+(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\tilde{\epsilon}(k)(t'-t)} dt dt' + \\ &+ \sum_{k,k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} \int dt dt' dt' dt' e^{i\tilde{\epsilon}(k)|t-t'| - i\tilde{\epsilon}(k')|t'-t'|} \times \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k,+}^+(t) \delta a_{-k,-}^+(t') \delta a_{k',+}(t) \delta a_{-k',-}(t')} \right\rangle_0$$

При  $u$  и  $v$ , отличных от их нормальных значений, эта формула представляет собой энергию основного сверхпроводящего состояния  $U_S$ . При  $u_k = \theta_G(k)$ ,  $v_k = \theta_F(k)$  выражение (5.42) описывает энергию основного нормального состояния  $U_n$ . Беря разность этих выражений, имеем

$$U_S - U_n = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) (u_k^2 - \theta_F(k)) -$$

82.

$$- \sum_{k, s} (u_k^2 - \theta_F(k)) \int_{t > t'} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\tilde{E}(k)(t-t')} dt dt' +$$

$$+ \sum_{k, s} (u_k^2 - \theta_F(k)) \int_{t' > t} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\tilde{E}(k)(t'-t)} dt dt' -$$

$$- \sum_{k, k'} u_k u_{k'} u_k u_{k'} \int e^{-(\tilde{E}(k)|t-t'| - i\tilde{E}(k)|\tau-\tau'|)} dt dt' d\tau d\tau' \times$$

$$\times \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k,+}^{\dagger}(t) \delta a_{-k,-}^{\dagger}(t') \delta a_{k',+}(\tau) \delta a_{-k',-}(\tau')} \right\rangle_0$$

(5.)

Заметим теперь, что в соответствии с (5.38)

$$\begin{aligned} u_k^2 - \theta_F(k) &= - \{u_k^2 - \theta_G(k)\} = \\ &= \frac{\theta_G(k)}{2} \left\{ 1 - \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} - \frac{\theta_F(k)}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi(k)}{\sqrt{C^2(k) + \xi^2(k)}} \right\} \end{aligned}$$

и что суммирование по  $k$  и  $k'$  в (5.43) фактически проводится по узкому "слою размытости" около поверхности Ферми. В этом слое энергии  $\tilde{E}(k')$  и  $\tilde{E}(k)$  являются малыми и поэтому приближенно

$$2(E(k) - \lambda) - \sum_s \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{ks}(t) \delta a_{ks}(t')} \right\rangle_0 e^{-i\tilde{E}(k)|t-t'|} dt dt' = 2\xi(k)$$

а также

$$\int \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta \alpha_{k,+}(t) \delta \alpha_{k,-}(t') \delta a_{k',+}(t) \delta a_{k',-}(t')} \right\rangle_0 \times$$

$$\times e^{i\tilde{\epsilon}(k)|t-t'| - i\tilde{\epsilon}(k')|t-t'|} dt dt' dt dt' = Q(k, k')$$

Собирая результаты, формулу (5.40) представим в виде

$$U_S - U_n = \sum_k \theta_G(k) \tilde{\zeta}(k) \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\zeta}^2(k)}} \right\} -$$

$$- \sum_k \theta_F(k) \tilde{\zeta}(k) \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\zeta}^2(k)}} \right\} - \sum_{k, k'} u_k v_k u_{k'} v_{k'} Q(k, k')$$

Преобразуя последнее слагаемое правой части с помощью формул (5.37) и (5.39) получаем окончательно

$$U_S - U_n = - \frac{1}{2} \sum_k \sqrt{c^2(k) + \tilde{\zeta}^2(k)} \times$$

$$\times \left\{ \theta_G(k) \left( 1 - \frac{\tilde{\zeta}(k)}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\zeta}^2(k)}} \right)^2 + \theta_F(k) \left( 1 + \frac{\tilde{\zeta}(k)}{\sqrt{c^2(k) + \tilde{\zeta}^2(k)}} \right)^2 \right\}$$

Перейдем к анализу энергетического спектра  $\tilde{\epsilon}(k)$  одно-фермионных возбуждений для сверхпроводящего состояния. Величина "перенормированной энергии"  $\tilde{\epsilon}$  определяется уравнением (5.25), которое имеет вид

$$(E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) - \tilde{\epsilon}(k) -$$

$$- \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \alpha_{k_0}(t) \delta \alpha_{k_0}(t')} \right\rangle_0 e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} dt dt' = 0.$$

Совершая здесь в последнем члене преобразование типа преобразования от (5.24) к (5.34), получаем

$$\tilde{\epsilon}(k) = u_k^2 \epsilon_1(k) + v_k^2 \epsilon_2(k) + u_k v_k \epsilon_3(k) \quad (5.44)$$

где

$$\epsilon_1(k) = E(k) - \lambda - \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{k,+}^+(t) \delta a_{k,+}^-(t')} \right\rangle_0 e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t-t')} dt dt' \quad (5.45)$$

$$\epsilon_2(k) = -E(k) + \lambda + \int \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta a_{-k,-}^+(t') \delta a_{-k,-}^-(t)} \right\rangle_0 e^{i\tilde{\epsilon}(t-t')} dt dt'$$

$$\epsilon_3(k) = \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \int e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t-t) - i\tilde{\epsilon}(k')(t'-t')} dt dt' dz dz' \quad (5.46)$$

$$\times \left\{ \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k,+}^+(t) \delta a_{-k,-}^-(t') \delta a_{k,+}^-(t) \delta a_{-k,-}^+(t')} \right\rangle_0 + \left\langle \frac{\delta^4 R}{\delta a_{k,+}^-(t') \delta a_{-k,-}^+(t) \delta a_{k,+}^+(t) \delta a_{-k,-}^-(t')} \right\rangle_0 \right\} \quad (5.47)$$

Заметим, что выражение  $\epsilon_3(k)$  входит в (5.44) с коэффициентом  $u_k v_k$ , который не является малым по сравнению с единицей лишь в малой окрестности поверхности Ферми. Поэтому, в пределе малых  $\tilde{\epsilon}(k)$ ,  $\tilde{\epsilon}(k')$  в соответствии с (5.36) и (5.37) имеем

$$\begin{aligned} u_k v_k \epsilon_3(k) &= 2 u_k v_k \sum_k Q(k, k') u_{k'} v_{k'} = \\ &= 2 C(k) u_k v_k = \frac{c^2(k)}{\sqrt{c^2(k) + \bar{z}^2(k)}} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение (5.44) в малой окрестности поверхности Ферми, когда  $\tilde{\epsilon}(k)$  мало. С учетом симметрии относительно перестановки спинов в пределе малого  $\tilde{\epsilon}(k)$  из (5.35), (5.45) и (5.46) вытекает, что

$$\epsilon_1(k) = -\epsilon_2(k) = \zeta(k)$$

Замечая еще, что согласно (5.34) на самой поверхности Ферми, когда  $u_k^2 = v_k^2 = 1/2$ , величина  $\zeta(k_F)$  обращается в нуль, получаем из (5.44)

$$\tilde{\epsilon}(k_F) = C(k_F)$$

Таким образом, энергии возбужденных состояний отделены от энергии основного состояния щелью

$$C(k_F) = \Delta$$

5.6. Преобразование ядра  $Q(k, k')$ . Теперь следует принять во внимание, что в соответствии с проведенной компенсацией фононных диаграмм типа фиг. 9, функционал  $R$  зависит от  $g^2$  лишь через малый параметр  $g^2 \frac{\tilde{\epsilon}}{E_F}$ . Ввиду этого в левых частях уравнений (5.35) и (5.36) можно провести разложение по степеням  $g^2$  и ограничиться двумя старшими членами, т.е. членами нулевого и первого порядка по  $g^2$ . Удобно разложить по степеням оператор  $R$

$$R = R_0 + R_1 g^2 + \dots$$

Член  $R_0$  соответствует  $R$  при  $g = 0$ , т.е.  $H_0$  с исключенным слагаемым  $H_1$ . Ясно также, что в силу условия связности оператора  $R$  в  $R_0$  не будет давать вклада и  $H''$ . Иными сло-

вами

$$R_c^0 = T \left( H_c(\omega) e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\tau) d\tau} \right) \quad (5.48)$$

где

$$\tilde{H} = U' + H' + H_c \quad (5.49)$$

Член  $R_{ph}$  может быть представлен в виде

$$R_{ph} = R' + R'' \quad (5.50)$$

где

$$R' = -i T \left( H_{ph}(\omega) \int_{-\infty}^0 dz' H_{ph}(\tau') e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\tau) d\tau} \right)$$

$$R'' = (-i)^2 T \left( H_c(\omega) \int_{-\infty}^0 H_{ph}(\tau') dz' \int_{-\infty}^0 H_{ph}(\tau'') dz'' e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\tau) d\tau} \right)$$

причём

$$\tilde{H} = \tilde{H} + H''$$

Роль  $H''$ , стоящего в выражениях для  $R'$  и  $R''$  сводится к компенсации радиационных поправок в единственную внутреннюю фононную линию. В силу условия ренормировки энергии фонона (5.10) эти поправки равны нулю, вследствие чего  $H''$  в этих выражениях можно опустить. Таким образом

$$R' = -i T \left( H_{ph}(\omega) \int_{-\infty}^0 d\theta H_{ph}(\theta) e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\theta') d\theta'} \right) \quad (5.51)$$



$$R' = (-i)^2 T \left( H_c(0) \int_{-\infty}^0 d\theta H_{ph}(\theta) \int_{-\infty}^0 d\theta' H_{ph}(\theta') e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\theta'') d\theta''} \right) \quad (5.52)$$

где  $\tilde{H}$  определяется формулой (5.49).

Не составляет труда произвести усреднение по вакууму фононов в выражениях (5.51) и (5.52). Получаем тогда

$$R' = -i \sum_{\substack{(l, l', p, p', s, \sigma) \\ l' - l = p' - p = q}} \frac{q^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \times \int_{-\infty}^0 d\theta e^{i\tilde{\omega}(q)\theta} T \left( a_{ps}^{\dagger}(\theta) a_{ps}(\theta) a_{l\sigma}^{\dagger}(\theta) a_{l'\sigma}(\theta) e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\theta'') d\theta''} \right) \quad (5.53)$$

$$R'' = - \sum_{\substack{(l, l', p, p', s, \sigma) \\ l' - l = p' - p = q}} \frac{q^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{2V} \times \int_{-\infty}^0 d\theta \int_{-\infty}^0 d\theta' e^{i\tilde{\omega}(q)(\theta' - \theta)} T \left( \tilde{H}(0) a_{ps}^{\dagger}(\theta) a_{ps}(\theta) a_{l\sigma}^{\dagger}(\theta) a_{l'\sigma}(\theta) e^{-i \int_{-\infty}^0 \tilde{H}(\theta'') d\theta''} \right) \quad (5.54)$$

Можно провести еще один этап упрощения выражений (5.53) и (5.54). Для пояснения идеи этих упрощений необходимо обратиться к выражениям  $Q(k, k')$  в целом, полученным путем явного выполнения интеграций по временным переменным в правых частях формулы (5.36). Для описания полученных таким образом "не зависящих от времени" выражений удобно обратиться к графическому описанию. Для этой цели мы прибегнем к диаграммам типа Гугенголца<sup>19/1/</sup>. При этом нам

будет удобно проследить их связь с обычными "зависящими от времени" диаграммами типа используемых в квантовой теории поля диаграмм Фейнмана. Эту связь для наглядности мы проиллюстрируем сперва на простейших примерах.

Рассмотрим для этой цели нижние члены разложения выражения (5.36) в ряд по степеням кулоновского взаимодействия. Для этой цели исследуем выражение (5.53) для  $R'$ . Учитывая, что в (5.36) нам потребуется четвертая вариационная производная от  $R'$ , проведем в (5.53) некоторые операции спаривания так, чтобы в каждом члене разложения неспаренными оставались по два оператора рождения  $\hat{a}^\dagger$  и по два оператора уничтожения  $\hat{a}$ . Получаем этим путем

$$\begin{aligned}
 R' = & -i \sum \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_1 + \lambda_2)^2}{2V} \int_{-\infty}^0 d\theta e^{i\theta \tilde{\omega}(q)} \times \\
 & \times \left\{ \hat{a}_{p_1}^\dagger(\theta) \hat{a}_{p_2}^\dagger(\theta) \hat{a}_{q_1}(\theta) \hat{a}_{q_2}(\theta) - \frac{i}{V} \sum I(k_1, k_2, k_1', k_2') \int_{-\infty}^0 d\theta' \times \right. \\
 & \times \left[ T \left( \hat{a}_{p_1}^\dagger(\theta) \hat{a}_{p_2}^\dagger(\theta) \hat{a}_{q_1}^\dagger(\theta') \hat{a}_{q_2}^\dagger(\theta') \hat{a}_{k_1}(\theta') \hat{a}_{k_2}(\theta') \hat{a}_{k_1'}(\theta') \hat{a}_{k_2'}(\theta') \right) + \right. \\
 & + T \left( \hat{a}_{p_1}^\dagger(\theta) \hat{a}_{p_2}^\dagger(\theta) \hat{a}_{q_1}^\dagger(\theta) \hat{a}_{q_2}^\dagger(\theta) \hat{a}_{k_1}(\theta') \hat{a}_{k_2}(\theta') \hat{a}_{k_1'}(\theta') \hat{a}_{k_2'}(\theta') \right) + \\
 & + T \left( \hat{a}_{p_1}^\dagger(\theta) \hat{a}_{p_2}^\dagger(\theta) \hat{a}_{q_1}^\dagger(\theta) \hat{a}_{q_2}^\dagger(\theta) \hat{a}_{k_1}(\theta') \hat{a}_{k_2}(\theta') \hat{a}_{k_1'}(\theta') \hat{a}_{k_2'}(\theta') \right) + \\
 & \left. \left. \dots \right] + \dots \right\}
 \end{aligned}
 \tag{5.55}$$

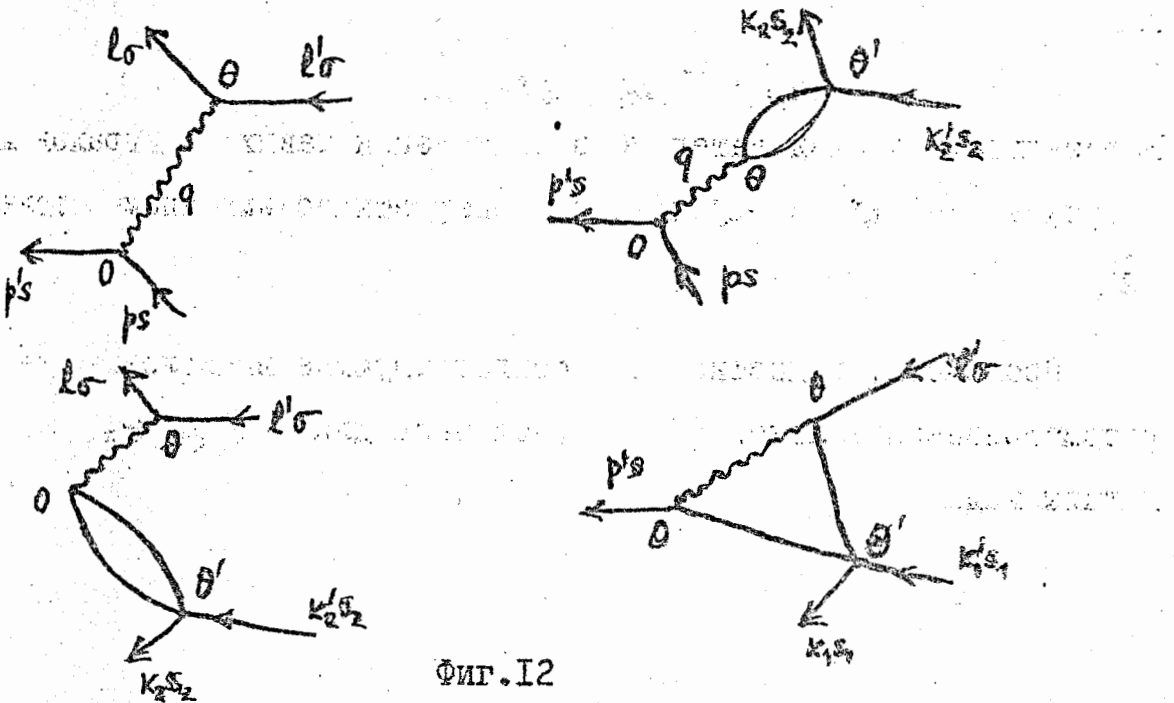
Сумма в (5.55) распространяется на все возможные члены с двумя электронными спариваниями

$$\begin{aligned} \overbrace{a_{ks}(\tau) a_{k's'}(\tau')}^+ &= - \overbrace{a_{k's'}(\tau') a_{ks}(\tau)}^+ = \\ &= \frac{\delta_{kk'} \delta_{ss'}}{L} \int (\tau - \tau' | \bar{\Sigma}(k)) \end{aligned}$$

где

$$\bar{\Sigma}(\tau | \varepsilon) = \begin{cases} \bar{\Sigma}^+(\tau | \varepsilon) = i\theta(\tau) e^{-i\varepsilon\tau} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iE\tau}}{E - \varepsilon + i0} dE \quad \text{при } k > k_F \\ \bar{\Sigma}^-(\tau | \varepsilon) = -i\theta(-\tau) e^{i\varepsilon\tau} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iE\tau}}{E - \varepsilon - i0} dE \quad \text{при } k < k_F \end{cases}$$

Слагаемым выражения (5.55) могут быть сопоставлены Фейнмановские диаграммы, изображенные на рис. I2.



Фиг. I2

В процессе вычисления 4-ой вариационной производной импульсам и спинам внешних линий диаграмм сопоставляются импульсы  $\pm k, \pm k'$  и спины  $\pm \lambda$ , соответствующие аргументам в (5.36), а временным переменным  $\theta, \theta', \theta'', \dots$  сопоставляются  $t, t', t'', \dots$ .

Рассмотрим теперь процедуру вычисления интегралов по временным переменным, в результате которой для  $Q(k, k')$  получаются выражения, содержащие произведения энергетических знаменателей. Благодаря тому, что все зависимости от временных переменных имеют простой экспоненциальный характер, интегралы по этим переменным сводятся к формулам типа

$$i \int_{-\infty}^{t_{n-1}} e^{it_n Z_n} dt_n = \frac{e^{it_{n-1} Z_n}}{Z_n}$$

где  $Z_n$  — линейная форма вида

$$\tilde{\omega}(k_1) + \tilde{\epsilon}(k_2) + \tilde{\epsilon}(k_3) + \dots$$

или

$$\tilde{\epsilon}(k_1) + \tilde{\epsilon}(k_2) + \tilde{\epsilon}(k_3) + \dots$$

В результате последовательного вычисления таких интегралов мы получаем для  $Q$  сумму членов с энергетическими знаменателями  $Z_i$ .

Производя, в частности, соответствующие вычисления для рассматриваемых членов (5.55), получаем для  $Q(k, k')$  вклады вида

$$Q'_{ph}(k, k') = \frac{g^2(q)\omega(q)(\lambda_q + \mu_q)^2}{[\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')]V} +$$

$$+ \frac{g^2(q)\omega(q)(\lambda_q + \mu_q)^2}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \sum \frac{I(\ell', -k, -k', \ell) + I(\ell', k, k', \ell)}{2V^2} \times$$

$$\times \left\{ \sum \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\epsilon}(\ell') + \tilde{\epsilon}(\ell)} + \sum \frac{1}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(\ell') + \tilde{\epsilon}(\ell)} \right\} +$$

$$+ \frac{g^2(q)\omega(q)(\lambda_q + \mu_q)^2}{2V^2} \sum \frac{I(p, -k, -k', p') + I(p, k, k', p')}{2\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(p) + \tilde{\epsilon}(p')} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} + \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\epsilon}(p) + \tilde{\epsilon}(p')} \right\} +$$

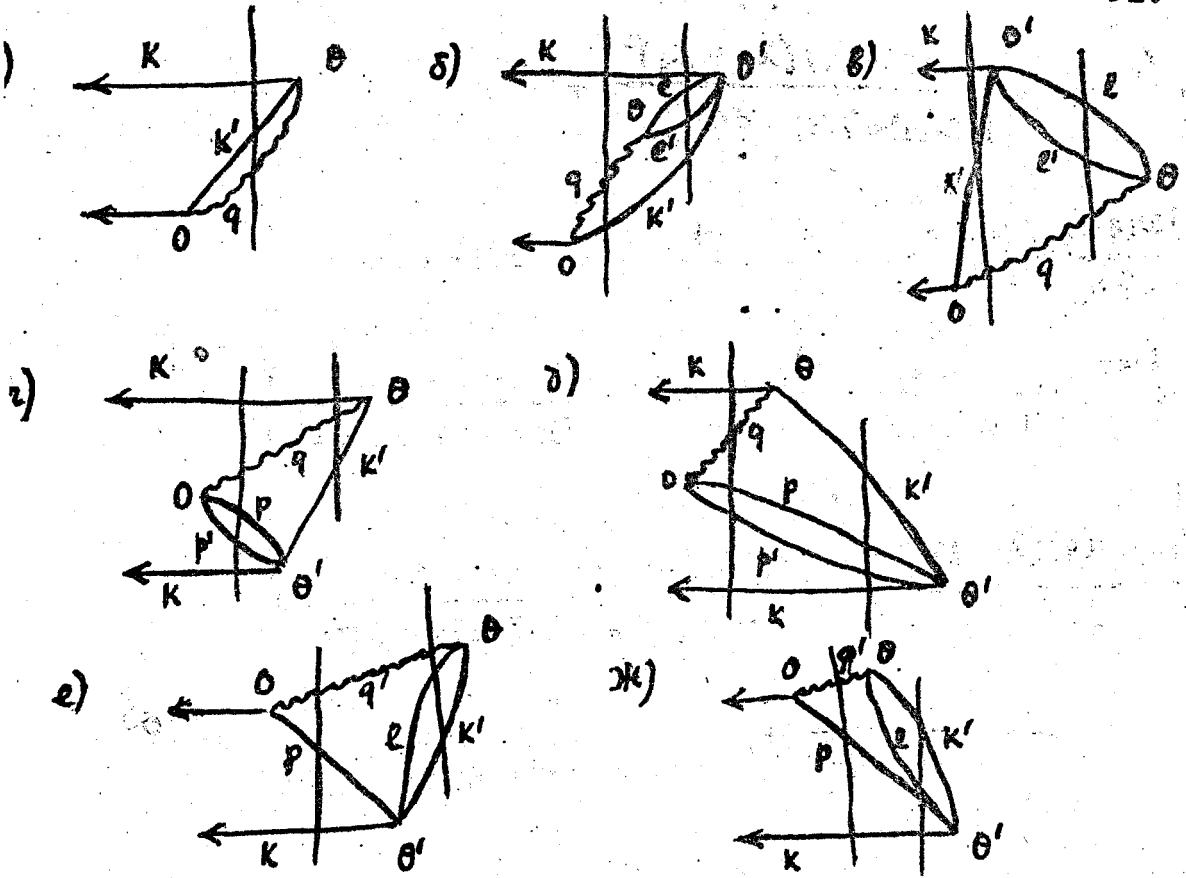
$$+ \sum_{q' = \pm(k-p)} \frac{g^2(q')\omega(q')(\lambda_{q'} + \mu_{q'})^2}{2V^2} \sum \frac{I(-k, p, \ell, -k') + I(k, p, \ell, k')}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(p)} \times$$

$$\times \left\{ \sum \frac{1}{\omega(q') + \tilde{\epsilon}(\ell) + \tilde{\epsilon}(\ell')} - \sum \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\epsilon}(p) + \tilde{\epsilon}(\ell)} \right\} + \dots$$

(5.56)

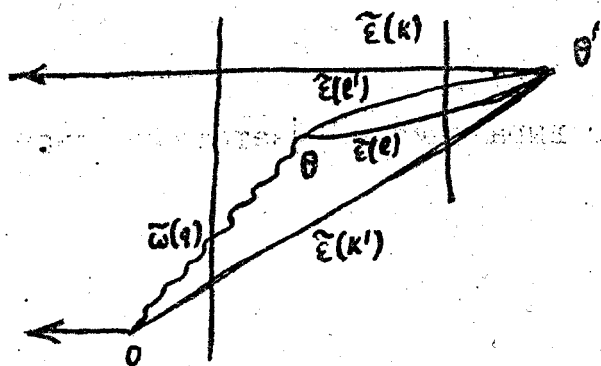
~~Две~~

Слагаемым этого выражения соответствуют диаграммы, изображенные на фиг. 13.



Фиг. 13

Эти диаграммы представляют собой по существу диаграммы типа диаграмм Гутенгольца. Для того, чтобы сопоставить им энергетические знаменатели слагаемых из правой части (5.66), достаточно провести через них вертикальные сечения и сложить энергии, соответствующие линиям, пересекаемым этими сечениями. Так, например, диаграмма фиг. 13б может быть рассечена двумя вертикалями (см. фиг. 14), каждая из которых соответствует одному из знаменателей.



Фиг. 14

При этом движение по диаграмме справа налево соответствует возрастанию времени, в связи с чем на диаграммах фиг. 13 существенен временной порядок вершинных аргументов. Так, диаграмма (1) так же, как и диаграмма (2) соответствует предпоследнему ~~члену~~ <sup>члену</sup> суммы (5.55) и отличается от диаграммы (2) лишь временным порядком следования вершин  $[\theta > \theta'$  для (1) и  $\theta' > \theta$  для (2)]

Линии  $\pm K$  являются внешними линиями диаграмм, что соответствует фиг. 8, а линия  $K'$  является внутренней линией диаграмм в соответствии с хронологическим характером спаривания (5.33).

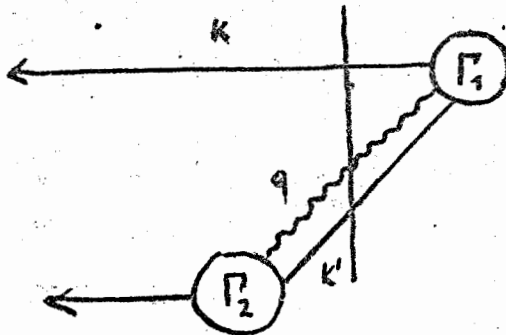
Отличие введенных диаграмм от обычных диаграмм Гугенгольца заключается в том, что энергия дырок входит в результирующие знаменатели со знаком плюс, что обусловлено проведенной перенормировкой энергии  $\tilde{\epsilon}$ .

Оценим теперь относительные вклады различных членов в сумме (5.56). Примем для этого во внимание, что максимальная энергия фонона является малой величиной по отношению к энергии Ферми. С другой стороны, в соответствии с (5.34) существенна область импульсов  $K, K'$ , лежащих в тонком "слое размытости" около поверхности Ферми. В этой области также являются малыми энергии электронов  $\tilde{\epsilon}(K)$  и  $\tilde{\epsilon}(K')$ . Таким образом, в (5.56) является малой сумма

$$\tilde{\omega}(K-K') + \tilde{\epsilon}(K) + \tilde{\epsilon}(K')$$

а члены, содержащие эту сумму в знаменателе, большими.

Поставим теперь задачу отделения больших членов в выражениях (5.53) и (5.54). Таким членам должны соответствовать диаграммы, которые можно разбить вертикалью, пересекающей только при линии  $\tilde{\omega}(k-k')$ ,  $\tilde{\epsilon}(k)$  и  $\tilde{\epsilon}(k')$ , т.е. диаграммы типа, изображенного на фиг.15.



Фиг.15

Круги на фиг.15 соответствуют "обобщенным вершинам", включающим кулоновские поправки всех порядков. При этом все вершины из  $\Gamma_1$  по времени должны быть расположены позже всех вершин в  $\Gamma_2$ .

Итак, в рассматриваемом приближении ядро  $Q(k, k')$  уравнения (5.34) может быть представлено в виде суммы двух слагаемых

$$Q(k, k') = Q_c(k, k') + Q_{ph}(k, k')$$

Первое слагаемое  $Q_c$  соответствует чисто кулоновскому взаимодействию /ф-лы (5.36), (5.48)/, а главная часть второго имеет вид

$$Q_{ph}(k, k') = \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \frac{\Lambda}{V} \quad (5.57)$$

Величина  $\Lambda$  соответствует произведению факторов, описывающих обобщенные вершины  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  фиг.15. В пределе отсутствия куло-



новского взаимодействия она равна единице. В общем случае  $\Lambda$  может быть представлено в виде

$$\frac{\Lambda}{V \{ \tilde{\omega}(q) + \tilde{\xi}(k) + \tilde{\xi}(k') \}} = \sum_{\sigma} (M_{\sigma} + N_{\sigma}) P_{\sigma} \quad (5.58)$$

Величина  $P_{\sigma}$  соответствует вершине  $\Gamma_{\sigma}$  со всеми кулоновскими поправками

$$P_{\pm} = -i \int_{-\infty}^0 e^{i\theta \tilde{\omega}(q) + i\tilde{\xi}(k)\tau + i\tilde{\xi}(k')\tau'} d\tau_1 d\tau_2 d\theta \left\langle \frac{\delta^2 R_{-q}(\theta)}{\delta a_{\pm k, \pm}^{\dagger}(\tau) \delta a_{\pm k', \pm}(\tau')} \right\rangle_0 \quad (5.59)$$

где

$$R_{-q}(\theta) = \mathcal{T} (H_q(\theta) \zeta_{\infty}^0)$$

и

$$H_q(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2V}} \sum_{ps} \tilde{a}_{p+q, s}^{\dagger}(\tau) a_{ps}(\tau)$$

В пределе выключения кулоновского взаимодействия  $P$  имеет вид

$$P_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2V} \{ \tilde{\omega}(q) + \tilde{\xi}(k) + \tilde{\xi}(k') \}}$$

Функции  $M$  и  $N$  представляют собой вершины  $\Gamma_2$  для операторов  $R'$  и  $R''$  соответственно. Они имеют вид

$$M_{\pm} = \int_{-\infty}^0 d\tau d\tau' \left\langle \frac{\delta^2 R_{-q}(\theta)}{\delta a_{\pm k, \pm}^{\dagger}(\tau) \delta a_{\pm k', \pm}(\tau')} \right\rangle_0 \quad (5.60)$$

$$N_{\pm} = -i \int_{-\infty}^0 d\theta d\tau d\tau' \left\langle \frac{\delta^2 [N_c(\theta) R_q(\theta)]}{\delta a_{\pm k, \pm}^{\dagger}(\tau) \delta a_{\pm k', \pm}(\tau')} \right\rangle_0 \quad (5.61)$$

В пределе выключения кулоновского взаимодействия  $M$  и  $N$  принимают значения

$$M_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2V}}, \quad N_{\pm} = 0$$

Структура выражения  $\Lambda$  весьма прозрачна, однако, прямой вывод формул (5.57)–(5.61) является несколько громоздким. Поэтому мы набросаем ниже лишь схему этого вывода.

Начнем рассуждение с формулы (5.31), в которой содержится член

$$F(k) = u_k^2 \int dt dt' e^{i\tilde{\epsilon}(k)(t+t')} \left\langle \frac{\delta^2 R'}{\delta \tilde{a}_{k,+}(t) \delta \tilde{a}_{k,-}(t)} \right\rangle_c$$

который при  $k > k_F$  может быть представлен в виде

$$F(k) = \langle a_{k,+} a_{-k,-} R' \rangle_c$$

Запишем условие связности рассматриваемых здесь диаграмм в явном виде с помощью матрицы  $\overset{+}{S}$

$$\overset{+}{S}_{\alpha} = (S_{\alpha})^{\dagger} = T \left( e^{i \int_{-\infty}^0 H_{int}^{\alpha}(\tau) d\tau} \right); \quad \overset{+}{S}_{\alpha} S_{\alpha} = 1$$

где индекс  $\alpha$  указывает представление электронных операторов.

Имеем

$$F(k) = \langle a_{k,+} a_{-k,-} R' \overset{+}{S}_{\alpha} \rangle$$

Записывая  $R' \overset{+}{S}_{\alpha}$  в виде

$$R' \overset{+}{S}_{\alpha} = R' \overset{+}{S}_{\alpha'} \cdot S_{\alpha'} \overset{+}{S}_{\alpha}$$

произведем разложение полученного произведения операторов  $R' \overset{+}{S}_{\alpha'}$

и  $S_{\alpha'} S_{\alpha}$  по состояниям, содержащим два  $a'$ -электрона с импульсами  $\pm k, \pm k'$  и один фотон  $\pm(k-k')$ . /Тем самым мы ограничиваемся членами в  $Q_{ph}$ , содержащими малый знаменатель  $\tilde{\omega} + \tilde{\epsilon} + \tilde{\epsilon}$  /.

Получаем тогда

$$F(k) = \sum \langle a_{k'} + a_{-k'} R' S_{\alpha'} n_{\alpha} \rangle \langle n_{\alpha} S_{\alpha'} S_{\alpha} \rangle$$

Здесь  $n_{\alpha}$  выражения вида  $a_{\pm k'}^{\dagger} a_{\mp k}^{\dagger} \beta_{\pm(k-k')}$

Преобразуя вторые сомножители с помощью формулы (5.33), выделяем множитель  $U_{k'} V_{k'}$  и, принимая во внимание, что роль операторов  $\dagger$  сводится к формулам (5.57)-(5.61).

к компенсации независимых диаграмм, переходим к

5.7. Определение  $\lambda, \mu$  и  $\tilde{\omega}$ . Перейдем теперь к рассмотрению условия (5.26) компенсации фотонных диаграмм, изображенных на фиг. 9, и определим из него коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ . Раскрывая вариационную производную и ограничиваясь главными членами по  $g^2$ , получаем

$$2\omega(q)\lambda_q\mu_q - g^2(q)\omega(q)(\lambda_q + \mu_q)^2 Z(q) = 0 \quad (5.62)$$

где

$$Z(q) = \frac{1}{2V} \int dt dt' e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} \sum \langle T(H_2(0) a_{k5}^{\dagger}(t) a_{k5}(t) a_{q5}(t) a_{q5}(t) e^{-i \int_0^t H_2(t') dt'}) \rangle_0 +$$

$$+ \frac{i}{V} \int_{-\infty}^0 dt e^{i\tilde{\omega}(q)t} \sum \langle T(a_{k5}^{\dagger}(0) a_{k5}(0) a_{q5}^{\dagger}(t) a_{q5}(t) e^{-i \int_0^t H_2(t') dt'}) \rangle_0 \quad (5.63)$$

Решая уравнение (5.62) относительно  $(\lambda_q + \mu_q)^2$ , находим

$$(\lambda_q + \mu_q)^2 = (1 - 2q^2(q) Z(q))^{-\frac{1}{2}} \quad (5.64)$$

Рассмотрим далее уравнение (5.27), определяющее перенормированную энергию  $\tilde{\omega}$ . Проводя в нем аналогичные преобразования, имеем

$$\omega(q)(\lambda_q^2 + \mu_q^2) - \tilde{\omega}(q) - \tilde{\omega}(q) q^2(q) (\lambda_q + \mu_q)^2 Y(q) = 0 \quad (5.65)$$

где

$$Y(q) = \frac{1}{2V} \int dt dt' e^{i\tilde{\omega}(q)(t-t')} \sum_{\substack{(k' - k = p - p' = q) \\ s, s'}} \langle T(H_c(q) \hat{a}_{ks}(t) a_{ks}(t) \hat{a}_{k's'}(t') a_{k's'}(t') e^{-i \int_0^t H_c(t) dt} ) \rangle_0 + \quad (5.66)$$

$$+ \frac{i}{2V} \int dt (e^{i\tilde{\omega}(q)t} + e^{-i\tilde{\omega}(q)t}) \sum \langle T(\hat{a}_{ks}(0) a_{ks}(0) \hat{a}_{k's'}(t) a_{k's'}(t) e^{-i \int_0^t H_c(t) dt} ) \rangle_0$$

Разрешая (5.65) относительно  $\tilde{\omega}$  с учетом (5.64), получаем

$$\tilde{\omega}(q) = \frac{1 - q^2(q) (Y(q) + Z(q))}{\sqrt{1 - 2q^2(q) Z(q)}} \omega(q) \quad (5.67)$$

5.8. СВЯЗЬ С МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ. Покажем теперь, что формы  $Z(q)$ ,  $Y(q)$ , а, следовательно, и величины  $(\lambda_q + \mu_q)^2$ ,  $\tilde{\omega}(q)$  а также входящие в (5.57) величины  $\Lambda$  могут быть приближенно выражены через решение некоторой вспомогательной задачи.

Рассмотрим для этого модельную систему, описываемую гамильтонианом

$$H = H_0 + H_{int} \quad (5.68)$$

$$H_0 = \sum_{(s, k) > k_F} \tilde{\epsilon}(k) \hat{a}_{ks}^\dagger a_{ks} + \sum_{(s, k) < k_F} \tilde{\epsilon}(k) a_{ks} \hat{a}_{ks}^\dagger \quad (5.69)$$

$$H_{int} = H_c + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \sum_{k, s} (\hat{a}_{k+q, s}^\dagger a_{k, s} + \hat{a}_{k, s}^\dagger a_{k+q, s}) \quad (5.70)$$

где  $H_c$  - гамильтониан кулоновского взаимодействия в форме (5.3), а  $\delta$  - малый параметр. Энергия основного состояния такой модельной системы

$$U = \langle R \rangle_0 = \left\langle T \left( H_{int}(0) e^{-i \int_0^{\infty} H_{int}(\tau) d\tau} \right) \right\rangle_0$$

может быть разложена в ряд по степеням  $\delta$

$$U = U_0 + \delta^2 U_2^q \quad (5.71)$$

причем, коэффициент  $U_2^q$  имеет вид

$$U_2^q = -\frac{1}{2V} \int dt dt' \sum_{(k, \ell, s, s')} \left\langle T \left( H_c(0) \hat{a}_{k+q, s}^\dagger(t) a_{k, s}(t) \hat{a}_{\ell, s'}^\dagger(t') a_{\ell, s'}(t') e^{-i \int_0^{\infty} H_c(\tau) d\tau} \right) \right\rangle_0 -$$

$$-\frac{i}{V} \int dt \sum_{k, \ell, s, s'} \left\langle T \left( \hat{a}_{k+q, s}^\dagger(0) a_{k, s}(0) \hat{a}_{\ell, s'}^\dagger(t) a_{\ell, s'}(t) e^{-i \int_0^{\infty} H_c(\tau) d\tau} \right) \right\rangle_0 \quad (5.72)$$

Сравнивая между собой формулы (5.63), (5.66), (5.72), видим, что в пределе малых  $\tilde{\omega}(q)$  имеет место равенство

$$Z(q) = Y(q) = -U_2^q$$

вследствие чего формулы (5.64) и (5.67) приобретают вид

$$(\lambda_q + \mu_q)^2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2g^2(q)U_q^2}} \quad (5.73)$$

$$\tilde{\omega}(q) = \sqrt{1 + 2g^2(q)U_q^2} \omega(q) \quad (5.74)$$

Перейдем теперь к построению в рамках рассматриваемой модели величин, соответствующих  $M$ ,  $N$  и  $P$  из (5.58).

Рассмотрим для этого матричные элементы

$$V_{\pm} = \langle a_{\pm k, \pm} R^{\dagger} a_{\pm k', \pm} \rangle_0 \quad (5.75)$$

$$W_{\pm} = \langle a_{\pm k, \pm} \int_0^{\infty} a_{\pm k', \pm}^{\dagger} \rangle_0 \quad (5.76)$$

соответствующие диаграмме, изображенной на фиг. I6.



Фиг. I6

Величины  $V$  и  $W$  могут быть разложены в ряд по степеням параметра  $\delta$ .

$$V_{\pm} = \delta V_{\pm}^1 + \dots \quad W_{\pm} = \delta W_{\pm}^1 + \dots$$

Коэффициенты  $V^1$ ,  $W^1$  имеют вид

$$\begin{aligned}
 V_{\pm}^1 &= \langle a_{\pm k, \pm} \{H_q(0) + H_{-q}(0)\} S_{-\infty}^0 \hat{a}_{\pm k', \pm}^{\dagger} \rangle - \\
 &- i \langle a_{\pm k, \pm} \int_{-\infty}^0 H_c(\theta) T(\{H_q(\theta) + H_{-q}(\theta)\} S_{-\infty}^0) \hat{a}_{\pm k', \pm}^{\dagger} \rangle d\theta = \\
 &= 2(M_{\pm} + N_{\pm})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{\pm}^1 &= -i \int \langle a_{\pm k, \pm} T(\{H_q(\theta) + H_{-q}(\theta)\} S_{-\infty}^0) \hat{a}_{\pm k', \pm}^{\dagger} \rangle_0 = \\
 &= 2 \frac{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\omega}(k)}{\tilde{\epsilon}(k') + \tilde{\epsilon}(k)} P_{\pm}
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (5.58) и (5.57), получаем

$$Q_{ph}(k, k') = \frac{g^2(q) \omega(q) (\lambda_q + \mu_q)^2}{\tilde{\omega}(k-k') + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \cdot \frac{\sum_{\sigma} V_{\sigma}^1 \tilde{W}_{\sigma}^1}{4}$$

Выведенное здесь выражение  $\tilde{W}_{\sigma}^1$

$$\tilde{W}_{\sigma}^1 = (\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')) W_{\sigma}^1 \quad (5.77)$$

фактически от малого параметра  $\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')$  не зависит.

С учетом формулы (5.73) и (5.74)  $Q_{ph}(k, k')$  может быть также представлено в виде

$$Q_{ph}(k, k') = \frac{\tilde{g}^2(q) \tilde{\omega}(q)}{\tilde{\omega}(q) + \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k')} \cdot \frac{\sum_{\sigma} V_{\sigma}^1 \tilde{W}_{\sigma}^1}{4} \quad (5.78)$$

где  $\tilde{g}$  — перенормированная функция  $g$ :

$$\tilde{g}(q) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2g^2(q)V_2}} g(q)$$

(5.79)



## § 6. КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТОВ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

### 6.1. Приближенное определение ренормированных $\tilde{\omega}$ и $\tilde{g}$ .

В § 5.8 мы свели вопрос определения величин  $\lambda + \mu$ ,  $\tilde{\omega}$ ,  $Q_R$  к решению модельной задачи, гамильтониан которой (5.68) содержит лишь "кинетическую энергию", энергию кулоновского взаимодействия электронов и некоторый член, соответствующий взаимодействию с классическим полем.

Займемся теперь получением оценок для этих величин  $\lambda + \mu, \tilde{\omega}, \dots$  в приближении "сильно сжатого" электронного газа, когда кулоновская энергия может рассматриваться как малая по сравнению с кинетической энергией.

Как хорошо известно, в задачах с кулоновским взаимодействием нельзя, вообще говоря, пользоваться прямыми разложениями по степеням квадрата заряда, т.е. по степеням кулоновского взаимодействия, так как при этом появляются расходимости в области малых импульсов и возникает положение, напоминающее "инфракрасную катастрофу" в квантовой теории поля.

После работ Гелл-Манна и Браунера и Савада<sup>/13/</sup> процедура исправления формул, к которым приводят подобные разложения, стала совершенно ясной. Так, для улучшения основного приближения низшего порядка по  $e^2$  необходимо просуммировать графы из ком-

плексов частица-дырка, о которых говорилось в § 4. Этим приемом мы сейчас и воспользуемся, причем, как и в § 4, для удобства придадим ему форму метода приближенного вторичного квантования.

Введем прежде всего, ферми-амплитуды для частиц и дырок с помощью нашего канонического преобразования

$$\begin{aligned} a_{k,+} &= u_k a_{k0} + v_k^\dagger a_{k1} \\ a_{k,-} &= u_k a_{k1} - v_k^\dagger a_{k0} \end{aligned} \quad (6.1)$$

с тривиальными значениями  $u_k, v_k$

$$u_k = \theta_G(k) ; \quad v_k = \theta_F(k) \quad (6.2)$$

Представление (6.1) совпадает с введенным выше (5.30)  $a'$ -представлением, в котором фактически и получены все результаты.

Рассмотрим фурье-компоненты пространственной плотности электронов

$$\rho(q) = \sum_{k,s}^\dagger a_{k+q,s}^\dagger a_{k,s} \quad (q \neq 0)$$

Преобразуем их к амплитудам  $\alpha$  и оставим в полученном выражении лишь члены, которые не обращаются в нуль после того, как они подействуют только слева или только справа на волновую функцию  $C_0^*$ ,  $C_0$  "вакуумного состояния"

$$C_0^* \alpha_v = 0, \quad \alpha_v C_0 = 0 \quad v=0,1$$

Тогда получим приближенно

$$\rho(q) = \sum_{1k} \{ M(k, k+q) a_{k+q,0}^\dagger a_{k,1}^\dagger + M(k, k-q) a_{k,1} a_{k-q,0} \}$$

где

$$M(k, q) = u_k v_q + u_q v_k$$

В соответствии с правилами метода приближенного вторичного квантования заменим здесь произведения ферми-амплитуд на бозе-амплитуды

$$\alpha_{k+q,0}^{\dagger} \alpha_{k,1}^{\dagger} \rightarrow \beta_q^{\dagger}(k)$$

$$\alpha_{k,1} \alpha_{k-q,0} \rightarrow \beta_{-q}(k)$$

Получим

$$\rho(q) = \sum_k M(k, q) \beta_q^{\dagger}(k) + \sum_k M(k, k-q) \beta_{-q}(k)$$

Подставим это выражение в энергию кулоновского взаимодействия

$$H_c = \frac{4\pi e^2}{2V} \sum_{q \neq 0} \frac{\rho^*(q) \rho(q)}{|q|^2}$$

Это даст

$$H_c = \frac{2\pi e^2}{V} \sum_{(k, k', q \neq 0)} \frac{1}{|q|^2} \{ M(k, k+q) M(k', k'-q) \beta_{-q}^{\dagger}(k') \beta_q^{\dagger}(k) + \\ + M(k, k-q) M(k', k'+q) \beta_{-q}(k) \beta_q(k) + M(k, k+q) M(k', k'+q) \beta_q(k) \beta_q(k') + \\ + M(k, k-q) M(k', k'-q) \beta_{-q}^{\dagger}(k') \beta_{-q}(k) \}$$

Аналогичным путем в том же приближении для "члена взаимодействия" с классическим полем  $\delta$  в (5.70) получим

$$\frac{\delta}{2V} \sum_k \{ M(k, k+p) \beta_p^{\dagger}(k) + M(k, k-p) \beta_{-p}^{\dagger}(k) + M(k, k-p) \beta_p(k) + M(k, k+p) \beta_p(k) \}$$

Как было показано в § 4, для получения правильных энергетических знаменателей нам надо теперь в качестве собственной энергии взять выражение

$$\sum_{k, q} (\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+q)) \beta_q^{\dagger}(k) \beta_q(k)$$

Итак, полный гамильтониан рассматриваемой задачи в модели метода приближенного вторичного квантования имеет вид

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{k,q} \{ \bar{\epsilon}(k) + \bar{\epsilon}(k+q) \} \beta_q^\dagger(k) \beta_q(k) + \\
 & + \frac{2\pi e^2}{V} \sum_{(k,k',q \neq 0)} \frac{1}{|q|^2} \{ M(k,k+q) M(k',k'-q) \beta_q^\dagger(k) \beta_{-q}^\dagger(k') + \\
 & + M(k,k+q) M(k',k'-q) \beta_q(k) \beta_{-q}(k') + 2M(k,k+q) M(k',k'+q) \beta_q^\dagger(k) \beta_q(k') \} + \\
 & + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \sum_k \{ M(k,k+p) (\beta_p^\dagger(k) + \beta_p(k)) + M(k,k-p) (\beta_{-p}^\dagger(k) + \beta_{-p}(k)) \}
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Как видно, этот гамильтониан представляется суммой квадратичной формы из бозе-амплитуд и линейной формы, пропорциональной  $\delta$ ,

Чтобы учесть влияние этой формы на смещение энергетического уровня основного состояния и вычислить тем самым величину можно воспользоваться известным элементарным приемом трансляции бозе-амплитуд.

Совершим преобразование

$$\beta_q(k) \rightarrow \beta_q(k) + C_q(k) \quad , \quad \beta_q^\dagger(k) \rightarrow \beta_q^\dagger(k) + C_q^*(k) \quad q = \pm p$$

где  $C$  и  $C^*$  - суть  $C$ -числа, определяемые из условия исчезновения линейной формы

$$\frac{\partial H}{\partial \beta_q} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \beta_q^\dagger} = 0 \quad q = \pm p$$

Раскрывая эти условия, имеем

$$\{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+q)\} C_q(k) + \frac{2\pi e^2}{V|q|^2} 2M(k, k+q) X(q) + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} M(k, k+q) = 0$$

$$\{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+q)\} C_q^*(k) + \frac{2\pi e^2}{V|q|^2} 2M(k, k-q) X(q) + \frac{\delta}{\sqrt{2V}} M(k, k-q) = 0$$

где

$$X(q) = \sum_{k'} \{M(k', k'+q) C_q(k') + M(k', k'-q) C_q^*(k')\}$$

Определим из этих уравнений величину  $X(q)$

Получаем

$$X(q) = -\delta \sqrt{\frac{V}{2}} \frac{F(q)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} F(q)} \quad (6.4)$$

где

$$F(q) = \frac{1}{V} \sum_k \left\{ \frac{M^2(k, k+q)}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+q)} + \frac{M^2(k, k-q)}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k-q)} \right\}$$

Заметим теперь, что в низшем приближении по  $\delta$  энергетический сдвиг будет

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \sum_k \{M(k, k+p) (C_p^*(k) + C_p(k)) + M(k, k-p) (C_p^*(k) + C_p(k))\} = \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{2V}} \{X(p) + X(-p)\} \end{aligned}$$

Подставляя сюда значение (6.4), получаем

$$\Delta U = -\frac{\delta^2}{2} \frac{F(p)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|p|^2} F(p)}$$

Входящее сюда выражение  $F(q)$  может быть преобразовано к виду

$$F(q) = \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{M^2(\mathbf{k}, k+q)}{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) + \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}+q)} = \frac{4}{V} \sum_{\mathbf{k}' - \mathbf{k} = q} \frac{\theta_G(\mathbf{k}) \theta_F(\mathbf{k})}{\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) - \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}')} \quad (6.5)$$

Здесь  $\tilde{\epsilon}(\mathbf{k})$  — энергия элементарного возбуждения электронов, ненормированная на поверхность Ферми, так что

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) = |\tilde{\epsilon}(\mathbf{k}) - \tilde{\epsilon}_F|$$

Из сравнения формул (5.71) и (6.5) получаем

$$U_2^p = -\frac{1}{2} \frac{F(p)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|p|^2} F(p)} \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (5.74) и (5.79), находим

$$\tilde{\omega}(q) = \omega(q) \left\{ 1 - \frac{g^2(q) F(q)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} F(q)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

$$\tilde{g}(q) = g(q) \left\{ 1 - \frac{g^2(q) F(q)}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} F(q)} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

Сравнивая полученные формулы (6.7) и (6.8) с соответствующими формулами § 3.2 видим, что при малых  $q$  кулоновские силы практически уничтожают "ренормировку".

6.2. Обсуждение свойств величин  $Q_c$  и  $Q_{ph}$ . Обратимся теперь к величинам  $Q_c$  (формулы 5.36), (5.48)) и  $Q_{ph}$  определяющим согласно (5.78) ядро  $Q_{ph}$ . Здесь можно было бы также провести приближенный анализ этих величин с целью выяснения

их свойств в области инфракрасной кулоновской катастрофы, там где кулоновское взаимодействие не является малым. Однако, поскольку подобный анализ по существу претендует лишь на качественные результаты, с одной стороны, и, поскольку строгое рассмотрение является значительно более сложным<sup>х)</sup>, с другой стороны, мы не будем заниматься здесь подобными рассуждениями. Мы ограничимся чисто качественным обсуждением свойств величин  $Q_c$  и  $Q_{ph}$ .

Заметим для этого, что основной результат предыдущего § 6.1 состоит в том, что кулоновские поправки суммируются по геометрической прогрессии в формулу типа (6.6). Это свойство не является случайным следствием использованной модели приближенного вторичного квантования, а представляет собой проявление общей структуры кулоновского взаимодействия. Другим проявлением этой структуры является, как известно, свойство экранировки. Суммируя, можно утверждать, что учет всех кулоновских поправок к данной вершине диаграммы, в которой происходит рассеяние электронов с передачей импульса  $q$ , приводит к появлению множителя типа

$$\frac{1}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} \Phi(q)} \quad (6.9)$$

где  $\Phi(q) > 0$ .

---

х) Соответствующие вычисления проводятся в настоящее время.

Как раз такой фактор содержит формула (6.6). Ясно также, что введение множителя (6.9) в обычную кулоновскую вершину

$$\frac{4\pi e^2}{V|q|^2}$$

приведет к эффекту экранировки

$$\frac{4\pi e^2}{V|q|^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4\pi e^2}{|q|^2} \phi(q)} = \frac{\frac{4\pi e^2}{V}}{|q|^2 + 4\pi e^2 \phi(q)} \quad (6.10)$$

С другой стороны введение фактора (6.9) в вершину не кулоновского типа (например, фононную) приводит к эффекту обрезания при малых  $|q|^2$ , как это имеет место в формулах (6.7), (6.8).

Обратимся теперь к функциям  $Q_c, Q_{ph}$ . Величина  $Q_c$  в низшем (по  $e^2$ ) приближении сводится к чисто кулоновской вершине. Следовательно, в результате экранировки полное выражение  $Q_c$  будет конечным при  $q = 0$ . Коэффициент при главной части  $Q_{ph}$  в низшем приближении соответствует обычным фононным вершинам. Полные выражения для него при  $q = 0$  должны обращаться в нуль.

6.3. Общие свойства основного уравнения компенсации. Приступим в заключение к рассмотрению уравнения компенсации в форме (5.40)

$$C(k) = \frac{c}{2(\omega)^3} \int dk' Q(k, k') \frac{C(k')}{\sqrt{v^2(k') + c^2(k')}}$$



причем ограничимся для простоты случаем радиальной асимметрии.

В этом случае его можно привести к одномерному уравнению, взяв

$\bar{z}$  в качестве новой независимой переменной

$$C(\bar{z}) = \frac{1}{2} \int Q(\bar{z}, \bar{z}') n(\bar{z}) \frac{C(\bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 + C^2(\bar{z}')}} d\bar{z}' \quad (6.II)$$

где 
$$n(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi^2} \left( k^2 \frac{d|k|}{d|\bar{z}|} \right)$$

и

$$Q(\bar{z}, \bar{z}') = \frac{1}{4\pi} \int Q(|k|, |k'| \vec{e}) d\vec{e}$$

Для анализа свойств решения уравнения (6.II) вблизи поверхности

Ферми упростим его, заменив под корнем в знаменателе величину

$C^2(\bar{z}')$  на  $\Delta^2 = C^2(0)$ . Такое упрощение асимптотически

вполне законно, поскольку при очень малых  $C(\bar{z})$  мы всегда

можем положить

$$\sqrt{C^2(\bar{z}') + \bar{z}'^2} \sim \sqrt{\bar{z}'^2 + \Delta^2}$$

Получим таким путем "квазилинейное" уравнение

$$C(\bar{z}) = \frac{1}{2} \int Q(\bar{z}, \bar{z}') n(\bar{z}') \frac{C(\bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 + \Delta^2}} d\bar{z}' \quad (6.I2)$$

$$C(0) = \Delta \quad (6.I3)$$

Как мы установили в § 5.6, ядро  $Q$  разбивается на чисто кулоновскую часть  $Q_c$  и часть  $Q_{ph}$ , существенно обуслов-

ленную взаимодействием электронов с фононами

$$Q = Q_c + Q_{ph}$$

В соответствии с рассуждениями § 6.2  $Q_c$  можно приближенно представить в виде функции типа (6.10), соответствующей экранированному кулоновскому взаимодействию. Согласно (5.78) член  $Q_{ph}$  эффективен лишь в окрестности поверхности Ферми при  $|\xi| \lesssim \tilde{\omega}$ .

Рассмотрим во вспомогательных целях интегральное уравнение с ядром, пропорциональным  $Q_c$

$$u(\xi) - \frac{1}{2} \int Q_c(\xi, \xi') n(\xi') \frac{u(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi' = f(\xi) \quad (6.14)$$

и введем соответствующую резольвенту

$$u(\xi) = f(\xi) - \frac{1}{2} \int G_\Delta(\xi, \xi'') f(\xi'') d\xi'' \quad (6.15)$$

Ввиду особенности ядра уравнения (6.14) при  $\Delta \rightarrow 0$  резольвента  $G_\Delta$  также будет иметь особенности типа

$$G_\Delta(\xi, \xi'') = G_\Delta^{reg}(\xi, \xi'') + \frac{z(\xi)}{\sqrt{\xi''^2 + \Delta^2}} \quad \text{при } \xi'' \sim 0 \quad (6.16)$$

где  $z(\xi)$  является решением уравнения

$$z(\xi) - \frac{1}{2} \int Q_c(\xi, \xi') n(\xi') \frac{z(\xi')}{\sqrt{\xi'^2 + \Delta^2}} d\xi' = -Q_c(\xi, 0) n(0) \quad (6.17)$$

Заметим теперь, что рассмотренное уравнение (6.12) приводится к виду (6.14), если положить

$$u(\bar{z}) = C(\bar{z})$$

$$f(\bar{z}) = \frac{1}{2} \int Q_{ph}(\bar{z}, \bar{z}') h(\bar{z}') \frac{C(\bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 + \Delta^2}} d\bar{z}'$$

Поэтому, на основании (6.15) и (6.16) имеем

$$C(\bar{z}) = \frac{1}{2} \int \left\{ Q_{ph}(\bar{z}, \bar{z}') - \frac{1}{2} \int G_{\Delta}^{reg}(\bar{z}, \bar{z}'') Q_{ph}(\bar{z}'', \bar{z}') d\bar{z}'' - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int \frac{z(\bar{z})}{\sqrt{\bar{z}''^2 + \Delta^2}} Q_{ph}(\bar{z}'', \bar{z}') \right\} h(\bar{z}') \frac{C(\bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 + \Delta^2}} d\bar{z}'$$

Как отмечалось, величина  $Q_{ph}$  эффективна лишь в малой окрестности поверхности Ферми, когда оба аргумента близки к нулю. Поэтому интегральный член

$$\int G_{\Delta}^{reg}(\bar{z}, \bar{z}'') Q_{ph}(\bar{z}'', \bar{z}') d\bar{z}''$$

является малым и должен быть отброшен. Равным образом величины  $h(\bar{z}')$  и  $z(\bar{z})$  следует заменить их значениями на поверхности Ферми  $h(0)$  и  $z(0)$ . Мы приходим поэтому к следующему уравнению

$$C(\bar{z}) = \frac{1}{2} \int \left\{ Q_{ph}(\bar{z}, \bar{z}') - \frac{1}{2} z(0) \int \frac{Q_{ph}(\bar{z}'', \bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}''^2 + \Delta^2}} d\bar{z}'' \right\} h(0) \frac{C(\bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 + \Delta^2}} d\bar{z}' \quad (6.18)$$

Для исследования уравнения (6.18) можно было бы использовать асимптотический метод из § 2. Однако, в целях простоты

изложения мы применим здесь его более грубый вариант, заменив функцию  $Q_{ph}(\bar{z}, \bar{z}')$  постоянной величиной  $Q_{ph}(0, 0)$  внутри некоторой зоны  $|\bar{z}| < \bar{\omega}$  и нулем вне этой зоны. Получим этим путем (с учетом того, что  $\bar{\omega}/\Delta \gg 1$ )

$$C(\bar{z}) = \frac{\rho}{2} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \left\{ 1 - \bar{z}(0) \ln \frac{2\bar{\omega}}{\Delta} \right\} \frac{C(\bar{z}')}{\sqrt{\bar{z}'^2 + \Delta^2}} d\bar{z}' \quad (6.19)$$

при  $|\bar{z}| < \bar{\omega}$

где

$$\rho = Q_{ph}(0, 0) h(0)$$

Из (6.19) вытекает, что

$$C(\bar{z}) = \Delta \quad \text{при} \quad -\bar{\omega} < \bar{z} < \bar{\omega}$$

причем соотношение для определения  $\Delta$  имеет вид

$$1 = \rho \left( 1 - \bar{z}(0) \ln \frac{2\bar{\omega}}{\Delta} \right) \ln \frac{2\bar{\omega}}{\Delta} \quad (6.20)$$

Сравнивая (6.20) с соответствующим уравнением из § 2

$$1 = \rho \ln \frac{2\bar{\omega}}{\Delta}$$

видим, что наличие кулоновского взаимодействия приводит к изменению эффективной величины  $\rho$

$$\rho \rightarrow \rho \left( 1 - \bar{z}(0) \ln \frac{2\bar{\omega}}{\Delta} \right)$$

причем величина  $\bar{z}(0)$  определяется уравнением (6.17).

Для нахождения простой, грубо ориентировочной оценки значе-

ние  $Z(0)$  заменим в (6.17) функцию  $-U_c(z, z') n(z')$  усред-  
ненной постоянной

$$\rho_c = \frac{4\pi e^2}{K_c^2} \bar{n}, \quad K_c \sim K_F$$

внутри области

$$|z| < \tilde{E}_F, \quad \tilde{E}_F \sim E_F$$

и нулем вне ее.

Тогда (6.17) решается тривиально и дает (при  $\tilde{E}_F \gg \Delta$ )

$$Z(0) = \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{2\tilde{E}_F}{\Delta}}$$

Подставляя это выражение в (6.20), получаем

$$1 = \rho \left( 1 - \frac{\rho_c \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}}{1 + \rho_c \ln \frac{2\tilde{E}_F}{\Delta}} \right) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}$$

Разрешая это соотношение относительно  $\ln \Delta$ , имеем

$$1 = \left( \rho - \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{E_F}{\omega}} \right) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta} \quad (6.21)$$

Как видно, кулоновское взаимодействие эффективно уменьшает параметр  $\rho$  и тем самым противодействует появлению сверхпро-

водимости. Сверхпроводящее состояние не может существовать при сколь угодно малом  $\rho$ . Необходимо для этого, чтобы выполнялось условие

$$\rho > \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{\tilde{E}_F}{\omega}} \quad (6.22)$$

Заметим, что в теории Бардина-Купера-Шриффера<sup>/5/</sup> вместо уравнения (6.21) и условия (6.22) получаются соотношения вида

$$1 = (\rho - \rho_c) \ln \frac{2\tilde{\omega}}{\Delta}$$

$$\rho > \rho_c$$

Как видно, в нашей теории противодействующая возникновению сверхпроводимости роль кулоновского взаимодействия значительно ослаблена из-за появления "большого логарифма"  $\ln(\tilde{E}_F/\omega)$ .

Заметим еще, что в случае, когда

$$\rho_c > \rho > \frac{\rho_c}{1 + \rho_c \ln \frac{\tilde{E}_F}{\omega}}$$

ядро  $Q = Q_c + Q_{ph}$  может быть везде отрицательно, а сверхпроводящее состояние существует.

Таким образом, отрицательность  $Q$  сама по себе ни о чем не свидетельствует вопреки основным положениям теории Бардина-Купера-Шриффера.

Изложенные качественные соображения, разумеется, можно было бы уточнить, основываясь на уравнениях (6.17) и (6.18).

Однако, здесь следует иметь в виду, что полностью убедительных количественных результатов<sup>х)</sup> можно ожидать лишь при явном учете кристаллической структуры металла.

---

х) В настоящее время производится соответствующее исследование.

## § 7. ФЕРМИ-СИСТЕМЫ СО СЛАБЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

7.1. Формулировка теории Бардина-Купера-Шриффера. В предыдущих параграфах мы все время рассматривали электрон-фонное взаимодействие с помощью гамильтониана Фрелиха. Тем не менее, основные результаты обработки гамильтониана Фрелиха могут быть получены при оперировании с некоторым модельным гамильтонианом, в котором фононы исключены.

Так, Бардин, Купер, Шриффер<sup>/5/</sup> в согласии с более ранними результатами Бардина и Пайнса<sup>/18/</sup> сразу исходят из гамильтониана, в котором взаимодействие электронов с фононами заменено прямым электрон-электронным взаимодействием. В наших обозначениях их исходный гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{(k,s)} E(k) a_{ks}^{\dagger} a_{ks} + H'$$

где

$$H' = - \frac{1}{2V} \sum_{(s_1, s_2)} \sum_{\substack{(k_1, k_2, k'_1, k'_2) \\ (k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2)}} \frac{g^2(k'_1 - k_1) \omega^2(k'_1 - k_1)}{\omega^2(k'_1 - k_1) - (E(k_1) - E(k'_1))^2} a_{k'_1, s_1}^{\dagger} a_{k_2, s_2}^{\dagger} a_{k_1, s_1} a_{k'_2, s_2} \quad (7.1)$$

Бардин, Купер и Шриффер производят дальнейшее упрощение этого гамильтониана. В качестве основной аппроксимации они опускают в (7.1) все члены, ведущие к разрушению пары частиц с противоположно направленными импульсами  $\pm K$  и противоположными спинами  $\pm 1/2$ . Получающийся при этом упрощенный гамильтониан имеет вид



$$H'_{red.} = -\frac{1}{V} \sum_{(k, k')} \frac{g^2(k'-k) \omega^2(k'-k)}{\omega^2(k'-k) - (E(k) - E(k'))^2} a_{-k'}^+ a_{-k}^- a_{k'}^+ a_{k,+} \quad (7.2)$$

Обработка гамильтониана (7.2) с помощью вариационного принципа и составляет основное содержание указанной работы.

Законность выбора исходного гамильтониана (7.1) так же, как и правильность основной аппроксимации (7.2) в работе Бардина, Купера и Шриффера<sup>/5/</sup> не исследована достаточно полно. В настоящем параграфе мы покажем, что до тех пор, пока приходится иметь дело с энергией основного состояния или фермиевской ветвью спектра элементарных возбуждений, подобного типа сведение гамильтониана Фрелиха и модельному гамильтониану типа (7.2) действительно имеет место. Согласно нашим расчетам, однако, модельный гамильтониан следует выбрать несколько иначе, а именно

$$H'_{red.} = -\frac{1}{V} \sum_{(k, k')} \frac{g^2(k'-k) \omega(k'-k)}{\omega(k'-k) + |E(k') - E_F| + |E(k) - E_F|} a_{-k'}^+ a_{-k}^- a_{k'}^+ a_{k,+} \quad (7.3)$$

Дело обстоит сложнее, когда рассматривается особая бозонная ветвь спектра элементарных возбуждений гамильтониана Фрелиха, связанная с коллективными эффектами электрон-фононного взаимодействия. Для нее указанное сведение больше не осуществляется. Точнее говоря, мы все еще можем в этом случае пользоваться гамильтонианом типа (7.1), но уже не в праве применять к этому гамильтониану аппроксимацию Бардина, Купера и Шриффера, ведущую к гамильтонианам типа (7.2) или (7.3).

Сам по себе факт, что фононные операторы можно исключить из гамильтониана Фрелиха, несколько не удивителен. В самом деле, с помощью хорошо известной в квантовой теории поля процедуры Фейнмана мы всегда можем провести функциональную квадратуру по виртуальным фононам и придти к некоторой четвертой форме по ферми-амплитудам электронных состояний. Такая четвертая форма, однако, будет нелокальной, так как будет содержать еще интегрирование по времени. Физически это означает, что получившуюся четвертую форму автоматически входят эффекты запаздывания электрон-фононного взаимодействия.

Гамильтониан с прямым электрон-электронным взаимодействием типа (7.1) является лишь приближением к указанной четвертой форме с эффектами запаздывания, когда последними пренебрегают. С точки зрения энергетических соотношений такое пренебрежение означает, что пользование локальным гамильтонианом позволительно, когда речь идет о расчете энергетических возбуждений, энергии которых малы по сравнению со средней энергией передающего взаимодействие агента.

Именно так обстоит дело при расчете энергии основного сверхпроводящего состояния. Здесь, как это было выяснено в предыдущим параграфах, разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний мала по сравнению со средней энергией фонона<sup>х)</sup>.

х) Мы в праве при этом говорить о средней энергии фонона, потому что, как это ясно из детального рассмотрения гамильтониана Фрелиха, в эффектах электрон-фононного взаимодействия являются одинаково важными фононы всех частот.

При расчете фермиевской ветви элементарных возбуждений также можно пренебречь эффектами запаздывания. Действительно, в предыдущих параграфах мы установили, что влияние взаимодействия на эту ветвь ограничено сравнительно малыми энергиями, много меньшими средней энергии фонона. При более высоких энергиях фермиевская ветвь переходит в обычные ферми-возбуждения идеального газа. Таким образом, для расчета влияния взаимодействия на фермиевскую ветвь спектра можно полагать, что фононы обладают бесконечно большими энергиями, следовательно, пренебрегать эффектами запаздывания.

Эффекты запаздывания также не оказывают никакого влияния на особую бозонную ветвь гамильтониана Фрелиха, так как все эти бозонные возбуждения имеют весьма малые энергии, много меньше средних фононных энергий.

Итак, для расчета энергии основного состояния фермиевской и особой бозевской ветвей спектра элементарных возбуждений мы можем заменить гамильтонианом Фрелиха гамильтонианом типа (7.1) с прямым электрон-электронным взаимодействием. Подчеркнем еще раз, что здесь мы говорим об общей форме локального четверного взаимодействия, а не об упрощенной форме (7.2) или (7.3). Что касается этой последней упрощенной формы, то она, вообще не содержит в себе эффектов коллективного взаимодействия и не имеет никакой особой бозевской ветви элементарных возбуждений.

7.2. Уравнение компенсации. Не желая учитывать также это коллективное взаимодействие, с самого начала будем рассматривать гамильтониан<sup>х)</sup>

$$H = \sum_{k,s} (E(k) - \lambda) \hat{a}_{ks}^{\dagger} a_{ks} + H' \quad (7.4)$$

$$H' = -\frac{1}{2V} \sum_{(s_1, s_2)} \sum_{\substack{(k_1, k_2, k'_1, k'_2) \\ k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2 \\ k_1 \neq k'_1}} J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) \hat{a}_{k'_2, s_2}^{\dagger} a_{k_2, s_2} \hat{a}_{k'_1, s_1}^{\dagger} a_{k_1, s_1}$$

где, как и в предыдущих параграфах, в гамильтониан введен параметр  $\lambda$ , играющий роль химического потенциала. Считая потенциал взаимодействия двух частиц инвариантным по отношению к перестановке обеих частиц, а также инвариантным относительно пространственных отражений, получим, что  $J(k'_1, k'_2; k_1, k_2)$  является действительной функцией и, кроме того, что

$$J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) = J(k_1, k_2; k'_1, k'_2)$$

$$J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) = J(-k'_1, -k'_2; -k_1, -k_2)$$

$$J(k'_1, k'_2; k_1, k_2) = J(k'_2, k'_1; k_2, k_1)$$

Совершим теперь, как и раньше в случае гамильтониана Фрейлиха, переход к новым ферми-амплитудам с помощью того же самого канонического преобразования. В настоящем параграфе удобно будет, однако, записать его в иной форме:

$$a_{2sk, s} = u_k \alpha_{k, -s} + 2s v_k \hat{\alpha}_{k, s} \quad (7.5)$$

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \quad u_k, v_k \text{ действительны}$$

х) Заметим, кстати, что рассмотрение этого гамильтониана представляет самостоятельный интерес, скажем, для теории ядерной материи.

(Для сравнений с формулами предыдущих параграфов укажем, что  $\alpha_{k, -\frac{1}{2}} \equiv \alpha_{k_0}$ ,  $\alpha_{k, +\frac{1}{2}} \equiv \alpha_{k_1}$ ). Преобразованный гамильтониан будет иметь вид

$$H = U + H_0 + H' + H''$$

где

$$U = 2 \sum_k (E(k) - \lambda) v_k^2$$

$$H_0 = \sum_{k,s} (E(k) - \lambda) (u_k^2 - v_k^2) \alpha_{k,s}^+ \alpha_{k,s}$$

$$H' = -\frac{1}{2V} \sum_{(s_1, s_2)} \sum_{\substack{k_1, k_2, k'_1, k'_2 \\ (k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2) \\ k_1 \neq k'_1}} J(2s_1 k_1, 2s_2 k_2; 2s_1 k'_1, 2s_2 k'_2) \times$$

$$\times \{ u_{k'_2}^+ \alpha_{k'_2, -s_2} + 2s_2 v_{k'_2} \alpha_{k'_2, s_2} \} \{ u_{k_2} \alpha_{k_2, -s_2} + 2s_2 v_{k_2} \alpha_{k_2, s_2} \} \times$$

$$\times \{ u_{k'_1}^+ \alpha_{k'_1, -s_1} + 2s_1 v_{k'_1} \alpha_{k'_1, s_1} \} \{ u_{k_1} \alpha_{k_1, -s_1} + 2s_1 v_{k_1} \alpha_{k_1, s_1} \}$$

$$H'' = \sum_{k,s} (E(k) - \lambda) 2s u_k v_k (\alpha_{k,s}^+ \alpha_{k,-s}^+ + \alpha_{k,-s} \alpha_{k,s})$$

Применим теперь к этому гамильтониану принцип компенсации "опасных" диаграмм, чтобы запретить порождение из вакуума пары фермионов  $\alpha_{k, -\frac{1}{2}}^+ \alpha_{k, \frac{1}{2}}$ . При этом получим следующее уравнение для  $u_k, v_k$ :

$$2(E(k) - \lambda) u_k v_k - \langle C_v^* \alpha_{k, \frac{1}{2}} \alpha_{k, -\frac{1}{2}} H' C_v \rangle = 0 \quad (7.5)$$

где  $C_v$  - вакуумная волновая функция с нулевыми числами заполнения  $\alpha_{k,s}^+ \alpha_{k,s}$ . В уравнении (7.5) ничего не

изменится, если поменять местами спиновые индексы + и -, так как исходный гамильтониан инвариантен по отношению к этому преобразованию.

Раскрывая (7.5), получим

$$2\zeta(k)u_k v_k = \frac{1}{V} \sum_{(k')} J(k, -k; k', -k') u_{k'} v_{k'} (u_k^2 - v_k^2) \quad (7.6)$$

где

$$\zeta(k) = E(k) - \lambda - \frac{1}{2V} \sum_{(k')} J(k', k; k, k') (u_{k'}^2 - v_{k'}^2) \quad (7.7)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, -k; k', -k') u_{k'} v_{k'}$$

Тогда уравнение (7.6) можно преобразовать в уравнение для  $C(k)$

$$C(k) = \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, -k; k', -k') \frac{C(k')}{2\bar{\epsilon}(k')} \quad (7.8)$$

где

$$\bar{\epsilon}(k) = \sqrt{\epsilon^2(k) + \zeta^2(k)}$$

Кроме того, получим

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\zeta(k)}{\bar{\epsilon}(k)} \right\} \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\zeta(k)}{\bar{\epsilon}(k)} \right\} \quad (7.9)$$

$$u_k v_k = \frac{C(k)}{2\bar{\epsilon}(k)}$$

Уравнение (7.8) всегда имеет тривиальное решение  $C(k) = 0$  и соответственно

$$u_k = \begin{cases} 0 & E(k) < \lambda \\ 1 & E(k) > \lambda \end{cases} \quad v_k = \begin{cases} 1 & E(k) < \lambda \\ 0 & E(k) > \lambda \end{cases}$$

Это решение описывает нормальное, не сверхтекучее состояние. Помимо этого тривиального решения уравнение (7.8) может иметь еще другое, не тривиальное решение, ведущее к сверхтекучему состоянию.

Для простоты ограничимся рассмотрением случая сферически симметричных решений уравнения (7.8). Тогда, переходя в нем от суммы к интегралу, получим

$$c(k) = \int_0^{\infty} K(k, k') \frac{c(k') k'^2 dk'}{\sqrt{c^2(k') + \xi^2(k')}} \quad (7.9)$$

где

$$K(k, k') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} J(k, -k; k', -k') dt \equiv \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-1}^{+1} J(|k|, |k'|, \sqrt{|k|^2 + |k'|^2 - 2|k||k'|t}) dt \quad (7.10)$$

Как было сказано выше, уравнение (7.9) при некоторых  $K(k, k')$  имеет нетривиальное решение. Желая написать условие, которому должно удовлетворять  $K(k, k')$ , чтобы такое решение существовало, поступим следующим образом.

Позволим ядру  $K(k, k')$  плавно меняться от такой формы, при которой нетривиальное решение уравнения (7.9) отсутствует, ~~к~~

до такой, при которой оно имеется. Ввиду непрерывной зависимости нетривиального решения от формы ядра  $K(u, k')$ , при вышеуказанном изменении формы  $K(u, k')$ , нетривиальное решение должно плавно ответвляться от тривиального нулевого решения. Поэтому нам достаточно ограничиться рассмотрением вместо уравнения (7.9) следующего уравнения:

$$C(k) = -2 \ln \frac{C(k_F)}{E'(k_F)} K(k, k_F) k_F^2 \frac{C(k_F)}{E'(k_F)} - \int_0^{\infty} \frac{d}{dk'} [K(k, k') k'^2 C(k') \frac{k' - k_F}{|\zeta(k')|}] \ln 2 |k' - k_F| dk' \quad (7.11)$$

правая часть которого асимптотически при малых  $C$  совпадает с правой частью уравнения (7.9).

Введем теперь новую неизвестную функцию

$$f(k) = - \frac{C(k)}{C(k_F) \ln \frac{C(k_F)}{E'(k_F)}}$$

Обратное соотношение имеет вид

$$C(k) = f(k) \frac{E'(k_F)}{f(k_F)} e^{-\frac{1}{f(k_F)}}$$

Решение  $C(k)$  будет близко к нулю, если  $f(k_F)$  стремится к нулю, оставаясь положительной.

Уравнение для  $f(k)$  имеет вид:

$$f(k) = 2K(k, k_F) - \int_0^{\infty} \frac{d}{dk'} [K(k, k') f(k') \frac{k'^2 E'(k_F)}{k_F^2} \frac{k' - k_F}{|\zeta(k')|}] \ln 2 |k' - k_F| dk' \quad (7.12)$$



Следует отметить, что уравнение (7.12) является линейным интегральным уравнением.

При некоторой форме ядра  $K(k, k')$  решение  $f(k)$  уравнения (7.12) будет таким, что  $f(k_F) > 0$ . При этом нелинейное интегральное уравнение (7.9) будет иметь нетривиальное решение. При другой форме ядра  $K(k, k')$  решение  $f(k)$  будет таким, что  $f(k_F) < 0$ , и уравнение (7.9) не будет иметь нетривиального решения. Таким образом условие того, что имеется неправильное решение, будет

$$f(k_F; K(k, k')) > 0 \quad (7.13)$$

где второй аргумент означает двух функциональную зависимость  $f(k)$  от формы ядра  $K(k, k')$ .

Заметим, кстати, что критерий сверхпроводимости с учетом кулоновского взаимодействия, полученный в § 6.3, легко получается также из условия (7.13).

Обсудим качественно, какая форма взаимодействия  $K(k, k')$  благоприятствует появлению нетривиального решения уравнения (7.9).

Прежде всего, когда  $K(k_F, k_F)$  положительно, (что соответствует притяжению электронов вблизи поверхности Ферми) и достаточно мало,  $f(k_F)$  тоже будет мало и порядка  $K(k_F, k_F)$ , а, следовательно, второе слагаемое в (7.12) с интегральным членом будет более высокого порядка малости, чем первое слагаемое. Система будет обладать свойством сверхтекучестью.

Другой случай, когда нетривиальное решение существует, представляет взаимодействие, локализованное на сфере Ферми. В этом случае перед вторым слагаемым в правой части (7.12) будет стоять малый параметр — отношение длины локализации взаимодействия к радиусу сферы Ферми. Система опять оказывается сверхтекучей. Заметим еще, что жидкость могут обладать ферми-системы с отрицательным ядром  $K(k, k')$  (что соответствует преимущественно силам отталкивания). Необходимо только, чтобы для такого ядра существовали области в  $K$ -пространстве, где ядро быстро меняется. Тогда в этих областях производная, входящая в интегральное слагаемое в правой части (7.12), будет велика, и положительное второе интегральное слагаемое может пересилить отрицательное первое слагаемое.

Оставляя в стороне рассмотрение таких нерегулярных взаимодействий, следует сказать, что свойством сверхтекучести, как правило, обладают ферми-системы с ~~преобладанием~~ преобладанием сил притяжения. В работах Н.Н.Боголюбова по микроскопической теории сверхтекучести бозе-систем<sup>17/</sup> было показано, что для появления сверхтекучести в таких системах необходима как раз обратная ситуация, а именно, преобладание сил отталкивания.

Таким образом, критерии сверхтекучести бозе- и ферми-систем исключают друг друга. Указанное обстоятельство находится в хорошем соответствии с тем, что такая ферми-система, как  $He_3$ , не сверхтекуча. Действительно, вряд-ли молекулярные силы в  $He_3$  существенно отличаются от молекулярных сил в  $He_4$ . Последний

член, являясь бозе-системой, обладает сверхтекучестью.

Вернемся к уравнению (7.II). Приближенным решением его при малых  $C$  будет

$$C(k) = \omega \frac{K(k, k_F)}{K(k_F, k_F)} e^{-\frac{1}{\rho}} \quad (7.I4)$$

где

$$\rho = \frac{k_F^2 K(k_F, k_F)}{(2\pi)^2 E'(k_F)}$$

$$\ln \omega = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{dk'} \left[ \left( \frac{K(k_F, k')}{K(k_F, k_F)} \right)^2 \frac{k'^2}{k_F^2} \frac{(k' - k_F) E'(k_F)}{|E(k') - E(k_F)|} \right] \ln 2 E'(k_F) |k' - k_F| dk' \quad (7.I5)$$

Эти формулы тем лучше описывают решение нелинейного интегрального уравнения (7.II), чем ближе мы находимся к точке ответвления нетривиального решения.

Из непосредственного рассмотрения формул (7.I4), (7.I5) видим, что для асимптотики сверхпроводящего решения от всей формы  $J(k_1, k_2; k'_1, k'_2)$  существенна сравнительно небольшая часть  $J(k, -k; k', -k')$ . Таким образом, мы получили бы в точности те же самые формулы, если бы в уравнении (7.8) сразу положили бы

$$\tilde{\epsilon}(k) = \sqrt{C^2(k) + (E(k) - E(k_F))^2} \quad (7.I6)$$

или, что абсолютное эквивалентно, исходили бы не из гамильтониана (7.4), а из упрощенного гамильтониана:

$$H'_{\text{ред.}} = -\frac{1}{V} \sum_{\substack{k, k' \\ k \neq k'}} J(k, -k; k', -k') a_{-k'} a_{-k} a_{k'} a_{k} \quad (7.17)$$

Более того, уравнение (7.8), (7.16) полностью совпадает с соответствующим уравнением для гамильтониана Фрелиха, если положить

$$J(k, -k; k', -k') = \frac{\tilde{g}^2(k-u) \tilde{\omega}(k-k')}{\tilde{\omega}(k-k') + |E(u) - E(u')| + |E(u') - E(u)|} \quad (7.18)$$

Тем самым оправдывается сведение гамильтониана Фрелиха к упрощенному модельному гамильтониану (7.17), (7.18) в отношении функции  $C(u)$  и связанных с ней величин.

Указанное сведение осуществляется также для гамильтониана Фрелиха с учетом кулоновского взаимодействия. Действительно, согласно § 5.3 для этого необходимо только положить

$$\frac{1}{V} J(k, -k; k', -k') = Q(k, k') \quad (7.19)$$

Рассчитаем теперь энергию основного состояния

$$\begin{aligned} 2 \sum_k (E(u) - \lambda) v_k^2 + \langle \tilde{C}_V H' C_V \rangle &= \\ &= 2 \sum_u (E(u) - \lambda) v_u^2 - \frac{1}{V} \sum_{\substack{u, u' \\ u \neq u'}} J(u, u; u, u') v_u^2 v_{u'}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{V} \sum_{\substack{u, u' \\ u \neq u'}} J(k, -u; u', -k') u_u v_u u_{u'} v_{u'} \end{aligned}$$

Для случая гамильтониана (7.17) эта формула выглядит особенно

просто. Она преобразуется к виду

$$\sum_k \{ E(k) - E(k_F) - \bar{\epsilon}(k) \}$$

где  $\bar{\epsilon}(k)$  дается формулой (7.16). Для разности энергий нормального и сверхпроводящего состояний получим выражения

$$E_N - E_S = \sum_k \{ \bar{\epsilon}(k) - E(k) + E(k_F) \}$$

которое полностью совпадает с аналогичным выражением для гамильтониана Фрелиха, приведенным в § 3.3.

Нам остается еще рассчитать энергию элементарного возбуждения фермиевской ветви спектра. Это можно сделать с помощью формулы:

$$E_e(k) = (E(k) - \lambda)(u_k^2 - v_k^2) + \langle C_v^* \alpha_{k, \frac{1}{2}} H' \alpha_{k, \frac{1}{2}}^{\dagger} C_v \rangle \quad (7.20)$$

в которой при вычислении вакуумного среднего надо иметь в виду, что  $\alpha_{k, \frac{1}{2}}$  нельзя спаривать с  $\alpha_{k, \frac{1}{2}}^{\dagger}$ . Заметим далее, что если бы мы заметили в формуле (7.20) спиновой индекс  $+\frac{1}{2}$  на  $-\frac{1}{2}$ , то, конечно, получили бы тот же самый результат вследствие инвариантности гамильтониана (7.4) относительно этого преобразования. Раскрывая формулу (7.20), найдем

$$E_e(k) = \zeta(k)(u_k^2 - v_k^2) + \frac{2}{V} \sum_{k'} J(k, k'; k', -k') u_k v_k u_{k'} v_{k'}$$

что с использованием (7.9) можно преобразовать к виду

$$E_e(k) = \bar{\epsilon}(k) \quad (7.21)$$

Таким образом, введенная нами величина  $\bar{\epsilon}(k)$  является ни чем иным, как энергией элементарного возбуждения.

Для случая гамильтониана (7.17) формулу (7.21) можно записать в виде

$$E_e^s(k) = \sqrt{(E_e^n(k))^2 + c^2(k)} \quad (7)$$

который полностью аналогичен соотношению для гамильтониана Фрелиха в § 3.3. До сих пор мы исследовали гамильтониан (7.4) помощью принципа компенсации "опасных" диаграмм. При этом мы ограничивались первым порядком теории возмущений и использовали указанный принцип в форме (7.5). Можно показать, однако, что учет высших порядков теории возмущений в основное уравнение для  $C(k)$  ничего принципиально нового не вносит. Это было подробно продемонстрировано в работе В.В.Толмачева и С.В.Тяблкова /19/.

Действительно, во втором порядке принцип компенсации "опасных ~~диаграмм~~ <sup>диаграмм</sup>" принимает форму:

$$2(E(k)-\lambda)u_k v_k - \langle C_k \alpha_{k, \frac{1}{2}} \alpha_{k, -\frac{1}{2}} (H' - H' H_0^{-1} H') C_k \rangle_{\text{комп.}} = 0 \quad (7)$$

Значок "комп." указывает на то, что помимо учета диаграммы первого порядка, изображенной на фиг.16, необходимо заботиться только о диаграмме второго порядка, изображенной на фиг.17.



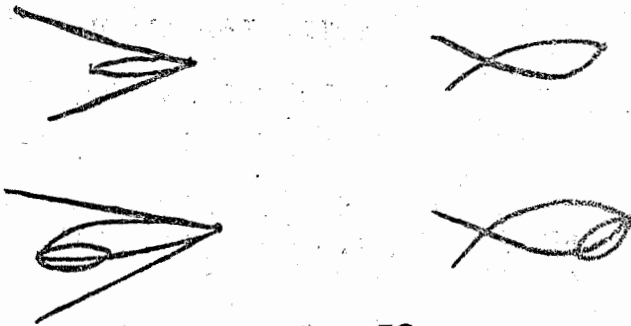
Фиг.16



Фиг.17

Эти диаграммы описывают порождение из вакуума четырех частиц и последующее превращение трех частиц в одну. Диаграмм

второго порядка, изображенных на фиг.18, специально компенсировать нет необходимости, так как в силу установленного правила компенсации они будут автоматически скомпенсированы с диаграммами третьего порядка, изображенными на той же фигуре.



Фиг.18

Раскрывая уравнения (7.23) и ограничиваясь для простоты случаев локализованного и постоянного вблизи поверхности Ферми ядра  $J(k_1, k_2; k'_1, k'_2)$  будем иметь

$$2 \left\{ \bar{\zeta}(k) - \left(\frac{J}{V}\right)^2 \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ k_2 - k_1 + k_3 = k}} \frac{\{u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 - (u_{k_1} v_{k_2})(u_{k_3} v_{k_3})\} (u_{k_1}^2 - v_{k_2}^2)}{|\bar{\zeta}(k_1)| + |\bar{\zeta}(k_2)| + |\bar{\zeta}(k_3)| + |\bar{\zeta}(k)|} \right\} u_k v_k =$$

$$= (u_k^2 - v_k^2) \left\{ \frac{J}{V} \sum_k u_k v_k + \left(\frac{J}{V}\right)^2 \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ k_2 - k_1 + k_3 = k}} \frac{u_k v_k \{ (u_{k_1} v_{k_2})(u_{k_3} v_{k_3}) - u_{k_1}^2 v_{k_2}^2 \}}{|\bar{\zeta}(k_1)| + |\bar{\zeta}(k_2)| + |\bar{\zeta}(k_3)| + |\bar{\zeta}(k)|} \right\}$$

где  $\bar{\zeta}(k) = E(k) - E(k_F)$

Отсюда непосредственно видно, что поправочные члены с  $J^2$  фактически являются еще более малыми, так как содержат произведения  $uv$  с одним и тем же индексом. Последние же дают экспоненциально малый вклад и, как можно видеть, не меняют асимпто-

тики, найденной ранее.

7.3. Коллективные возбуждения. Влияние кулоновского взаимодействия. Перейдем теперь к рассмотрению коллективной ветви гамильтониана (7.4). Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в § 4.2 для коллективной ветви гамильтониана Фрелиха, мы приходим к необходимости диагонализации квадратичной формы:

$$\Gamma = \sum_{k,p} \{ \bar{\epsilon}(k+p) + \bar{\epsilon}(k) \} \beta_p(k) \beta_p(k) + \Gamma' \quad (7.24)$$

где

$$\Gamma' = \sum_{\substack{k,k',p \\ k \neq k'}}^+ \beta_p(k) \beta_p(k') A_p(k,k') + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,k',p \\ k \neq k'}} \beta_p(k) \beta_p(k') B_p(k,k') + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k,k',p \\ k \neq k'}}^+ \beta_p(k') \beta_p(k) B_p(k,k') \quad (7.25)$$

В свою очередь коэффициенты  $A_p(k,k')$  и  $B_p(k,k')$  связаны с матричными элементами исходного гамильтониана посредством соотношений

$$A_p(k,k') = \langle C_v^* \alpha_{k_1} \alpha_{k+p,0}^+ H' \alpha_{k+p,0}^+ \alpha_{k_1} C_v \rangle \quad (7.26)$$

$$B_p(k,k') = \langle C_v^* \alpha_{k_1} \alpha_{k+p,0} \alpha_{k_1} \alpha_{k+p,0}^+ H' C_v \rangle$$

для которых так же, как в § 4.2 можно получить явные выражения.

В случае ферми-газа со слабым притяжением мы имеем по существу ту же ситуацию, что и в § 4. Почти дословно повторяя приведенные там рассуждения, мы можем убедиться в существовании



коллективных возбуждений разных типов как продольных, так и поперечных.

В настоящем разделе мы займемся обсуждением влияния кулоновского взаимодействия между электронами на коллективные возбуждения, исследованные в §§ 4.3, 4.4 для гамильтониана Фрелиха. При этом, желая получить хотя бы грубое представление об имеющейся здесь ситуации, мы ограничимся рассмотрением гамильтониана:

$$H = \sum_{(k,s)} (E(k) - \lambda) a_{ks}^{\dagger} a_{ks} + H' \quad (7.27)$$

$$H' = \frac{1}{2V} \sum_{(s_1, s_2)} \sum_{\substack{k_1, k_2, k'_1, k'_2 \\ (k_1 + k_2 = k'_1 + k'_2) \\ k_1 \neq k'_1}} \{-J(k_1, k'_1) + v(|k'_1 - k_1|)\} a_{k_2, s_2}^{\dagger} a_{k_2, s_2} a_{k'_1, s_1} a_{k_1, s_1}$$

Взаимодействие  $J(k, k')$  представляет прямое притяжение между электронами, возникшее из электронно-фононного взаимодействия и сосредоточенное вблизи поверхности Ферми. Взаимодействие  $v(|k' - k|)$  описывает кулоновское отталкивание электронов.

Вычисляя матричные элементы (7.26) для гамильтониана (7.27), получим

$$A_p(k, k') = \frac{1}{V} \{-J(k+p, k+p) + v(|k-k|)\} L(k, k') L(k+p, k+p) +$$

$$+ \frac{1}{V} \{-J(k, k+p) + v(|p|)\} M(k', k'+p) M(k, k+p)$$

$$B_p(k, k') = \frac{1}{V} \{-J(k', k'-p) + v(|p|)\} M(k, k+p) M(k', k'-p) -$$

$$- \frac{1}{V} \{-J(k, k'-p) + v(|k-k'|)\} M(k', k+p) M(k, k'-p)$$

Эти выражения еще достаточно сложны. Мы можем, однако, рассмотреть случай малых  $p$ . При этом в членах, содержащих  $v(p)$ , можно его только и оставить, так как при малых  $p$  кулоновское  $v(p)$  имеет сильную особенность. Наоборот, в остальных членах  $v(k-k')$  можно объединить с фононным взаимодействием, так как в рассматриваемых коллективных возбуждениях существенны лишь большие передачи импульсов  $k-k'$  и, кроме того, как показывают рассуждения в § 6.3 в подобных выражениях, где кулоновское отталкивание входит суммарно с фононным притяжением, оно обязательно, заэкранировано.

Таким образом,

$$A_p(k, k') = - \frac{J(k, k')}{V} L(k, k') L(k+p, k+p) + \frac{v(p)}{V} M(k, k+p) M(k', k'+p) \\ B_p(k, k') = \frac{J(k, k')}{V} M(k', k+p) M(k, k'-p) + \frac{v(p)}{V} M(k, k+p) M(k', k'-p) \quad (7.28)$$

Секулярные уравнения, соответствующие (7.28), примут вид

$$\left( \bar{\epsilon}(k) + \frac{\bar{\epsilon}(k+p) + \bar{\epsilon}(k-p)}{2} \right) \mathcal{D}_p(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k+p) + L(k-p, k-p)}{2} \right. \\ \left. - \frac{M(k', k+p) M(k, k'-p) - M(k', k-p) M(k, k'+p)}{2} \right\} \mathcal{D}_p(k') + \\ + \frac{v(p)}{2V} \sum_k \left\{ M(k, k+p) M(k, k'+p) + M(k', k'-p) M(k, k-p) + M(k, k+p) M(k', k'-p) + M(k, k-p) M(k', k'+p) \right\} \mathcal{D}_p(k)$$

$$\begin{aligned}
& \left( E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right) \theta_p(k) + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} + \right. \\
& + \frac{M(k', k+p) M(k, k'-p) - M(k', k-p) M(k, k'+p)}{2} \left. \right\} \theta_p(k') - \\
& - \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \left\{ M(k, k+p) M(k', k'+p) - M(k', k-p) M(k, k-p) - \right. \\
& \left. - M(k, k+p) M(k, u-p) + M(k, u-p) M(u', k'+p) \right\} \theta_p(u') \quad (7.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \bar{\varepsilon}(u) + \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) + \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right) \theta_p(k) - \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) + L(k-p, k'-p)}{2} + \right. \\
& + \frac{M(k', k+p) M(k, k'-p) + M(k', k-p) M(k, k'+p)}{2} \left. \right\} \theta_p(k') + \\
& + \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \left\{ M(k, u+p) M(k', k'+p) + M(k', k'-p) M(k, k-p) - \right. \\
& \left. - M(k, k+p) M(k', k-p) - M(k', k'+p) M(k, k-p) \right\} \theta_p(u') = \\
& = \left( E - \frac{\bar{\varepsilon}(k+p) - \bar{\varepsilon}(k-p)}{2} \right) \theta_p(k) + \frac{1}{V} \sum_{k'} J(k, k') \left\{ L(k, k') \frac{L(k+p, k'+p) - L(k-p, k'-p)}{2} - \right. \\
& - \frac{M(k', k+p) M(k, k'-p) - M(k', k-p) M(k, k'+p)}{2} \left. \right\} \theta_p(k') - \\
& - \frac{\nu(p)}{2V} \sum_{k'} \left\{ M(k, k+p) M(k', k'+p) - M(k', k'-p) M(k, k-p) + \right. \\
& \left. + M(k, u+p) M(k', k'-p) - M(k, k-p) M(k', k'+p) \right\} \theta_p(k')
\end{aligned}$$

Эти секулярные уравнения отличаются от приведенных в § 4.2, 4.3, 4.4 уравнений (4.10), (4.11) дополнительными членами с кулоновским взаимодействием.

Из структуры этих членов без дальнейшей дискуссии сразу ясно, что так называемые поперечные волны § 4.4 обращают эти члены в нуль. Мы приходим, таким образом, к важному заключению, влияние <sup>го</sup> что кулоновское взаимодействие <sup>§</sup> ~~никогда не влияет на поперечные коллективные возбуждения.~~ *сводится лишь к излучательному эрмитовому взаимодействию  $T(k, k')$ .*

Дело обстоит сложнее в продольных коллективных возбуждениях. Здесь вопрос остается во многом неясным. Несомненно одно, что секулярные уравнения имеют обычную плазменную ветвь коллективных возбуждений. В этом можно легко убедиться, оставляя в (7.29), (7.30) только члены с кулоновским взаимодействием.

Удобно при этом будет перейти от функций  $\varphi, \theta$  и первоначальным функциям  $\psi, \chi$ . Для них будем иметь секулярные уравнения

$$\begin{aligned} \{ \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+p) - E \} \varphi_p(k) &= \frac{v(p)}{v} M(k, k+p) \sum_{k'} M(k', k+p) \varphi_p(k') + \\ &+ \frac{v(p)}{v} M(k, k+p) \sum_{k'} M(k', k-p) \chi_p(k') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{ \tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k-p) + E \} \chi_p(k) &= \frac{v(p)}{v} M(k, k-p) \sum_{k'} M(k', k-p) \chi_p(k') + \\ &+ \frac{v(p)}{v} M(k, k-p) \sum_{k'} M(k', k+p) \varphi_p(k') \end{aligned}$$

которые легко разрешаются, и приходим к следующему уравнению для определения  $E$ :

$$1 = -\frac{\nu(p)}{\nu} \left\{ \sum_k \frac{M^2(k, k+p)}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k+p) - E} + \sum_k \frac{M^2(k, k-p)}{\tilde{\epsilon}(k) + \tilde{\epsilon}(k-p) + E} \right\} \quad (7.31)$$

При малых  $p$  можно оставить в уравнении (7.31) только сильную зависимость от  $p$  через  $\nu(p)$ , стоящее перед суммами. Тогда получим

$$1 = -\frac{\nu(p)}{\nu} \sum_k M^2(k, k) \frac{\nu \tilde{\epsilon}(k)}{4\tilde{\epsilon}^2(k) - E^2} \quad (7.32)$$

Из (7.32) непосредственно ясно, что при  $p = 0$  его собственное значение уходит в положительную бесконечность.

При

больших  $p$  мы в праве заменить в уравнении (7.31)

$u_k, v_k$  их нормальными значениями:

$$u_k = \theta_F(k), \quad v_k = \theta_F(k)$$

Тогда (7.31) можно преобразовать к виду

$$1 = \frac{2\nu(p)}{\nu} \left\{ \sum_{\substack{|k| < k_F \\ |k-p| > k_F}} \frac{1}{k E - E(k-p) + E(k)} + \sum_{\substack{|k| < k_F \\ |k+p| > k_F}} \frac{1}{-E - E(k+p) + E(k)} \right\} \quad (7.33)$$

который полностью соответствует плазменному секулярному уравнению Савада<sup>/13/</sup>. Мы должны, таким образом, заключить, что уравнение (7.31) описывает обычные плазменные колебания с сильно деформированной при малых импульсах  $p$  частотой. Эта весьма интересная

дисперсия плазменной частоты при малых  $\rho$  оказывается характерным свойством сверхпроводников и может послужить основой для экспериментального определения входящей в теорию величины  $C$ .

В каком соответствии находится указанная плазменная ветвь к продольным коллективным возбуждениям недостаточно ясно. Может

предполагаться, что фактически это единственная ветвь спектра и никаких особых продольных коллективных возбуждений не существует.

Есть основания, однако, считать, что такие возбуждения состав-

ляют самостоятельную ветвь спектра, по существу, ту самую про-

дольную ветвь, которая была изучена в § 4.3. Другими словами,

воздействие кулоновского взаимодействия также и на продольные коллективные возбуждения может оказаться мало эффективным. В самом

деле, рассмотрим случай, когда  $\mathcal{J}(k, k')$  можно заменить константой внутри некоторой области вблизи сферы Ферми. В этом случае

секулярные уравнения возможно разрешить, так как все ядра в

интегральных членах факторизуются. При этом опять удобно вернуться

к начальным функциям  $\psi, \chi$ . Введем вместо них следующие

комбинации:

$$x = \frac{1}{V} \sum' \{ u_k u_{k+r} \psi_r(k) - v_k v_{k+r} \chi_r(k) \}$$

$$y = \frac{1}{V} \sum' \{ v_k v_{k+r} \psi_r(k) - u_k u_{k+r} \chi_r(k) \}$$

$$z = \frac{1}{V} \sum' \{ u_k v_{k+r} \psi_r(k) + u_k v_{k-r} \psi_r(k) \}$$

$$\eta = \frac{1}{V} \sum' \{ v_k u_{k+r} \psi_r(k) + v_k u_{k-r} \chi_r(k) \}$$

$$S = \frac{1}{V} \sum \{ M(k, k+p) \varphi_p(k) + M(k, k-p) \chi_p(k) \}$$

где суммирование ведется по  $K$ ; а штрих при сумме означает, что при суммировании следует ограничиться областью локализации взаимодействия  $J(k, k')$ . Секулярные уравнения (7.29), (7.30) превращаются в пять линейных однородных уравнений относительно пяти неизвестных  $X, Y, Z, \eta$  и  $S$ . Составляя детерминант этой системы, мы получим уравнение для определения  $E$ . Здесь мы не станем выписывать этот детерминант, а укажем только, что асимптотически при  $S \rightarrow 0$  этот детерминант распадается на произведение двух сомножителей, один из которых ведет к уравнению (7.31), а другой - не содержит вовсе кулоновского взаимодействия и в точности соответствует задаче с опущенным кулоновским взаимодействием, т.е. задаче, рассмотренной в § 4. Таким образом, мы приходим к заключению, что по крайней мере асимптотически при  $S \rightarrow 0$  продольные решения секулярных уравнений (7.29), (7.30) составляют две ветви: одна - это обычные плазменные колебания с сильно деформированной плазменной частотой при малых  $\nu$  и другая - это продольные коллективные возбуждения, изученные в § 4.3. Подчеркнем еще раз предварительность указанного результата.

## § 8. Заключение

8.1. Термодинамика и электродинамика сверхпроводящего состояния. До сих пор мы ограничивались рассмотрением основного состояния и элементарных возбуждений. Не представляет особых затруднений получить термодинамические формулы. Заметим прежде всего, что коллективные возбуждения, о которых мы говорили, не являются в данном случае существенными. Благодаря малости максимально возможного импульса коллективных возбуждений ими можно пренебречь при расчете термодинамических функций (при отсутствии тока и магнитного поля).

В самом деле, эффективный импульсный объем фермионных возбуждений здесь будет пропорционален величине

$$K \rho \Delta$$

где  $c$  — скорость звука на поверхности Ферми, а соответствующий объем для коллективных возбуждений будет гораздо более высокого порядка малости

$$\frac{\Delta^3}{c^3}$$

Поэтому для получения термодинамических формул можно исходить из гамильтониана, в котором оставлены только парные взаимодействия и который, как мы выше видели, правильно передает основное состояние и элементарные возбуждения однофермионного типа. Такой гамильтониан еще имеет еще ту любопытную особенность, что допускает точный расчет свободной энергии. Такой расчет был произведен в работе Н.Н.Боголюбова, Д.Н.Зубарева и Ю.А.Церковникова /20/. Из



этого расчета в том приближении, когда  $\mathbf{J}$  заменяется постоянной вблизи поверхности Ферми, легко получаются формулы Бардина, Купера и Шриффера, которые эти авторы получили вариационным принципом.

Несколько сложнее обстоит дело с вопросом о получении уравнений электродинамики. Здесь надо учитывать, что систематическое движение электронов всегда связано с магнитным полем и, кроме того, что сверхпроводники обладают специфическими магнитными свойствами, примером которых может служить эффект Мейсснера.

Если ограничиться случаем слабых ~~взаимодействий~~ магнитных полей, то естественно искать связь между током и векторным потенциалом в линейной форме.

Известны два типа таких соотношений, которые были получены из феноменологических соображений — уравнения Лондона и уравнения Пипларда. Уравнения Лондона локальны;  $\vec{j}(\mathbf{x})$  в них пропорционален  $\vec{A}(\mathbf{x})$  в той же точке пространства. В более общих уравнениях Пипларда  $\vec{j}(\mathbf{x})$  и  $\vec{A}(\mathbf{x})$  связываются интегральным соотношением.

Нетрудно видеть, даже не производя никаких вычислений, что в нашей теории, в линейном приближении благодаря наличию пространственной корреляции между электронами должны получаться уравнения типа Пипларда. Соответствующие интегральные ядра должны быть размазаны по пространству с линейными размерами, характеризуемыми характерной длиной корреляции частиц с противоположными спинами

Здесь и возникает существенная трудность. Дело в том, что для получения уравнений электродинамики следует учесть наличие коллективных колебаний, особенно поперечных. С другой стороны, и это самое главное, необходимо учесть наличие границ, так как пространственная корреляция между электронами в сверхпроводящем состоянии достигает размеров  $10^{-4}$ – $10^{-5}$  см., а магнитное поле проникает в сверхпроводник на расстояние порядка  $10^{-5}$  см.

Поясним сказанное относительно размеров пространственной корреляции. Для этого вычислим парную корреляционную функцию  $F_2(x, x'; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  для электронов с противоположными спинами при нулевой температуре.

Пользуясь обычным определением корреляционной функции имеем

$$F_2(x, x'; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = \langle \psi_{\frac{1}{2}}^{\dagger}(x) \psi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger}(x') \psi_{-\frac{1}{2}}(x') \psi_{\frac{1}{2}}(x) \rangle$$

где

$$\psi_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}, \frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{k}, x)}, \quad \psi_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}, -\frac{1}{2}} e^{i(\mathbf{k}, x)}$$

— вторично квантованные волновые функции. Усреднение ведется по вакууму, соответствующему числам заполнения  $\alpha_{\mathbf{k}, \frac{1}{2}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}, \frac{1}{2}}, \alpha_{\mathbf{k}, -\frac{1}{2}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}, -\frac{1}{2}}$

Выражая операторы  $a_{\mathbf{k}, s}$  через  $\alpha_{\mathbf{k}, s}$  и  $\alpha_{\mathbf{k}, s}^{\dagger}$  с помощью канонического преобразования, получим

$$F_2(x-x'; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = V^{-2} \left( \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 \right)^2 + V^{-2} \left| \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}(x-x')} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ n_0^2 + \frac{1}{V^2} \left| \sum_{\mathbf{k}} \frac{c(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}(x-x')}}{\sqrt{c^2(\mathbf{k}) + \xi^2(\mathbf{k})}} \right|^2 \right\}$$

где  $n_0 = 2V^{-1} \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2$  — плотность электронов.

Мы видим отсюда, что в случае нормального состояния, когда  $C(\mathbf{k}) = 0$  ( $u_{\mathbf{k}}v_{-\mathbf{k}} = 0$ ) корреляция электронов с противоположными спинами отсутствует.

В сверхпроводящем состоянии произведение  $u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}$  существенно отлично от нуля лишь в области  $\Delta_{\mathbf{k}}$  вблизи поверхности Ферми, где  $\Delta_{\mathbf{k}}$  определяется соотношением

$$|E(\mathbf{k}_F + \Delta_{\mathbf{k}}) - E_F| \geq C(\mathbf{k}_F), \quad \text{т.е.}$$

$$\Delta_{\mathbf{k}} \sim \frac{C(\mathbf{k}_F) k_F}{E_F} \sim 10^{-4} \text{ см}^{-1}$$

Откуда для длины корреляции  $\Delta X$  из соотношения неопределенностей получим следующую оценку

$$\Delta X \sim \frac{1}{\Delta_{\mathbf{k}}} \sim 10^{-4} \text{ см}$$

Заметим, что корреляционная функция для электронов с одинаковыми спинами

$$F_2(x-x'; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} v_{\mathbf{k}_1}^2 v_{\mathbf{k}_2}^2 (1 - e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)(x-x')})$$

определяется, с основным, обменным эффектом и практически одинакова для нормального и сверхпроводящего состояния.

Ограничимся самым грубым вариантом и не будем учитывать ни эффекты границы, ни эффекты коллективных колебаний. При этом более последовательно было бы иметь дело с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{k,s} \left( k - \frac{e}{c} A \right)^2 + \mu \mathcal{H} + H_{int}$$

с постоянными  $A$  и  $\mathcal{H}$ . Таким образом мы получили бы уравнения типа Лондона с нелинейной зависимостью длины проникновения от магнитного поля.

Чтобы усовершенствовать теорию и получить какую-либо информацию о функциях Пиппарда, кроме чисто качественной, необходимо работать с полным гамильтонианом, учитывающим взаимодействие пар не только с противоположными импульсами и спинами, и обязательно принимать во внимание существование границы.

8.2. Качественная картина явления сверхпроводимости. Скажем в заключение несколько слов относительно физической природы сверхтекучего или сверхпроводящего состояния  $C_s$ . Ввиду того, что  $\alpha_k$  представляют амплитуды для суперпозиции частиц и дырок  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ , сфера Ферми вообще расширяется. Появляются характерные корреляции между частицами  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$  и дырками  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ . Наглядно можно представить себе положение следующим образом, — имеется притяжение как между частицами  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ , так и между дырками  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ . Поэтому с точки зрения энергии взаимодействия выгодно разбивать сферу Ферми дырками  $(\pm k, \pm \frac{1}{2})$ . С другой стороны, такое расширение невыгодно для кинетической энергии. Эффективный баланс этих обоих фактов и приводит к наименьшему энергетическому состоянию.

В нормальном состоянии, если взять достаточно высокое приближение, мы всегда можем заметить наличие корреляции между частицами и импульсами  $k+q, -k$ , но при этом значение  $q = 0$  ничем не будет выделено. В состоянии же  $C_S$  здесь имеет место разрыв. В связи с этим понятно, например, такое обстоятельство, что член взаимодействия типа

$$\frac{1}{V} \sum J(k, k') a_{k,+}^{\dagger} a_{-k,-}^{\dagger} a_{-k',-} a_{k',+}$$

который при  $V \rightarrow \infty$  вносит бесконечно малый вклад в случае нормального состояния, является весьма существенным для  $C_S$ . Нельзя, разумеется, чрезмерно упрощать положение и говорить о связанных парах частиц. Действительно, если отнестись серьезно к такому представлению и подсчитать энергию связи пары, то мы найдем, что это будет величина того же порядка, что и энергия взаимодействия пар друг с другом.

На самом деле мы имеем связанный коллектив того же типа как и для бозе-систем. Если воспользоваться несколько неясной, но обладающей теперь определенной "квази-наглядностью", терминологией квантовой теории поля, можно говорить о виртуальных парах и рассматривать  $C_S$  как связанный бозе-конденсат из таких виртуальных пар.

Аналогия с бозе-системами подчеркивается еще тем обстоятельством, что кроме однофермионных возбуждений, соответствующих

выпадению из коллектива отдельных частиц, имеются и возбуждения всего коллектива в целом.

Наличие корреляции между частицами в импульсном пространстве естественно приводит к появлению "корреляционного облака" в обычном пространстве.

Любопытна структура этого "облака" в случае сверхпроводящего состояния. Электрон с определенным спином здесь окружен дырками быстро экранирующими его заряд, на расстояниях порядка  $10^{-7}$  см. На гораздо более далеких расстояниях порядка  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$  см. имеется слабое ~~притяжение~~<sup>взаимное</sup> ~~притяжение~~ электронов с противоположными спинами из-за наличия притяжения. ~~СОБЛАДА~~

Авторы выражают глубокую признательность Д.Н.Зубареву, С.В.Тябликову и Ю.А.Церковникову за ценные обсуждения и полезные советы.

ПРИЛОЖЕНИЕ I<sup>x</sup>)К вопросу об условиях сверхтекучести в  
Теории ядерной материи.

В § 7 мы отмечали, что система из ферми-частиц может обладать свойством сверхтекучести при некоторых условиях, сводящихся, грубо говоря, к условиям преобладания сил притяжения. Ввиду этого естественно рассмотреть вопрос о сверхтекучести ядерной материи.

Такой вопрос, однако, существенно осложняется тем обстоятельством, что ядерные взаимодействия являются сильными и их нельзя трактовать с помощью теории возмущений, приводящей к рядам, расположенным по степеням интенсивности взаимодействия. Наиболее последовательный подход можно было бы получить путем обобщения методики § 5, требующей выполнения суммирования диаграмм. Ввиду сложности строгого проведения подобной программы мы считаем целесообразным для целей получения предварительных оценок рассмотреть некоторую упрощенную модель, допускающую точную интеграцию.

В соответствующей теории ядерной материи считается, что нуклоны в ядерной материи можно приближенно считать свободными. Влияние сил взаимодействия в основном сводится к эффективному изменению зависимости энергии нуклона от импульса. В ядерной

x) Изложение Приложения I основано на работе Н.Н.Боголюбова /21/

материи энергия нуклона уже не равна  $\frac{p^2}{2M}$ , а представляется иной функцией  $E(p)$ , которую обычно аппроксимируют выражением типа

$$E(p) \sim \frac{p^2}{2M_{\text{eff}}} + V, \quad V < 0$$

В такой схеме основное состояние ядерной материи представляется волновой функцией  $\psi_n$ , соответствующей обычной сфере Ферми: все состояния с  $E(p) < E_F$  заполнены, остальные - пусты.

Ввиду этого рассмотрим модельную динамическую систему с гамильтонианом:

$$H = \sum_{k\sigma} \{E(k) - E_F\} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + \frac{1}{2V} \sum_{(k, k', \dots, \sigma, \dots)} J_1(k, k' | \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2', \sigma_1') a_{k\sigma_1}^\dagger a_{-k\sigma_2}^\dagger a_{-k'\sigma_2'} a_{k'\sigma_1'} \quad (\text{I.I})$$

Здесь  $\sigma$  - представляет дискретный индекс, характеризующий спин и изотопический спин нуклона,  $E_F$  - параметр, играющий роль химического потенциала; в нормальном состоянии он равен энергии Ферми, ввиду чего для него и принято подобное обозначение,  $V$  - объем системы.

Неполнота, "модельность" такого гамильтониана обусловлена тем, что в нем учитываются только взаимодействия пар частиц с противоположными импульсами.

Нетрудно заметить, что принятый здесь гамильтониан взаимодействия  $H'$  не эффективен в состоянии  $\psi_n$ . Действительно, вычислив



$$\langle H^2 \rangle_c$$

найдем, что эта величина остается конечной, когда  $V \rightarrow \infty$ , тогда как энергия должна быть пропорциональной  $V$  в процессе такого предельного перехода<sup>х)</sup>.

Можно поэтому считать, что в рассматриваемой модели мы явно учитываем только взаимодействия, эффективные лишь в особом "сверхтекучем" состоянии  $C_s$ , всю же остальную "регулярную" часть взаимодействия учитываем через посредством ее влияния на энергию нуклона  $E(k)$ .

Покажем сейчас, что это состояние  $C_s$  можно найти в нашей схеме асимптотически точно для процесса предельного перехода:

$V \rightarrow \infty$  и дать условия его существования. Для удобства записи целесообразно ввести вместо импульсного индекса  $k$  индекс  $q$  пары  $(k, -k)$ ;  $q$  и  $-q$  описывают одну и ту же пару; суммирование по  $q$  понимается как суммирование по различным парам.

При этом очевидно потребуются ввести еще дополнительный индекс

$\rho = \pm 1$  и  $k$  описывать как  $(q, \rho)$ . Целесообразно  $\rho$ , как дискретный индекс, соединить вместе с  $\sigma$  и положить

$s = (\sigma, \rho)$ . В таких обозначениях рассматриваемый гамильтониан (I.I) представится в следующей форме:

$$H = \sum_{q_0} \{ E(q) - E_F \} a_{q_0}^\dagger a_{q_0} + \frac{1}{2V} \sum_{(q_1, q_2, \dots, s_1, s_2, s_1', s_2')} I(q_1, q_2 | s_1, s_2, s_1', s_2') a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger a_{q_1'} a_{q_2'}$$
(I.2)

х) Можно показать также, что, если применить к (I.I) теорию возмущений, исходя из состояния  $C_n$ , то в разложении для энергии поправочный член любого порядка окажется бесконечно малым при  $V \rightarrow \infty$

Воспользуемся вариантом приема заметки /20/, предложенным Д. П. Зубаревым и Ю. А. Церковниковым. Введем какие-то  $C$ -функции  $A_q(s_1, s_2)$  и запишем гамильтониан (I.2) в виде:

$$H = U_0 + H_0 + H_1$$

где

$$U = \epsilon_{\text{const}} = -\frac{1}{2V} \sum I(q, q') s_1, s_2, s'_1, s'_2 \overset{*}{A}_q(s_1, s_2) \overset{*}{A}_{q'}(s'_1, s'_2)$$

$$H_0 = \sum_q H_q; \quad H_1 = \frac{1}{2V} \sum I(q, q') s_1, s_2, s'_1, s'_2 \overset{+}{B}_q(s_1, s_2) \overset{+}{B}_{q'}(s'_1, s'_2)$$

причем

$$\begin{aligned} H_q = & (E(q) - E_F) \sum_s \overset{+}{a}_{qs} a_{qs} + \\ & + \frac{1}{2V} \sum \left\{ I(q, q') s_1, s_2, s'_1, s'_2 \overset{+}{A}_{q'}(s'_1, s'_2) \overset{+}{a}_{qs_1} \overset{+}{a}_{qs_2} + \right. \\ & \left. + I(q', q) s_1, s_2, s'_1, s'_2 \overset{*}{A}_q(s_1, s_2) \overset{*}{a}_{qs'_1} \overset{*}{a}_{qs'_2} \right\} \end{aligned} \quad (I.3)$$

$$\overset{+}{B}_q(s_1, s_2) = a_{qs_2} a_{qs_1} - A_q(s_1, s_2)$$

Так как  $H_q$  является квадратичной формой из ферми-операторов, то ее диагонализация совершается элементарно с помощью линейного канонического преобразования:

$$a_{qs} = \sum_{s'} \left\{ u(q, s, s') \overset{+}{a}_{qs'} + v(q, s, s') \overset{+}{a}_{qs'} \right\} \quad (I.4)$$

Входящие сюда функции  $u, v$  должны удовлетворять соотношениям ортонормированности

$$\begin{aligned} \delta_{s, s'} & \equiv \sum_{s''} \left\{ \overset{*}{u}(q, s, s'') \overset{*}{u}(q, s', s'') + \overset{*}{v}(q, s, s'') \overset{*}{v}(q, s', s'') \right\} = \delta_{s, s'} \\ \eta & \equiv \sum_{s''} \left\{ \overset{*}{u}(q, s, s'') \overset{*}{v}(q, s', s'') + \overset{*}{v}(q, s, s'') \overset{*}{u}(q, s', s'') \right\} = 0 \end{aligned} \quad (I.5)$$

Определив  $u, v$  из секулярных уравнений, соответствующих форме (I.3), приведем ее к виду

$$H_1 = \Gamma_1 + \sum_s \varepsilon_s(q) \alpha_{qs}^\dagger \alpha_{qs}$$

Поэтому у гамильтониана  $H_0$  основное состояние  $C_0$  будет вакуумным состоянием для новых фермионных амплитуд:

$$\alpha_{ks} C_0 = 0$$

Подберем теперь  $\epsilon$ -функции  $A$  таким образом, что

$$\langle C_0^\dagger B_q(s, \omega) C_0 \rangle = 0$$

и примем во внимание тот важный факт, что  $H_1, B_q, B_q^*$  соответствующие различным  $q$ , все коммутируют между собой.

Тогда с помощью рассуждения, приведенного в /20/, нетрудно показать, что вклад в энергию основного состояния, происходящий от  $H_1$ , становится пренебрежимо малым по сравнению с вкладом от  $U_0 + H_0$  при  $V \rightarrow \infty$ . Грубо говоря, это положение обусловлено тем обстоятельством, что  $\overline{H_1^2}$  остается конечным при  $V \rightarrow \infty$ , тогда как энергия пропорциональна  $V$ .

Итак, соответствующим подбором функций  $u, v$  можно добиться того, что среднее значение  $\overline{H} = \langle C_0^\dagger H C_0 \rangle$  асимптотически точно представляет энергию основного состояния для рассматриваемого гамильтониана  $H$ .

Отсюда вытекает, что фактическое определение  $u, v$  можно произвести следующим образом: подставляем формулы преобразования (I.4) в выражение  $\bar{H}$  и находим:

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \sum_{q,s} (E(q) - E_F) \sum_{s'}^* v(q,s,s') v(q,s,s') + \\ & + \frac{1}{2V} \sum_{(q,q',\dots,s,\dots)} I(q,q' | s_1, s_2, s'_1, s'_2) \left\{ \sum_{s_1}^* v(q,s_1,s) u(q,s_2,s) \right\} \left\{ \sum_{s_2} u(q,s'_2,s) v(q,s'_1,s) \right\} = \\ & = \mathcal{E}(u,v) \end{aligned} \quad (I.6)$$

Тогда  $u, v$  мы должны определить из условия минимума формы  $\mathcal{E}(u,v)$  при наличии дополнительных условий (I.5). Для таких  $u, v$  выражение  $\mathcal{E}$  и дает искомое значение энергии основного состояния.

Соответствующее уравнение стационарности будет

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{E}} = \\ = \delta \left\{ \mathcal{E} + \sum_{q,s,s'} (\lambda(q,s,s') \xi(q,s,s') + \mu(q,s,s') \eta(q,s,s') + \mu^*(q,s,s') \eta^*(q,s,s')) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (I.7)$$

где  $\lambda, \mu$  - эйлеровские множители. Легко заметить, что это уравнение всегда допускает тривиальное решение

$$\begin{aligned} u_q = \theta_G(q) \delta_{ss'} \quad v_q = \theta_F(q) \delta_{ss'} \\ \mu = 0 \quad \lambda = \theta_F(q) (E_F - E(q)) \delta_{ss'} \end{aligned} \quad (I.8)$$

Как видно, в соответствующем состоянии  $C_0^{(n)}$  взаимодействие неэффективно, и весь вклад в энергию его вносится только первым членом гамильтониана (I.I).

Чтобы решить вопрос о том, когда энергия  $C_0^{(n)}$  не будет

минимальной и когда, следовательно, основное состояние  $\psi^{(0)}$  будет характеризоваться нетривиальным решением уравнений (I.7), обратимся к известной процедуре вариационного исчисления. Построим выражение второй вариации  $\delta^2 \tilde{E}$  для тривиального решения. Найдем

$$\delta^2 \tilde{E} = \sum_{q, s, s'} |E(q) - E_F| \psi^*(q, s, s') \psi(q, s, s') + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{(q, q', \dots, s, \dots)} J(q, q' | s_1, s_2, s'_1, s'_2) \psi^*(q, s_1, s_2) \psi(q', s'_1, s'_2)$$

где

$$\psi(q, s, s') = \theta_F(q) \delta u(q, s, s') + \theta_C(q) \delta v(q, s, s')$$

Функции  $\psi$  связаны только одними условиями антисимметрии:

$\psi(q, s', s) = -\psi(q, s, s')$ , получающимися при вариации условий ортонормированности. Возвратимся теперь к системе индексов, принятой при написании гамильтониана (I.1). Получим

$$\delta^2 \tilde{E} = \sum_{k, \sigma, \sigma'} |E(k) - E_F| \psi^*(k, \sigma, \sigma') \psi(k, \sigma, \sigma') + \\ + \frac{1}{2V} \sum_{(k, k', \dots, \sigma, \dots)} J(k, k' | \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2) \psi^*(k, \sigma_1, \sigma_2) \psi(k', \sigma'_1, \sigma'_2)$$

Условие антисимметрии будет

$$\psi(-k, \sigma_2, \sigma_1) = -\psi(k, \sigma_1, \sigma_2)$$

Как видно, знак  $\delta^2 \tilde{E}$  может быть сделан отрицательным тогда, и только тогда, когда уравнение

$$2 |E(k) - E_F| \psi(k, \sigma_1, \sigma_2) + \\ + \frac{1}{V} \sum_{k', \sigma'_1, \sigma'_2} J(k, k' | \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2) \psi(k', \sigma'_1, \sigma'_2) = E \psi(k, \sigma_1, \sigma_2) \quad (I.9)$$

имеет собственное решение с отрицательным значением  $E$ . В таком случае энергия  $\epsilon_0^{(n)}$  не будет минимальной и возникает основное состояние  $\epsilon_0^{(s)}$  другого типа, характеризующееся нетривиальным решением уравнений (I.7). Интересно отметить, что уравнение (I.9), написанное в  $\tau$ -представлении (для взаимодействия, независимого от скорости):

$$2 |E(k) - E_F| \psi(\vec{\tau}, \sigma_1, \sigma_2) + \\ + \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2} \phi(\vec{\tau} | \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2) \psi(\vec{\tau}, \sigma'_1, \sigma'_2) = E \psi(\vec{\tau}, \sigma_1, \sigma_2) \quad (I.10)$$

весьма напоминает уравнение Шредингера для задачи двух тел, в системе центра инерции. Отличие состоит в своеобразной форме оператора "кинетической энергии". Это отличие естественно исчезает в случае нулевой плотности, когда  $E_F = 0$ .

Полученное уравнение (I.10) можно применить для исследования вопроса о сверхтекучести ядерной материи в качестве критерия неустойчивости нормального состояния.

Для этой цели удобно воспользоваться вариационным принципом и находить минимум выражения

$$2 \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int |E(k) - E_F| \cdot |\psi(k, \sigma_1, \sigma_2)|^2 d\vec{k} + \\ + \sum_{(\dots \sigma' \dots \sigma' \dots)} \int \phi(\vec{\tau} | \sigma_1, \sigma_2, \sigma'_1, \sigma'_2) \psi^*(\vec{\tau}, \sigma_1, \sigma_2) \psi(\vec{\tau}, \sigma'_1, \sigma'_2) d\vec{\tau} \quad (I.11)$$

где

$$\Psi(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Psi(\vec{r}) R^{-i(k\vec{r})} d\vec{r}$$

при дополнительном условии

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} \int |\Psi(r, \sigma_1, \sigma_2)|^2 d\vec{r} = 1$$

Если соответствующим подбором пробной функции  $\Psi$  данное выражение можно сделать отрицательным, то отсюда будет следовать, что в уравнении (I.10)  $E < 0$  и что тем самым наш критерий выполнен.

В заключение заметим, что в рассматриваемой модели можно асимптотически точно построить и явную форму для свободной энергии.

Здесь получаются довольно сложные нелинейные уравнения, но уравнения для определения критической температуры фазового перехода в нормальное состояние опять будут линейными. Как показали И.А.Квасников и В.В.Толмачев<sup>/22/</sup> эти линейные уравнения отличаются от уравнений (I.10) только тем, что в них  $E = 0$  и выражение

$$2|E(k) - E_F|$$

заменяется на

$$2|E(k) - E_F| \sigma \frac{|E(k) - E_F|}{2\theta}$$

где  $\theta$  - критическая температура.

ПРИЛОЖЕНИЕ П<sup>х</sup>)

Об одной вариационной проблеме в  
задаче многих тел.

Мы изучали в настоящей работе лишь пространственно однородные задачи. В целом ряде случаев, однако, представляет большой интерес рассмотрение пространственно неоднородных задач. Так, для получения правильных уравнений электродинамики в теории сверхпроводимости мы должны принять во внимание границу сверхпроводящего вещества. Кроме того, было бы весьма важно для дальнейшего развития теории явным образом учесть наличие кристаллической решетки металла.

Мы не говорим уже о теории ядра, где рассмотрение неограниченной ядерной материи представляет в сущности лишь далеко идущее упрощение. Имея в виду эти весьма разнородные с физической точки зрения задачи, мы предлагаем здесь новый приближенный метод, являющийся естественным <sup>вып.</sup> обобщением известного метода Фока<sup>124)</sup>.

Рассмотрим динамическую систему ферми-частиц с гамильтонианом вида

$$H = \sum \{T(f, f') - \lambda \delta_{f, f'}\} a_f^+ a_{f'} + \\ + \frac{1}{2} \sum T(f_1, f_2, f_1', f_2') a_{f_1}^+ a_{f_2}^+ a_{f_1'} a_{f_2'} \quad (\text{П. I})$$

где  $\lambda$  - химический потенциал, а  $a, a^+$  - ферми-амплитуды,  $f$  - совокупность индексов, характеризующих состояние одной частицы.

\*) Изложение этого приложения основано на работе Н. Н. Боголюбова [23]



Сделаем линейное преобразование ферми-амплитуд:

$$a_f = \sum_v (u_{fv} \alpha_v + v_{fv}^+ \alpha_v^+) \quad (\text{П.2})$$

Чтобы это преобразование было каноническим и не нарушало тем самым коммутационных свойств ферми-амплитуд, С-функции  $u, v$  должны удовлетворять следующим условиям ортонормированности:

$$\xi_{f,f'} \equiv \sum_v \{ u_{fv} u_{f'v}^* + v_{fv} v_{f'v}^* \} = \delta_{f,f'} \quad (\text{П.3})$$

$$\eta_{f,f'} \equiv \sum_v \{ u_{fv} v_{f'v} + v_{fv} u_{f'v} \} = 0$$

Подставим (П.2) в выражение (П.1) и найдем среднее значение  $\bar{H}$  по вакуумному состоянию  $C_0$ :

$$\alpha_v C_0 = 0$$

для новых ферми-амплитуд. Получим

$$\begin{aligned} \bar{H} = & \sum \{ T(f, f') - \lambda \delta_{f,f'} \} F_1(f, f') + \\ & + \frac{1}{2} \sum J(f_1, f_2, f_2', f_1') \phi^*(f_1, f_2) \phi(f_1', f_2') + \\ & + F_1(f_1, f_1') F_2(f_2, f_2') - F_2(f_2, f_2') F_1(f_1, f_1') \equiv \mathcal{E}(u, v) \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

где

$$F_1(f, f') = \sum_v v_{fv}^* v_{f'v}$$

$$\phi(f, f') = \sum_v v_{fv} u_{f'v}$$

Определим  $u, v$  из условия минимума ~~Ферми~~  $\mathcal{E}(u, v)$  при наличии дополнительных условий (П.3). Соответствующее уравнение стацио-

нажности будет

$$\delta \bar{\mathcal{E}}(u, v) = 0$$

$$\bar{\mathcal{E}}(u, v) = \mathcal{E}(u, v) + \sum_{f, f'} \{ \lambda(f, f') \bar{\eta}(f, f') + \mu(f, f') \eta(f, f') + \mu^*(f, f') \bar{\eta}^*(f, f') \} \quad (\text{II.5})$$

где  $\lambda, \mu$  - эйлеровские множители; вариации  $\delta u, \delta v$  и  $\delta u^*, \delta v^*$  рассматриваются здесь как независимые.

Мы приходим теперь к формулировке нового приближенного метода в задаче многих тел. В этом методе мы берем такие  $u, v$  удовлетворяющие уравнениям стационарности, которые дают минимальное значение форме  $\mathcal{E}(u, v)$ . Для них соответствующее считаем волновой функцией основного состояния, а  $\mathcal{E}(u, v)$  - энергией основного состояния.

Вопрос об обосновании метода и пределах применимости является достаточно сложным. Поэтому мы здесь ограничимся лишь рядом замечаний. Так, на основании результатов (Приложение I) можем утверждать, что предложенный метод дает точное решение задачи в случае, когда в гамильтониане учитываются только взаимодействия пар частиц с противоположными импульсами.

С другой стороны, покажем, что среди решений уравнения стационарности всегда содержится решение, точно соответствующее известному методу Фока<sup>/24/</sup>.

Возьмем, в самом деле, ортонормированную в обычном смысле систему функций  $\varphi_{fv}$ :

$$S(f, f') \equiv \sum_v \varphi_{fv}^* \varphi_{f'v} = \delta_{f, f'} \quad (\text{II.6})$$

и разделим всю совокупность индексов  $\nu$  на две части  $F$  и  $G$ . В качестве  $F$  - "сферы Ферми" возьмем конечное множество индексов  $\nu$ , состоящее из  $N$  элементов (где  $N$  - число частиц). Остальные  $\nu$  объединим в дополнительное множество  $G$ . Положим

$$u_{f\nu} = 0, \quad v_{f\nu} = \varphi_{f\nu}, \quad \nu \in F \quad (П.7)$$

$$u_{f\nu} = \varphi_{f\nu}, \quad v_{f\nu} = 0, \quad \nu \in G$$

Тогда очевидно все условия ортогональности (П.3) будут выполнены. Если подставить такие  $u$ ,  $v$  в форму  $\mathcal{E}$ , то  $\Phi$  в ней исчезает и она будет зависеть только от  $F$ , а тем самым только от  $\varphi_{f\nu}$  при  $\nu \in F$ . Условимся обозначать  $\nu \in F$  буквой  $\omega$ . Определим  $\varphi_{f\omega}$  из условия минимума формы  $\mathcal{E}(\dots \varphi_{f\omega} \dots)$  при дополнительных условиях (П.6).

Соответствующее уравнение стационарности будет

$$\delta \tilde{\mathcal{E}}_F(\omega) = 0; \quad \tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{E}(\dots \varphi_{f\omega} \dots) + \sum_{f, f'} \lambda(f, f') \mathcal{E}(f, f') \quad (П.8)$$

Нетрудно заметить, что мы сейчас сформулировали нечто иное, как обычный метод Фока. Волновая функция системы  $\mathcal{C}^0$  соответствует такому положению, когда индивидуальные частицы занимают все состояния  $\varphi_{f\omega}$ ; остальные состояния  $\varphi_{f\nu}$  пусты.

С другой стороны, из уравнения (П.5) видим, что они всегда имеют решение типа (П.7), в котором  $\varphi_{f\omega}$  подобраны по методу Фока как решения уравнений (П.8). Итак, наш метод может рассматриваться как обобщение метода Фока и, следовательно, его пределы применимости во всяком случае не будут более узкими.

Рассуждая, как в Приложении I и составив выражение для второй вариации  $\delta^2 \bar{\epsilon}(u, v)$  для "нормального решения" (П.7), можем получить условие его неустойчивости. Условие это формулируется с помощью задачи на собственные значения у соответствующей системы линейных уравнений.

Практически оно может быть использовано, например, для получения критерия сверхпроводимости в модели, в которой явным образом учитывается кристаллическая решетка металла. В заключение заметим, что изложенный метод может получить дальнейшее развитие и уточнение с помощью исследования цепочки уравнений для "функций распределения".

$$\int \alpha_{f_1} \dots \int \alpha_{f_2} \dots \int \alpha_{f_1'} = F_{s+2}(t, f_1 \dots f_s; f_1' \dots f_1')$$

Так, например, если взять стационарный случай и оставить в уравнениях цепочки только функции  $F_{0+2}(f_1, f_2)$ ,  $F_{2+0}(f_1', f_2')$  а остальными пренебречь, то мы опять получим уравнения нашего метода.

Взяв случай, когда  $F_{0+2}$ ,  $F_{2+0}$  явно зависят от времени и ограничиваясь линейным приближением по отклонениям

$$F_{0+2} - F_{0+2}^{st}, \quad F_{2+0} - F_{2+0}^{st}$$

получим уравнения для определения спектра коллективных колебаний.

## Л и т е р а т у р а

1. H. Fröhlich, Phys. Rev., 79, 845 (1950); Proc. Roy. Soc. ~~158~~  
215A, 291 (1952).
2. J. Bardeen, Phys. Rev., 79, 167 (1950); 80, 567 (1950);  
81, 829 (1951).
3. H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc. 223A, 296 (1954)
4. M. R. Schafroth, Phys. Rev., 96, 1442 (1954);  
M. R. Schafroth, S. T. Butler, J. M. Blatt, Helv. Phys. Acta  
30, 93 (1957).
5. L. N. Cooper, Phys. Rev., 104, 1189 (1956);  
J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 106, 162  
(1957); Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
6. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ, № I (1958), в печати.
7. Н. Н. Боголюбов, Journ. of Phys. 9, 23 (1947);  
Вестник МГУ № 7, 43 (1947).
8. K. A. Brückner and K. Sawada Phys. Rev., 106, 1117, 1128 (1957).
9. N. M. Hugenholtz, Physica 23, 481 (1957).
10. Н. Н. Боголюбов, Доклады Высшей Школы I, № I, 1958, (в печати).
11. D. Pines, Superconductivity in the periodic system. Preprint.
12. С. В. Тябликов и В. В. Толмачев, ЖЭТФ, 1958 (в печати).
13. M. Gell-Mann and K. A. Brückner, Phys. Rev., 106, 364 (1957);  
K. Sawada Phys. Rev., 106, 372 (1957).
14. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ, № I, (в печати).
15. Н. Н. Боголюбов "Лекции по квантовой статистике", Киев, 1947,
16. J. Goldstone, Proc. Roy. Soc. A239, 267 (1957).

17. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, "Введение в теорию квантованных полей"  
Гостехиздат, 1957
18. J.Bardeen and D.Pines, Phys.Rev., 99, 1141 (1955).
19. В.В.Толмачев, С.В.Тябликов ЖЭТФ, 1958, № I (в печати).
20. Н.Н.Боголюбов, Д.Н.Зубарев, Ю.А.Церковников, ДАН (в печати).
21. Н.Н.Боголюбов, ДАН (в печати).
22. И.А.Квасников, В.В.Толмачев, ДАН (в печати).
23. Н.Н.Боголюбов, ДАН (в печати).
24. В.А.Фонк ~~is~~.f.Phys., 31, 126 (1930).
25. J.G.Valatin, Comments on the theory of superconductivity.  
Preprint.

Авторы благодарны М.Гелл-Манну, К.Брюкнеру, К.Савада,  
Дж.Голдстоуну, Д.Пайнсу и Дж.Валатину за присылку препринтов.