ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.Н. Михайлов

Р-1386

О ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ЯДЕР МЕТОДОМ ПРИНУДИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ

Дубна 1963

И.Н. Михайлов

Р-1386

О ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ЯДЕР МЕТОДОМ ПРИНУДИТЕЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ

Направлено в ДАН СССР

Дубна 1963

В данной работе приведена оценка точности определения момента инерции ядра при помощи модели принудительного вращения. Оценка основана на использовании метода приближенного проектирования функций, развитого в работе /1/.

Момент инерции является коэффициентом при $J(J+1)$ в разложении энергии системы по степеням момента количества движения J :

$$E_J = E_0 + J(J+1)/2Z + \dots \tag{1}$$

Как известно, формула Инглиса

$$Z_0 = 2\Sigma_i \frac{|\langle i|\hat{J}_x|0\rangle|^2}{E_i - E_0} \tag{2}$$

для момента инерции точно описывает квадратичный по J член в выражении для энергии вращающейся системы, характеризующейся состояниями внутреннего движения $|i\rangle$ и соответствующими им энергиями E_i. Однако само разделение вращательных и внутренних движений замкнутой системы представляет собой приближение[x)]. Дополнительные ошибки возникают вследствие того, что вид функций $|i\rangle$ и величины E_i выбираются более или менее произвольно. С другой стороны, определение момента инерции при помощи формулы (1) не связано с приближениями, упомянутыми выше, и поэтому вопрос о точности модели принудительного вращения имеет смысл.

Пусть H — гамильтониан системы, а $\hat{J}_x$ — одна из проекций оператора момента количества движения, имеющие в представлении вторичного квантования вид:

$$\hat{H} = \Sigma_i \epsilon_i a_i^+ a_i^+ + \tfrac{1}{2}\sum_{ijke} \langle ij|G|ek\rangle a_i^+ a_j^+ a_k a_e \,. \tag{3}$$

$$\hat{J}_x = \sum_{ij} \langle i|j_x|j\rangle a_i^+ a_j \,.$$

Учитывая рост энергии с J, можно утверждать, что задача

$$\delta\langle \Psi, \hat{H}\Psi\rangle = 0, \quad \langle\Psi,\Psi\rangle = 1, \quad \hat{J}_x\Psi = J\Psi \,, \tag{4}$$

решенная без ограничений на вид функций Ψ, точно определяет низшее из состояний системы с квантовыми числами J, $J(J+1)$, соответствующими операторам $\hat{J}_x$ и $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + J_y^2 + J_z^2$.

[x)] То, что состояния $|i\rangle$ и энергии E_i описывают внутреннее движение системы, а не движение системы в целом, легче всего видеть из того, что оператор энергии замкнутой системы H коммутирует с оператором $\hat{J}_x$, а следовательно, последний оператор может связывать лишь состояния с одной и той же энергией.

В модели принудительного вращения вместо задачи (4) решается задача

$$\delta < \Psi, \hat{H} \Psi > = 0, \quad < \Psi, \Psi > = 1, \tag{5}$$
$$< \Psi, \hat{J}_x \Psi > = J,$$

в которой Ψ берутся из некоторого ограниченного класса функций (см.[3]). Эти функции не являются, вообще говоря, собственными функциями операторов $\hat{J}^2$, $\hat{J}_x$. Решение задачи (5) можно улучшить, если вместо функций Ψ взять пробные функции

$$\phi_J = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \, z^{(\hat{J}_x - J)\frac{1}{h}} \Psi, \tag{6}$$

представляющие собой проекции функций Ψ на пространство собственных функций оператора $\hat{J}_x$ с собственным значением J (см., например,[4]). Использование проектированных функций не гарантирует устранения всех ошибок в решении задачи (5), однако позволяет оценить точность решения ее с использованием функций Ψ.

Будем считать, как и в работе[1], что средние значения по функциям ϕ можно вычислять методом перевала. Тогда, в соответствии с результатами работы[1], можно утверждать, что поправка к решению задачи (5), связанная с использованием проектированных функций, определяется дополнительным членом в энергии системы

$$\Delta E = - \frac{1}{2\overline{\Delta \hat{J}_x^2}} [\overline{H\Delta \hat{J}_x^2} - \overline{H}\,\overline{\Delta \hat{J}_x^2}]. \tag{7}$$

В формуле (7) усреднение ведется по функции Ψ, являющейся решением вариационной задачи (5), а оператор $\Delta \hat{J}_x^2 = (\hat{J}_x - J)^2$. Формула (7) справедлива, если $\overline{\Delta \hat{J}_x^2}/h^2 >> 1$. Напомним, что операторы проектирования были использованы для анализа вращательных движений ядер в работах[5,6], однако выбранная авторами цитированных работ форма оператора проектирования не дала возможности решить вариационную задачу (4) на классе проектированных функций. Фактически в этих работах была показана внутренняя непротиворечивость модели деформированного ядра при достаточно больших значениях параметра деформации (и, следовательно, величины $\Delta \hat{J}_x^2 / h^2$).

Пусть задача (5) решается методом канонического преобразования. В этом случае функция Ψ является вакуумом по отношению к операторам α, связанным с операторами a формулой

$$\alpha_\nu = \Sigma_{\nu'} (u_{\nu\nu'} a_{\nu'} + v_{\nu\nu'} a^{+}_{\tilde{\nu}'}) \tag{8}$$

(состояние $\tilde{\nu}$ является сопряженным по времени состоянию ν). Средние значения по функции ψ определяются при помощи следующих матричных элементов[x)]:

---

x) Обозначения те же, что и в работе[3].

$$\langle a_i^+ a_i \rangle = v^2 + (u_i^2 - v_i^2)\Sigma_j |f_{ij}|^2,$$
$$\langle a_i^+ a_{\tilde{i}}^+ \rangle = \langle a_{\tilde{i}} a_i \rangle^* = u_i u v_i - 2u_i v_i \Sigma_j |f_{ij}|^2, \qquad (9)$$

$$\langle a_i^+ a_j \rangle = (u_i v_j - v_i u_j) f_{ij}^*, \qquad (10)$$
$$\langle a_i^+ a_{\tilde{j}}^+ \rangle = \langle a_{\tilde{j}} a_i \rangle^* = (u_i u_j + v_i v_j) f_{ij}^*.$$

Коэффициенты f_{ij} удовлетворяют соотношениям

$$f_{ij} = -f_{\tilde{j}\tilde{i}}, \quad f_{ij} + f_{ji}^* = 0,$$
$$f_{ii} = 0 \qquad (11)$$

и определяются из вариационных уравнений, которые имеют вид:

$$(E_i + E_j) f_{ij} - \sum_{i'j'} \langle i\tilde{j}|G|\tilde{j}'i'\rangle (u_i u_j + v_i v_j)(u_{i'} u_{j'} + v_{i'} v_{j'}) f_{i'j'} +$$
$$+ \sum_{i',j'} (\langle i\tilde{i}'|G|\tilde{j}'j\rangle - \langle i\tilde{i}'|G|\tilde{j}j'\rangle)(u_i v_j - v_i u_j)(u_{i'} v_{j'} - v_{i'} u_{j'}) \qquad (12)$$
$$= \omega(u_i v_j - v_i u_j)\langle i|j_x|j\rangle,$$

$$\sum_{ij} \langle i|j_x|j\rangle (u_i v_j - v_i u_j) f_{ij}^* = J. \qquad (13)$$

Здесь

$$E_i = \sqrt{(\epsilon_i - \lambda)^2 + \Delta_i^2}, \quad \Delta_i = \Sigma_j \langle i\tilde{i}|G|\tilde{j}j\rangle u_j v_j, \qquad (14)$$

а величины u_i , v_i связаны с параметрами λ , Δ_i , E_i обычными уравнениями метода u, v – преобразования.

Величины в формуле (7) имеют вид:

$$\overline{\Delta \hat{J}_x^2} = \sum_{\substack{\nu\nu' \\ \mu\mu'}} \langle\nu|j_x|\nu'\rangle\langle\mu|j_x|\mu'\rangle[\langle a_\nu^+ a_{\mu'}\rangle\langle a_{\nu'} a_{\mu'}^+\rangle - \langle a_{\nu'} a_{\mu'}\rangle\langle a_\nu^+ a_\mu^+\rangle] =$$
$$= \sum_{\nu\mu} |\langle\nu|j_x|\mu\rangle|^2 [v_\nu^2 u_\mu^2 - (u_\nu v_\nu)(u_\mu v_\mu)], \qquad (16)$$

$$\Delta\hat{J}_x^2 - \overline{\Delta\hat{J}_x^2} = \sum_{\substack{\nu\nu' \\ \eta\eta'}} \sum_{\substack{\mu\mu' \\ \rho\rho'}} \langle\nu|j_x|\nu'\rangle\langle\mu|j_x|\mu'\rangle u_{\nu\eta}^* v_{\nu'\eta'} u_{\mu'\rho'}^* v_{\mu'\rho'} a_\eta a_{\tilde{\eta}'} a_\rho a_{\tilde{\rho}'} +$$

$+$ эрмит. сопр.

Из формулы (16) следует, что поправки, определяемые формулой (7), связаны с гамильтонианом взаимодействия, поскольку только в нем содержатся члены, которые могут скомпенсировать 4 оператора рождения a^+ в формуле (16). Это связано с возможностью точной диагонализации гамильтонана невзаимодействующих частиц методом канонического преобразования (8). Следует помнить, однако, что бардиновская функция, построенная на одночастичных функциях анизотропного потенциала, принципиально не может быть точной собственной функцией гамильтониана замкнутой системы.

Довольно трудоемкие вычисления позволяют написать следующее выражение для величины ΔE:

$$\Delta E = -\frac{1}{4\overline{\Delta\hat{J}_x^2}}\sum_{ijk\ell} \langle ij|G|\ell k\rangle\langle k\ell|\Delta\hat{J}_x^2 - \overline{\Delta\hat{J}_x^2}|ji\rangle + \tag{17}$$

$$+ \text{компл.сопр.},$$

где

$$\langle k\ell|\Delta\hat{J}_x^2 - \overline{\Delta\hat{J}_x^2}|ji\rangle = 8\sum_{\nu\nu'}\langle\nu|j_x|\nu'\rangle\langle a_k a_\nu^+\rangle\langle a_\ell\, a_\nu\rangle \times$$

$$\times \sum_{\mu\mu'}\langle\mu|j_x|\mu'\rangle\langle a_\mu\, a_j\rangle^*\langle a_i^+ a_{\mu'}\rangle - \tag{18}$$

$$-4\sum_{\nu\nu'}\sum_{\mu\mu'}\langle\nu|j_x|\nu\rangle\langle\mu|j_x|\mu'\rangle\,[\langle a_k\, a_\nu^+\rangle\langle a_j^+ a_{\nu'}\rangle\langle a_\ell a_\mu^+\rangle\langle a_i^+ a_{\mu'}\rangle + \langle a_\nu a_j\rangle^*\langle a_k a_\nu\rangle \langle a_\mu a_i\rangle^*\langle a_\ell\, a_\mu\rangle].$$

Определение поправок к моменту инерции осуществляется легко выделением квадратичной по f части из выражения (18) при помощи формул (10). Получающиеся выражения содержат большое число разных членов. Если гамильтониан взаимодействия имеет вид:

$$\langle ij|G|\ell k\rangle = -\frac{G}{2}\lambda(i)\lambda(\ell)\delta_{i\tilde{j}}\delta_{\ell\tilde{k}}, \tag{19}$$

где

$$\lambda(i) = -\lambda(\tilde{i}), \quad |\lambda(i)| = 1, \tag{20}$$

то величина поправки к моменту инерции может быть оценена при помощи лишь первого слагаемого в правой части формулы (18):

$$\Delta E = \frac{J^2 G}{2\overline{\Delta\hat{J}_x^2}}\,\xi_+\xi_- = \tfrac{1}{2}\omega^2 Z_0\frac{Z_0^2 G}{\overline{\Delta\hat{J}_x^2}}\,\xi_+\xi_-. \tag{21}$$

В формуле (21) величины

$$\xi_\pm = \frac{\sum\limits_{i\mu}\frac{|\langle i|j_x|\mu\rangle|^2}{E_i+E_\mu}(u_i v_{\mu'} - v_i u_{\mu'})\lambda(i)[(1\pm(u_i^2-v_i^2))(u_i u_{\mu'}+v_i v_{\mu'}) + 2u_i v_i\times(u_i v_{\mu'} - v_i u_{\mu'})}{\sum\limits_{i\mu}\frac{|\langle i|j_x|\mu\rangle|^2}{E_i+E_\mu}(u_i v_{\mu'} - v_i u_{\mu'})^2}$$

равны по порядку величины единице, $\omega = \frac{J}{Z_0}$ – частота вращения, соответствующая моменту J, а

$$Z_0 = \sum_{i\mu}\frac{|\langle i|j_x|\mu\rangle|^2}{E_i+E_\mu}(u_i v_\mu - v_i u_\mu)^2 - \tag{23}$$

значение момента инерции, найденное без проектирования. Из формулы (21) следует, что поправка к моменту инерции равна

$$|\Delta Z/Z_0| \approx G\, Z_0 / \Delta \overline{\hat{J}_x^2} \, . \qquad (24)$$

Характер выражения в правой части формулы (24) легче всего увидеть, если воспользоваться формулой (2) для величины Z_0 и учесть, что средняя энергия возбужденных состояний E_{cp}, вносящих вклад в момент инерции, равна по порядку величины удвоенной величине щели Δ. Но, с другой стороны,

$$Z_0 = 2 \sum_i \frac{|\langle i|j_x|0\rangle|^2}{E_i - E_0} \approx \frac{2}{E_{cp.}} \sum_i |\langle i|j_x|0\rangle|^2 = \frac{2\Delta \overline{\hat{J}_x^2}}{E_{cp}} \, . \qquad (25)$$

Поэтому формула (24) может быть переписана в виде:

$$|\Delta Z/Z_0| \approx \frac{G}{\Delta} \, .$$

Отсюда видно, что порядок величины поправки - 10%. Формула (25) позволяет также оценить по известным данным о величине одночастичных возбуждений и по значениям момента инерции значение параметра $\Delta \overline{\hat{J}_x^2}/h^2$, являющегося мерой точности метода перевала. Для ядер группы редких земель эта величина имеет порядок 20-30, что свидетельствует о применимости метода.

В заключение выражаю искренною благодарность Е.Бангу за многочисленные обсуждения, а также В.Г.Соловьеву за постоянный интерес к работе.

Литература

1. И.Н. Михайлов. О точности обобщенного метода Хартри-Фока в ядерной физике; ЖЭТФ (в печати).
2. E.P.Gross. Nucl. Phys., 14, 369 (1960).
3. С.Т.Беляев. ЖЭТФ, 40, 672 (1961).
4. И.Н. Михайлов. Acta Phys. Polonica, 23, 85 (1963).
5. R.E.Peierls, Yoccoz I Proc. Phys. Soc., A70, 388 (1957).
6. T.H.R.Skyrme Proc. Phys. Soc., A70, 433 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1963 г.