ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-137

В.К. Мельников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ЗАХВАТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКОГО К КОНСЕРВАТИВНОМУ

Матем. сборник, 1959, т49, в4, с 353-380

1958 г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-137

В.К. Мельников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ЗАХВАТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, БЛИЗКОГО К КОНСЕРВАТИВНОМУ

1958 г.

ВВЕДЕНИЕ

Целью настоящей работы является определение области захвата для уравнения следующего вида:

$$\frac{d}{dt}(m(\varepsilon,t)\dot{x}) + k(\varepsilon,t)P'(x) = \varepsilon f(\varepsilon,t,x,\dot{x})\dot{x} \qquad (*)$$

где ε - малый параметр, который можно считать не отрицательным, а функции $m(\varepsilon,t)$ и $k(\varepsilon,t)$ при $\varepsilon=0$ не зависят от t. Пусть x_z есть положение равновесия для уравнения ($*$). Тогда под областью захвата для заданного момента времени t_0 и заданного положения равновесия x_z здесь понимается множество значений начальных условий $(x_0, \dot{x}_0)$ таких, что определяемые ими решения уравнения ($*$) будут устойчиво колебаться относительно x_z. Задачи о нахождении областей захвата возникают при расчетах многих типов ускорителей заряженных частиц, откуда заимствован и сам термин "область захвата". Дело в том, что частицы, ускоряемые во всяком резонансном ускорителе, совершают так называемые "фазовые колебания", описываемые некоторым нелинейным уравнением, и область захвата для этого уравнения определяет число частиц, захватываемых в режим ускорения. Само уравнение фазовых колебаний можно трактовать как уравнение типа ($*$), вводя естественным образом малый параметр. Таким образом, анализ уравненич ($*$) может быть использован для более точного определения области захваа в ускорителе[x]. С математической точки зрения в работе вводится некоторый аналог сепаратрис, позволяющий отделить движения различных типов, и дается метод для практического определения этих сепаратрисс.

---

x) Желающий может познакомиться с таким расчетом в написанной совместно с Ю.С. Саясовым заметке, которая будет опубликована в ЖЭТФ.

Метод, примененный физиками для решения этой задачи (см., например, [I], [2], [3]) для случая $f(\varepsilon, t, x, \dot{x}) \equiv 0$ состоял в следующем: так как ε мало, то изменение функций $m(\varepsilon, t)$ и $K(\varepsilon, t)$ за время одного периода фазовых колебаний, имеющее порядок εT (T -период фазовых колебаний), также мало, и зависимостью от времени пренебрегали. В таком случае легко находится интеграл энергии, с помощью которого легко находится область захвата. Однако, в силу того, что $\rho'(x)$ заведомо не линейная функция, T зависит от x_0 и $\dot{x}_0$ и неограниченно возрастает, когда x_0 и $\dot{x}_0$ приближаются к границе области захвата. Тем самым εT становится при любом фиксированном $\varepsilon \neq 0$ как угодно большим. Следовательно, основная предпосылка такого рода рассуждений не верна. К сказанному можно добавить еще то, что области захвата для уравнения ($*$) при $\varepsilon = 0$ и при $\varepsilon \neq 0$ существенно различны: в первом случае она, вообще говоря, ограничена, во втором - нет.

Ю.С. Саясовым область захвата определялась с помощью численного интегрирования уравнения ($*$). При этом он получил заметное увеличение области захвата и поставил передо мной задачу определения области захвата аналитическим путем.

Уравнение ($*$) можно трактовать с механической точки зрения, как уравнение описывающее движение материальной точки с переменной массой под действием нелинейной упругой силы, слабо зависящей от времени, и малой силы трения. Поэтому класс задач физики, описываемых уравнением ($*$), чрезвычайно широк. Для применимости метода необходимо только, чтобы при выполнении некоторых естественных ограничений параметр ε, характеризующий близость уравнения ($*$) к консервативному, был мал.

В заключении пользуюсь возможностью выразить свою признательность Ю.С.Саясову, руководителю этой работы, С.В.Фомину и Л.А.Чудову, прочитавшим рукопись этой работы и сделавшими ряд критических замечаний, а также В.В.Немыцкому и участникам его семинара за некоторые полезные замечания.

ГЛАВА I.

Сделаем несколько замечаний об уравнении ($*$). Прежде всего, всюду в дальнейшем мы будем считать, что функции $m(\varepsilon,t)$, $k(\varepsilon,t)$, $p'(x)$ и $f(\varepsilon,t,x,\dot{x})$ непрерывны и обладают непрерывными частными производными по всем переменным в нужной нам области изменения ε, x, $\dot{x}$, t до нужного порядка. В частности, мы будем предполагать, что для уравнения ($*$) справедлива теорема существования и единственности решения, определяемого начальными условиями: $x_\varepsilon(t_0) = x_0$ и $\dot{x}_\varepsilon(t_0) = \dot{x}_0$. Функции $m(\varepsilon,t)$ и $k(\varepsilon,t)$ будут предполагаться положительными.

Из вида уравнения ($*$) ясно, что нули функции $p'(x)$ и только они суть положения равновесия. В дальнейшем мы будем предполагать, что все нули функции $p'(x)$ простые, т.е. если $p'(x_\tau)=0$, то $p''(x_\tau)\neq 0$. Отсюда сразу следует, что все положения равновесия являются изолированными. В зависимости от знака $p''(x_\tau)$ мы будем говорить, что x_τ есть положение равновесия типа седла, если $p''(x_\tau) < 0$, и - положение равновесия типа фокуса, если $p''(x_\tau) > 0$. Для первого случая мы введем обозначение x_s, для второго - x_f. Положения равновесия типа седла через одно чередуется с положениями равновесия типа фокуса.

В дальнейшем будет очень удобно всякое решение уравнения интерпретировать, как кривую от параметра t на плоскости $(x,\dot{x})$. Сделаем несколько замечаний об этой интерпретации. Пусть $x_\varepsilon(t)$ - некоторое решение уравнения ($*$). Будем говорить, что x' есть точка возврата решения $x_\varepsilon(t)$, если найдется такой момент времени $t'<\infty$, что $x_\varepsilon(t') = x'$ и для всех t, достаточно близких к t', разность $x_\varepsilon(t)-x'$ сохраняет постоянный знак. Отсюда мы сразу получаем, что $\dot{x}_\varepsilon(t') = 0$. Таким образом, обращение в нуль первой производной есть необходимое условие точки возврата. Нетрудно видеть, что оно является и достаточным. Действительно, если $\dot{x}_\varepsilon(t')=0$, то $\ddot{x}_\varepsilon(t')\neq 0$, ибо в противном случае $x_\varepsilon(t')$ было бы положением равновесия и мы имели бы решение, входящее в конечный момент времени в положение равновесия, что невозможно по теореме о единственности решения. Таким образом, достаточное условие экстремума оказывается выполненным. Отсюда мы сможем сделать некоторое заключение о поведение решений на фазовой плоскости. Именно: если решение $x_\varepsilon(t)$ в конечный момент времени t' встретилось с прямой $\dot{x}=0$, то оно непременно переходит с полуплоскости $\dot{x}>0$ на полуплоскость $\dot{x}<0$ или наоборот. Последнее зависит от знака $p'(x_\varepsilon(t'))$. Именно: если $p'(x_\varepsilon(t'))>0$, то решение переходит с верхней полуплоскости на нижнюю, если $p'(x_\varepsilon(t'))<0$, то наоборот.

Отсюда сразу вытекает, что между двумя последующими точками возврата произвольного решения $x_\varepsilon(t)$ находится нечетное число перемен знака функции $p'(x)$, т.е. нечетное число положений равновесия, причем положений равновесия типа фокуса всегда будет на одно больше, чем положений типа седла. Решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения($*$) назовем ω-колеблющимся, если оно имеет бесконечно много точек возврата при $t>0$. Легко видеть, что на оси t моменты времени, в которые происходит возврат движения, не имеют предельных точек. Действительно, предположим противное: пусть t_k есть момент времени, в который происходит к-тый возврат движения некоторого решения $x_\varepsilon(t)$ и $t_k \to t'$ при $k\to\infty$. Тогда между $x_\varepsilon(t_k)$ и $x_\varepsilon(t_{k+1})$ находится, по крайней мере, одно положение равновесия и при k достаточно большом – только одно. Пусть это будет x_2. Тогда из непрерывности решения следует, что $x_\varepsilon(t')=x_2$, что противоречит теореме о единственности решения. Будем говорить, что решение $x_\varepsilon(t)$ колеблется устойчиво, если любые его следующие друг за другом три точки возврата $x_\varepsilon(t_1)$, $x_\varepsilon(t_2)$ и $x_\varepsilon(t_3)$ $(t_1<t_2<t_3)$ удовлетворяют следующему условию: число положений равновесия уравнения ($*$), находящихся

между $x_\varepsilon(t_2)$ и $x_\varepsilon(t_3)$ не превосходит числа положений равновесия, находящихся между $x_\varepsilon(t_1)$ и $x_\varepsilon(t_2)$. Об ω - колеблющемся решении уравнения ($*$) будем говорить, что оно колеблется относительно положения равновесия x_2, если из любых его двух последующих точек возврата одна расположена правее x_2, другая левее. Будем говорить, что решение $x_\varepsilon(t)$ стремится к точке $\bar{x}$, если $\sup|x_\varepsilon(\tau)-\bar{x}|\to 0\ (\tau > t)$ при $t\to\infty$. Из сделанных замечаний легко следует, что ω - колеблющееся решения может стремиться только к положению равновесия типа фокуса. Следовательно в положении равновесия типа седла решение может входить только монотонно, т.е. так, что с некоторого момента времени $|\dot{x}_\varepsilon(t)|>0$. В этой работе мы всюду будем предполагать, что решение может стремиться монотонно только к положению равновесия типа седла. Это означает, во-первых, что решение не может монотонно стремиться к точке, не являющейся положением равновесия, во-вторых, что оно не может стремиться к положению равновесия типа фокуса. Второе ограничение означает, что мы исключаем случаи сильного трения. Это ограничение, понятно, не вполне естественно, однако отказ от него сильно меняет результаты. Рассмотрению этого случая мы предполагаем посвятить отдельную работу.

Первое же ограничение будет оставаться в силе, так как случаи, когда оно не выполнено, представляются нам не интересными. Сейчас мы сформулируем достаточные условия для выполнения первого ограничения. Эти условия получаются из сравнения с аналогическими условиями для уравнения $\ddot{x}-k(t)x=0$, где $k(t)\geqslant 0$ Для него (см. [4]) необходимым и достаточным условием несуществования решений, стремящихся к конечному пределу, отличному от нуля, есть расходимость интеграла $\int_{t_0}^{\infty} t\,k(t)\,dt$. Заменой $ds=\frac{dt}{m(t)}$ уравнение $\frac{d}{dt}(m(t)\dot{x})-k(t)x=0\quad (m(t)>0)$ приводится к виду $\frac{d^2x}{ds^2}-m(t(s))\,k(t(s))\,x=0$, и если интеграл $\int_{t}^{\infty}\frac{dt}{m(t)}$ расходится, то необходимым и достаточным условием для выполнения первого ограничения есть расходимость интеграла $\int\limits_0^\infty s\,m(s)\,k(s)\,ds$, что равносильно расходимости интеграла

$$\int\limits_{t_0}^\infty k(t)\left(\int\limits_{t_0}^\infty \frac{d\tau}{m(\tau)}\right)dt$$

В случае, если интеграл $\int\limits_{t_0}^\infty \frac{dt}{m(t)}$ сходится, то, как показано в [6], необходимым и достаточным условием для выполнения первого ограничения есть расходимость интеграла

$$\int\limits_{t_0}^\infty \frac{1}{m(t)}\left(\int\limits_{t_0}^t k(\tau)\,d\tau\right)dt$$

Суммируя все сказанное, мы можем сказать, что для того, чтобы уравнение $\frac{d}{dt}(m(t)\dot{x}) - k(t)\,x = 0$ удовлетворяло первому ограничению, необходимо и достаточно, что оба интеграла $\int\limits_{t_0}^\infty k(t)\int\limits_{t_0}^t \frac{d\tau}{m(\tau)}\,dt$ и $\int\limits_{t_0}^\infty \frac{1}{m(t)}\int\limits_{t_0}^t k(\tau)\,d\tau\,dt$ расходились одновременно.

Путем сравнения уравнения (*) с уравнением $\frac{d}{dt}(m(t)\dot{x}) - k(t)\,x = 0$, мы можем получить достаточные условия того, что уравнения (*) удовлетворяет первому ограничению. На основании теоремы о среднем мы можем написать:

$$\frac{d}{dt}(m(\varepsilon,t)\dot{x}) + \Big\{k(\varepsilon,t)\,p''(x_s+\theta(t)(x(t)-x_s)) - \varepsilon f'_x(\varepsilon,t,x_s+\theta(t)(x(t)-x_s),\theta(t)\dot{x}(t))\,\theta(t)\dot{x}(t)\Big\}\cdot$$

$$\cdot(x(t)-x_s) = \varepsilon\Big\{f'_{\dot{x}}(\varepsilon,t,x_s+\theta(t)(x(t)-x_s),\theta(t)\dot{x}(t))\,\theta(t)\dot{x}(t) + f(\varepsilon,t,x_s+\theta(t)(x(t)-x_s),\theta(t)\dot{x}(t))\Big\}\,\dot{x}(t),$$

где $0 < \theta(t) < 1$. Пусть для любого $C > 0$ и для достаточно малого фиксированного $h_0 > 0$ существуют функции $\bar{f}_c(\varepsilon,t)$, $\bar{\bar{f}}_c(\varepsilon,t)$ и $k_c(\varepsilon,t) < 0$ такие, что

$$k_c(\varepsilon,t) \geq k(\varepsilon,t)\, p''(x) - \varepsilon f'_x(\varepsilon,t,x,\dot x)\,\dot x\ ,$$

$$\bar{\bar f}_c(\varepsilon,t) \geq f'_{\dot x}(\varepsilon,t,x,\dot x)\,\dot x + f(\varepsilon,t,x,\dot x) \geq \bar f_c(\varepsilon,t)$$

при любых $|x - x_s| \leq h_0$ и $|\dot x| \leq C$

а оба интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{m(\varepsilon,t)\,\bar h_c(\varepsilon,t)} \left(\int_{t_0}^{t} k_c(\varepsilon,\tau)\, \bar h_c(\varepsilon,\tau)\, d\tau \right) dt \quad \text{и}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} k_c(\varepsilon,t)\, \bar{\bar h}_c(\varepsilon,t) \left(\int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{m(\varepsilon,\tau)\, \bar{\bar h}_c(\varepsilon,\tau)} \right) dt \quad \text{расходятся}$$

для $\bar h_c(\varepsilon,t) = \exp\left(-\varepsilon \int_{t_0}^{t} \bar f_c(\varepsilon,\tau)\,d\tau\right)$ и

$$\bar{\bar h}_c(\varepsilon,t) = \exp\left(-\varepsilon \int_{t_0}^{t} \bar{\bar f}_c(\varepsilon,\tau)\,d\tau\right).$$

Эти условия достаточны для того, чтобы уравнение (*) удовлетворяло первому ограничению (ср. с [5]). Всюду в дальнейшем мы будем считать их выполненными и назовем условиями (α) .

Обозначим черз E_s множество положений равновесия типа седла уравнения (*). Возьмем для каждого $x_s \in E_s$ все решения $x_\varepsilon(t)$ уравнения (*), удовлетворяющие условию: $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$ при (существование таких решений будет доказано в дальнейшем). Из того факта, что в положение равновесия типа седла решение может входить только монотонно следует, что для таких решений $\dot x_\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. На плоскости $(x, \dot x)$ для каждого такого решения построим кривую $x = x_\varepsilon(t)$, $\dot x = \dot x_\varepsilon(t)$. Получим некоторое семейство кривых, вообще говоря пересекающихся. Для некоторого фиксированного момента времени t_0 на каждой кривой нашего семейства возьмем точку $(x = x_\xi(t_0)\ ,\ \dot{x} = \dot{x}_\xi(t_0))$. Получим некоторое множество $\Gamma(t_0)$. Если в уравнение (*) время явно не входит, то $\Gamma(t_0)$ состоит из целых траекторий и от t_0 не зависит. В противном случае это не верно. Роль $\Gamma(t_0)$ выяснится из следующей теоремы.

Теорема I. Пусть $\Delta = \tilde{E}^2 \setminus \Gamma(t_0)$, где $\tilde{E}^2$ есть плоскость $(x, \dot{x})$, из которой выброшены точки вида $(x_\tau, 0)$. Тогда, существует единственное представление $\Delta = \bigcup\limits_\alpha \Delta_\alpha$, где каждое Δ_α есть линейно-связное множество, открытое Δ, и $\Delta_\alpha \cap \Delta_{\alpha'} = 0$ при $\alpha' \neq \alpha$. Предположим, что во множестве Δ_{α_0} существует точка $(x_0, \dot{x}_0)$ такая, что начинающееся в ней в момент времени t_0 решение уравнения (*) устойчиво колеблется относительно x_τ (при этом неважно к какому типу положений равновесия x_τ принадлежит). Тогда любое другое решение уравнения (*), начинающееся в момент времени t_0 из произвольной точки, принадлежащей Δ_{α_0}, будет устойчиво колебаться относительно x_τ.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма I. Пусть $\sum \subset \Delta$ -связное множество, не пересекающееся с прямой $\dot{x} = 0$, и пусть x' первая при $t > t_0$ точка возврата некоторого решения $x_\xi(t)$ уравнения (*), начинающегося в момент времени t_0 из точки $(x_0, \dot{x}_0) \in \sum$. Тогда первая при $t > t_0$ точка возврата произвольного решения $\tilde{x}_\xi(t)$ уравнения (*) начинающегося в момент времени $\mathring{t}_0$ из произвольной точки, принадлежащей $\sum$ находится между x'_τ и x''_τ, где x'_τ - первое слева от x' положение равновесия, а x''_τ - первое справа.

Доказательство:

Рассмотрим случай, когда $\sum$ лежит в полуплоскости $\dot{x} > 0$. Случай, когда $\sum$ лежит в полуплоскости $\dot{x} < 0$ рассматривается аналогично.

Из определения множества Σ следует, что любое решение $x_\varepsilon(t)$, начинающееся в момент времени t_0 из точки $(x_0, \dot{x}_0) \in \Sigma$, либо имеет при $t > t_0$ точку возврата, либо уходит в плюс бесконечность. Действительно, если $\dot{x}_\varepsilon(t)$ обратится при $t' > t_0$ в нуль, то $x_\varepsilon(t')$ есть точка возврата, если же $\dot{x}_\varepsilon(t)$ в нуль не обращается, то $x_\varepsilon(t)$ монотонно уходит в плюс бесконечность. Стремиться в этом случае к какому-либо конечному значению $x_\varepsilon(t)$ не может в силу сделанных предположений о поведении решений уравнения ($*$) и в силу выбора множества Σ. Обозначим через Σ' множество точек $\{\sigma \in \Sigma\}$ таких, что у выходящих из них в момент времени t_0 решений первая при $t > t_0$ точка возврата лежит левее x_2', через Σ'' – множество $\{\sigma \in \Sigma\}$ таких, что у определяемых ими решений первая при $t > t_0$ точка возврата лежит между x_2' и x_2'', через Σ''' – множество $\{\sigma \in \Sigma\}$ таких, что либо у определяемых ими решений первая при $t > t_0$ точка возврата лежит правее x_2'', либо решение уходит в плюс бесконечность. Последнее множество можно определить, как множество таких $\{\sigma \in \Sigma\}$, что каждое из определяемых ими решений проходит в конечный момент времени t_σ с отличной от нуля скоростью некоторую точку $x_\sigma > x_2''$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий для конечного промежутка значений t следует, что Σ', Σ'' и Σ''' – открытые множества. С другой стороны $\Sigma'' \cap (\Sigma' \cup \Sigma''') = 0$ и $\Sigma'' \cup (\Sigma' \cup \Sigma''') = \Sigma$. Согласно определению связного множества это возможно только тогда, кагда либо Σ'', либо $(\Sigma' \cup \Sigma''')$ есть пустое множество. Так как $\Sigma'' \neq 0$, то $(\Sigma' \cup \Sigma''') = 0$ и, следовательно, $\Sigma'' = \Sigma$. Этим лемма доказана.

Лемма 2. Пусть связное множество К лежит на прямой $\dot{x} = 0$ и не содержит ни одного положения равновесия и пусть $t_0(\kappa)$ непрерывная на К функция. Пусть далее x' есть первая при $t > t_0(\kappa_0)$ точка возврата некоторого решения $x_\varepsilon(t)$, начинающего в момент времени $t_0(\kappa_0)$ из точки $\kappa_0 \in K$. Тогда первая при $t > t_0(\kappa)$

точка возврата произвольного решения $\widetilde{x}_\xi(t)$, начинающегося в момент времени $t_0(\kappa)$ из точки $\kappa \in K$, находится между x_2' и x_2'', где x_2' - первое слева от x' положение равновесия, а x_2'' - первое справа.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству предыдущей леммы и поэтому опускается.

Доказательство теоремы:

Пусть $(x_1, \dot{x}_1)$ - произвольная точка, принадлежащая Δ_{α_0}. Обозначим через $f(\xi) = \{x = f_1(\xi), \dot{x} = f_2(\xi)\}$ непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ во множество Δ_{α_0} такое, что $f(0) = (x_0, \dot{x}_0)$ и $f(1) = (x_1, \dot{x}_1)$. Обозначим через G множество $\{\xi \in [0,1]\}$ таких, что решение уравнения (*), начинающееся в момент времени t_0 в точке $f(\xi)$ будет устойчиво колебаться относительно x_2. Покажем, что G открыто в отрезке $[0,1]$. Пусть ξ' произвольная точка, принадлежащая G. Пусть далее $f(\xi') = (x', \dot{x}')$. Если $\dot{x}' \neq 0$, то возьмем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы образ интервала $(\xi' - \delta, \xi' + \delta)$ при отображении $f(\xi)$ не пересекался с прямой $\dot{x} = 0$. Это можно сделать в силу непрерывности $f(\xi)$. Если же $\dot{x}' = 0$, то обозначая через t_1 момент времени, в который происходит первый при $t > t_0$ возврат движения решения $x_\xi(t)$, начинающегося в точке $f(\xi')$ в момент времени t_0, возьмем $t_0' < t_1$, но больше t_0. Тогда $\dot{x}_\xi(t_0') \neq 0$.

На основании теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий для конечного промежутка значений t мы можем выбрать $\delta' > 0$ настолько малым, чтобы у любого решения, начинающего в момент времени t_0 из произвольной точки, принадлежащей $f((\xi' - \delta', \xi' + \delta'))$ знак первой производной в точке t_0' совпал со знаком $\dot{x}_\xi(t_0')$. Тогда случай $\dot{x}' = 0$ сведется к случаю $\dot{x}' \neq 0$, если заменить t_0 на t_0'. Применяя лемму I, мы получаем, что первая при $t > t_0$ точка возврата любого решения, начинающегося в момент времени t_0 из произвольной точки множества $\Sigma = f((\xi'-\delta, \xi'+\delta))$, лежит между теми же двумя положениями равновесия, что и первая при $t > t_0$ точка возврата решения, начинающегося в точке $f(\xi')$. Пусть $t_1(\xi)$ равно моменту времени, в который происходит первый при $t > t_0$ возврат движения решения $\overset{\circ}{x}_\varepsilon(t, \xi)$, начинающегося в точке $f(\xi)$, где $\xi \in (\xi'-\delta, \xi'+\delta)$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий следует, что $t_1(\xi)$ непрерывна. Таким образом, $t_1(\xi)$ и $K_1 = \{x_\varepsilon(t_1(\xi), \xi), 0\}$ удовлетворяют условиям леммы 2. Применяя лемму 2, мы можем определить непрерывную функцию $t_2(\xi)$, полагая её равной моменту времени, в который происходит первый при $t > t_1(\xi)$ возврат движения решения $x_\varepsilon(t, \xi)$, и множество $K_2 = \{x_\varepsilon(t_2(\xi), \xi), 0\}$, которые, очевидно, удовлетворяют условиям леммы 2. Теперь нам ясно, как, имея функцию $t_k(\xi)$ и множество K_k, определить $t_{k+1}(\xi)$ и K_{k+1}. Таким образом, мы получаем взаимно-однозначное соответствие между точками возврата решения $x_\varepsilon(t, \xi')$ и любого другого решения $x_\varepsilon(t, \xi)$, где $\xi \in (\xi'-\delta, \xi'+\delta)$, причем такое, что к-тая точка возврата произвольного решения $x_\varepsilon(t, \xi)$ лежит между теми же двумя положениями равновесия, что и к-тая точка возврата решения $x_\varepsilon(t, \xi')$. Так как $x_\varepsilon(t, \xi')$ по предположению колеблется устойчиво относительно x_2, то и $x_\varepsilon(t, \xi)$ для $\xi \in (\xi'-\delta, \xi'+\delta)$ будет колебаться устойчиво, т.е. G открыто в $[0, 1]$. Как известно ([8], стр.130), всякое открытое множество на прямой есть соединение не более чем счетного числа попарно не пересекающихся интервалов. Следовательно, G есть соединение не более чем счетного числа попарно не пересекающихся интервалов и не более чем двух полуинтервалов, не имеющихся общих точек ни с интервалами, ни друг с другом. В числе компонент G нет отрезков, ибо в таком случае $G = [0, 1]$ и все доказано. Для завершения доказательства покажем, что со всяким интервалом или полуинтервалом, входящим в G, G принадлежат и его граничные точки. Пусть g_{i_0} - произвольный интервал или полуинтервал, входящий в G, и ξ_0 - одна из его граничных точек, для определенности будем считать, что левая. Если нужно, заменяя t_0 на $t_0' \geq t_0$, мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы, во-первых, $(\xi_0, \xi_0 + \delta] \subset g_{i_0}$, во-вторых, чтобы связное множество $\Sigma = \{x_\varepsilon(t_0', \xi), \dot{x}_\varepsilon(t_0', \xi)\}$ $(\xi \in (\xi_0, \xi_0 + \delta])$ не пересекалось с прямой $\dot{x} = 0$, т.е. лежало либо в полуплоскости $\dot{x} > 0$, либо в полуплоскости $\dot{x} < 0$. Возьмем $\xi' = \xi_0 + \frac{\delta}{2}$.

Тогда решение $x_\varepsilon(t, \xi')$ будет устойчиво колебаться относительно x_ζ. Повторив почти дословно первую часть доказательства, мы легко получим, что $x_\varepsilon(t, \xi_0)$ колеблется устойчиво относительно x_ζ. Теперь нетрудно показать, что $G = [0, 1]$. Предположим противное: пусть $G \neq [0, 1]$. Так как G открыто и $(\xi = 0) \in G$, то существует максимальный полуинтервал g_{i_1}, содержащий точку $(\xi = 0)$. $g_{i_1} = [0, \bar{\xi})$. Так как вместе со всяким полуинтервалом G принадлежит и его граничные точки, то $[0, \bar{\xi}] \subset G$. Следовательно, $\bar{\xi} < 1$. Но так как G открыто в $[0, 1]$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $[0, \bar{\xi} + \delta) \subset G$. Следовательно, g_{i_1} не есть максимальный полуинтервал, содержащий точку $(\xi = 0)$. Полученным противоречием завершается доказательство нашей теоремы.

o

Глава 2

После всего сказанного мы перейдем к нахождению способа для вычисления $\Gamma(t_0)$. Для этого нужно найти способ нахождения решений уравнения (*), удовлетворяющий условию: $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$. Мы попытаемся находить такие решения, разлагая их в ряд по степеням малого параметра ε :

$$x_\varepsilon(t) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon \bar{x}_1(t) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \bar{x}_2(t) + \qquad (2.1)$$

Выражение (2.I), вообще говоря, расходится. Кроме того вычисление $\bar{x}_k(t)$ громоздко, и поэтому мы можем фактически вычислить лишь некоторое небольшое число членов ряда (2.I). Полагая

$$x_\varepsilon^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \bar{x}_k(t) \frac{\varepsilon^k}{k!}, \qquad (2.2)$$

мы должны оценить

$$R_n(t,\varepsilon) = x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon^{(n)}(t)$$

Как хорошо известно из анализа,

$$R_n(t,\varepsilon) = \frac{\partial^{n+1} x_\varepsilon(t)}{\partial \varepsilon^{n+1}}\Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{cp.}} \frac{\varepsilon^{n+1}}{(n+1)!}$$

Пригодность выражения (2.2) для вычислений будет следовать из того, что, как будет показано в дальнейшем, $|R_n(t,\varepsilon)| \leq \leq N_n(t)\cdot\varepsilon^{n+1}$, где $N_n(t)$ ограничено при $t \geq t_0$ и $\lim_{t\to\infty} N_n(t) = 0$. Поэтому при достаточно малых ε член $|R_n(t,\varepsilon)|$ может быть сделан как угодно малым и, следовательно, выражение (2.2) как угодно мало отличается от точного решения. Для доказательства этого факта мы докажем существование у решений удовлетворяющих условию $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$, производных по ε до нужного нам порядка и проведем оценку их поведения для больших t. Для этого нам нужно уметь различать решения уравнения ($*$), стремящиеся при $t \to \infty$ к одному и тому же положению равновесия типа седла, т.е. найти условия единственности. Эти условия даются следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть выражение $\kappa(\varepsilon,t)p''(x) - \varepsilon f'_x(\varepsilon,t,x,\dot{x})\dot{x} < 0$ при $t \geq t_0$ для $-\infty < \dot{x} < +\infty$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $|x - x_s| \leq h_0$. Нетрудно видеть, что h_0 должно быть так мало, чтобы отрезок $[x_s - h_0, x_s + h_0]$ не содержал ни одного положения равновесия, отличного от x_s. Тогда решение уравнения ($*$), удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon(t_0) = x_0$, где $|x_0 - x_s| \leq h_0$, $\operatorname{sign}\dot{x}_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}(x_s - x_0)$ при $t \geq t_0$ и $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$, единственно.

Доказательство:

Предположим противное: пусть $x'_\varepsilon(t)$ и $x''_\varepsilon(t)$ решения уравнения ($*$), удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда $\xi(t) = x'_\varepsilon(t) - x''_\varepsilon(t)$ обращается в нуль при $t = t_0$ и стремится к нулю при $t \to \infty$. Отсюда следует, что $\xi(t)$ в некоторой точке $t_1 > t_0$ имеет либо положительный максимум, либо отрицательный минимум, т.е. $\dot{\xi}(t_1) = \dot{x}'_\varepsilon(t_1) - \dot{x}''_\varepsilon(t_1) = 0$. Подставив, в уравнение ($*$) сначала $x'_\varepsilon(t)$, а затем $x''_\varepsilon(t)$ и вычтя второе выражение из первого, имеем при $t = t_1$:

$$m(\varepsilon,t_1)\ddot{\xi}(t_1) + \Big\{\kappa(\varepsilon,t_1)p''\big(x''_\varepsilon(t_1) + \theta\xi(t_1)\big) -$$

$$- \varepsilon f'_x\big(\varepsilon, t_1, x''_\varepsilon(t_1) + \theta\xi(t_1), \dot{x}''_\varepsilon(t_1)\big)\dot{x}''_\varepsilon(t)\Big\}\xi(t_1) = 0,$$

где $0 < \theta < 1$. Так как $\operatorname{sign}\dot{x}'_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}\dot{x}''_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}(x_s - x_0)$, то $|x_s - x''_\varepsilon(t_1) - \theta\xi(t_1)| < h_0$, и, следовательно, $K(\varepsilon,t)\,p''(x_\varepsilon''(t_1)+\theta\xi(t_1)) -$

$- \varepsilon f_x'(\varepsilon, t, x_\varepsilon''(t_1)+\theta\xi(t_1), \dot{x}_\varepsilon''(t_1))\,\dot{x}_\varepsilon''(t_1) < 0$

Таким образом, мы имеем:

$$\ddot{\xi}(t_1) - \omega^2(t_1)\xi(t_1) = 0, \tag{2.3}$$

где $\omega^2(t_1) > 0$ и $\xi(t_1) \neq 0$. Отсюда мы немедленно приходим к противоречию, ибо, если $\xi(t_1) > 0$, то $\ddot{\xi}(t_1) \leq 0$, если же $\xi(t_1) < 0$, то $\ddot{\xi}(t_1) > 0$. Обе эти возможности противоречат равенству (2.3). Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Всюду в дальнейшем мы будем считать, что теорема 2 справедлива для любого t_0. Обратимся теперь к вопросу о существовании решений, удовлетворяющих условиям: $x_\varepsilon(t_0) = x_0$, $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{sign} \dot{x}_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}(x_s - x_0)$ для $t \geqslant t_0$. Назовем эти условия условиями (A). Вопрос о существовании решений, удовлетворяющим условиям (A), рассматривался в [5]. Однако мы подойдем к нему с иной точки зрения и результат, который мы получим, будет несколько отличен от результатов [5]. Взяв точку x_0 $(|x_0 - x_s| \leq h_0)$ обозначим через L_α дугу параболы $\dot{x} = \alpha \operatorname{sign}(x_s - x_0)|x - x_0|^{1/2}$, соединяющую точки $(x = x_0, \dot{x} = 0)$ и $(x = x_s, \dot{x} = \alpha \operatorname{sign}(x_s - x_0)|x_s - x_0|^{1/2})$ $(\alpha > 0)$.

Теорема 3. Во множестве L_α существует точка, из которой выходит при $t = t_0$ решение, удовлетворяющее условиям (A).

Доказательство:

Обозначим через L_α' множество точек дуги, что начинающиеся в них при $t = t_0$ решения пересекают прямую $x = x_s$, не сделав до этого при $t \geqslant t_0$ ни одного возврата движения, а через L_α'' - множество точек дуги L_α таких, что начинающиеся в них при $t = t_0$ решения, не дойдя до прямой $x = x_s$ при $t \geqslant t_0$ имеют точку возврата. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий следует, что L_α' и L_α''

открытие множества, ни одно из них не пусто (точка $(x=x_0, \dot{x}=0)$ принадлежит L''_α, а точка $(x=x_s, \dot{x}=\alpha\, sign(x_s-x_0)|x_s-x_0|^{1/2})$ принадлежит L'_α) и их пересечение равно нулю. Поэтому если предположить, что $L'_\alpha \cup L''_\alpha = L_\alpha$, то мы немедленно получаем противоречие с фактом связности отрезка. Следовательно, существует, по крайней мере, одна точка, не принадлежащая $L'_\alpha \cup L''_\alpha$. Выходящее из нее при $t=t_0$ решение должно монотонно стремиться к некоторой точке, заключенной между x_0 и x_s. Так как между x_0 и x_s нет положений равновесия, а мы предположили, что решений, входящих монотонно в точку, отличную от положения равновесия, нет, то наше решение входит в x_s. Этим теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $x'_\varepsilon(t)$ и $x''_\varepsilon(t)$ - два различные решения уравнения ($*$), удовлетворяющие условиям (A) и пусть при $t > t_0$ $|x'_\varepsilon(t)-x_s| \le h_0$ и $|x''_\varepsilon(t)-x_s| \le h_0$, где h_0 так мало, что при $t \geq t_0$ выполняются условия теоремы 2. Тогда при любом $t \geq t_0$ выражение

$$\{x'_\varepsilon(t) - x''_\varepsilon(t)\}\{\dot{x}'_\varepsilon(t) - \dot{x}''_\varepsilon(t)\} < 0 \qquad (2.4)$$

Доказательство:

Из теоремы 2 следует, что при любом $t \geq t_0$ выражение $x'_\varepsilon(t) - x''_\varepsilon(t) \neq 0$ (если бы при некотором $t_1 \geq t_0$ $x'_\varepsilon(t_1) = x''_\varepsilon(t_1)$, то согласно теореме 2 и $\dot{x}'_\varepsilon(t_1) = \dot{x}''_\varepsilon(t_1)$, что противоречит нашему предположению, что $x'_\varepsilon(t)$ и $x''_\varepsilon(t)$ различные решения, так как в противном случае это противоречило бы теореме о единственности решения. Предположим теперь противное: пусть при $t=t'$ выражение (2.4) не отрицательно. Не ограничивая общности будем считать, что $x_\varepsilon'(t) - x_\varepsilon''(t) > 0$. Тогда $\dot{x}_\varepsilon'(t') - \dot{x}_\varepsilon''(t') \geqslant 0$. Рассмотрим случай $\dot{x}_\varepsilon'(t') - \dot{x}_\varepsilon''(t') = 0$. Тогда при $t > t'$, но достаточно близких к t', $\dot{x}_\varepsilon'(t) - \dot{x}_\varepsilon''(t) > 0$, ибо если бы $\dot{x}_\varepsilon'(t) - \dot{x}_\varepsilon''(t) \leqslant 0$, то $\ddot{x}_\varepsilon'(t') - \ddot{x}_\varepsilon''(t') \leqslant 0$, что противоречит равенству (2.3) (см. доказательство теоремы 2). Поэтому, взяв за t' несколько более поздний момент времени, мы случай $\dot{x}_\varepsilon'(t') - \dot{x}_\varepsilon''(t') = 0$ сведем к случаю $\dot{x}_\varepsilon'(t') - \dot{x}_\varepsilon''(t') > 0$. Покажем, что и он невозможен. Действительно, $\xi(t) = x_\varepsilon'(t) - x_\varepsilon''(t)$ удовлетворяет следующим условиям: $\xi(t') > 0$, $\dot{\xi}(t') > 0$ и $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следовательно, $\xi(t)$ обладает положительным максимумом, что невозможно, в чем мы убедились при доказательстве теоремы 2. Этим лемма доказана.

Следствие I. Так как любые две точки, лежащие на одной и той же дуге L_α, удовлетворяют условию $(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) > 0$ при любом $\alpha > 0$, то множество $L_\alpha \setminus (L_\alpha' \cup L_\alpha'')$ состоит из единственной точки при любом t_0 и при любом $\alpha > 0$.

Следующая теорема будет полезна в дальнейшем.

Теорема 4. Пусть уравнение ($*$) при выбранном x_0 и t_0 обладает единственным решением $x_\varepsilon(t)$, удовлетворяющим условиям (A). Тогда это решение непрерывно зависит от ε, т.е.

$$x_\varepsilon(t) \to x_{\varepsilon_0}(t), \ a \ \dot{x}_\varepsilon(t) \to \dot{x}_{\varepsilon_0}(t) \ \text{при} \ \varepsilon \to \varepsilon_0$$

равномерно по t на каждом ограниченном множестве значений t.

Для доказательства этой теоремы нам требуется следующая лемма.

Лемма 4. Пусть уравнение ($*$) при выбранном x_0 и t_0 обладает единственным решением $x_\varepsilon(t)$, удовлетворяющим условиям (A). Тогда всякое решение $\overline{x}_\varepsilon(t)$ уравнения ($*$), выходящее при $t = t_0$ из точки $(x_0, \dot{\overline{x}}_0)$ при $\dfrac{\dot{\overline{x}}_0}{\dot{x}_\varepsilon(t_0)} > 1$ пересечет прямую $x = x_s$, не сделав до этого при $t \geqslant t_0$ ни одного возврата, а при $1 > \frac{\dot{\bar{x}}_0}{\dot{x}_\varepsilon(t_0)} > 0$, не дойдя при $t \geq t_0$ до прямой $x = x_s$, будет иметь точку возврата.

Доказательство:

Проведем доказательство для случая $\frac{\dot{\bar{x}}_0}{\dot{x}_\varepsilon(t_0)} > 1$. Случай $1 > \frac{\dot{\bar{x}}_0}{\dot{x}_\varepsilon(t_0)} > 0$ доказывается аналогично. Предположим противное: пусть найдется $\dot{\bar{x}}_0$ $\left(\frac{\dot{\bar{x}}_0}{\dot{x}_\varepsilon(t_0)} > 1\right)$ такое, что соответствующее решение $\bar{x}_\varepsilon(t)$, не дойдя при $t \geq t_0$ до прямой $x = x_s$, будет иметь точку возврата. Пусть L_α ; как раньше, есть дуга параболы $\dot{x} = \alpha\, sign\,(x_s - x_0)\,|x - x_0|^{1/2}$, соединяющая точки $(x = x_s\ ,\ \dot{x} = \alpha\, sign(x_s - x_0)|x_s - x_0|^{1/2})$ и $(x = x_0\ ,\ \dot{x} = 0)$.
Пусть t'_α наименьший при $t > t_0$ момент времени, когда решение $x_\varepsilon(t)$ попадает на L_α . Легко видеть, что взяв $\alpha > 0$ достаточно большим мы можем добиться, чтобы $\frac{\dot{\bar{x}}_0}{\dot{x}_\varepsilon(t)} > 1$ при $t_0 \leq t \leq t'_\alpha$, а решение $\tilde{x}_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условиям: $\tilde{x}_\varepsilon(t'_\alpha) = x_0 - \left(\frac{\dot{\bar{x}}_0}{\alpha}\right)^2 sign(x_s - x_0)$; $\dot{\tilde{x}}_\varepsilon(t'_\alpha) = \dot{\bar{x}}_0$, не дойдя при $t \geq t'_\alpha$ до прямой $x = x_s$, будет иметь точку возврата.
Пусть L'_α часть дуги L_α , заключенная между точками $(x = x_s,$ $\dot{x} = \alpha\, sign(x_s - x_0)|x_s - x_0|^{1/2})$ и $\left(x = x_0 - \left(\frac{\dot{\bar{x}}_0}{\alpha}\right)^2 sign(x_s - x_0),\ \dot{x} = \dot{\bar{x}}_0\right)$
Легко видеть, что точка $(x = x_\varepsilon(t'_\alpha),\ \dot{x} = \dot{x}_\varepsilon(t'_\alpha))$ не принадлежит L'_α . Применив к L'_α рассуждения теоремы 3, мы легко докажем существование решения $\hat{x}_\varepsilon(t)$, удовлетворяющего условиям (A) и отличного от $x_\varepsilon(t)$, что противоречит **следствию** № I. Полученное противоречие доказывает лемму.

Доказательство теоремы:

Для доказательства нам достаточно доказать, что $\dot{x}_\varepsilon(t_0) \to \dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$. Это мы и докажем. Предположим противное: пусть $|\dot{x}_\varepsilon(t_0) - \dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)|$ остается больше некоторого $\Delta > 0$ при $\varepsilon - \varepsilon_0 \to 0$. Выберем последовательность $\varepsilon_k \to \varepsilon_0$ при $k \to \infty$ и пусть $\frac{\dot{x}_{\varepsilon_k}(t_0)}{\dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)} > 1 + \bar{\Delta}$ $(\bar{\Delta} > 0)$ (случай, когда $0 < \frac{\dot{x}_{\varepsilon_k}(t_0)}{\dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)} < 1 - \bar{\Delta}$

доказывается совершенно аналогично). Пусть $\dot{x}_0$ произвольная точка такая, что $1+\bar{\lambda} > \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)} > 1$. Обозначим через $\bar{x}_{\varepsilon_k}(t)$ решение уравнения $(*)$, при $\varepsilon=\varepsilon_k$ $(k \geqslant 0)$, удовлетворяющее условиям: $\bar{x}_{\varepsilon_k}(t_0)=x_0$, $\dot{\bar{x}}_{\varepsilon_k}(t_0) = \dot{x}_0$. Тогда решение $\bar{x}_{\varepsilon_0}(t)$ пересечет прямую $x = x_s$, не сделав до этого при $t \geqslant t_0$ ни одного возврата движения, так как $\frac{\dot{\bar{x}}_{\varepsilon_0}(t_0)}{\dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)} = \frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_{\varepsilon_0}(t_0)} > 1$. Поэтому на основании обычной теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий и все $\bar{x}_{\varepsilon_k}(t)$ при k больших некоторого k_0 пересекут прямую $x = x_s$ не сделав ни одного возврата движения. Но на основании леммы 4, все $\bar{x}_{\varepsilon_k}(t)$, не дойдя при $t \geqslant t_0$ до прямой $x = x_s$ имеют точку возврата, так как $0 < \frac{\dot{\bar{x}}_{\varepsilon_k}(t_0)}{\dot{x}_{\varepsilon_k}(t_0)} < 1$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Пусть L_α, как раньше, обозначает дугу параболы, соединяющую точки $(x = x_0, \dot{x} = 0)$ и $(x = x_s, \dot{x} = \alpha \operatorname{sign}(x_s - x_0)|x_s - x_0|^{1/2})$ $(\alpha > 0, |x_0 - x_s| < h_0)$. Возьмем прямую $x = x_0$. Тогда для любого t_0 определим t_0', как момент времени, в который, двигаясь в обратном направлении, решение $x_\varepsilon(t)$, выходящее при $t = t_0$ из некоторой точки, лежащей на L_α и удовлетворяющее условиям (A), пересечет прямую $x = x_0$. Очевидно, что $t_0' < t_0$. Так как согласно следствию I для любого t_0 существует только одно решение, выходящее при $t = t_0$ из некоторой точки дуги L_α и удовлетворяющее условиям (A), то функция $t_0' = f_\alpha(t_0)$ есть однозначная функция.

Обозначим через $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ точку на дуге L_α, из которой выходит при $t = t_0$ решение, удовлетворяющее условиям (A). Тогда рассуждениями, аналогичными тем, которые приводились при доказательство теоремы 4, легко доказать, что точка $(x(t_0), \dot{x}(t_0))$ непрерывно зависит от t_0. Отсюда, пользуясь теоремой о непрерывной зависимости решения от начальных условий, мы получаем, что решение $x_\varepsilon(t)$ уравнения (*), выходящее при $t = t_0 + \Delta t_0$

из точки $(x_\varepsilon(t_0+\Delta t_0), \dot{x}_\varepsilon(t_0+\Delta t_0))$ пересекает прямую $x = x_0$ в момент времени, зависящий непрерывно от Δt_0, т.е. мы получаем, что $f_\alpha(t_0)$ есть непрерывная функция. Так как $f_\alpha(t_0) < t_0$ то $f_\alpha(t_0) \to -\infty$ при $t_0 \to -\infty$. Покажем, что $f_\alpha(t_0) \to +\infty$ при $t \to \infty$. Этим будет показано, что множество значений функции $f_\alpha(t_0)$ есть вся числовая прямая, т.е. будет доказано, что уравнение ($*$) при любом t_0' и x_0, достаточно близком к x_s ($|x_0-x_s|<h_0$) обладает решением, удовлетворяющем следующим условиям: $x_\varepsilon(t_0) = x_0$, $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{sign} \dot{x}_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}(x_s - x_0)$ при любом $t \geq t_0$. Из теоремы 2 следует, что это решение будет единственно.

Для доказательства этого факта предположим противное: пусть $f_\alpha(t_0)$ ограничено сверху и пусть $\tilde{t}_0'$ - точная верхняя грань. Покажем, что $f_\alpha(t_0)$ не достигает своей точной верхней грани. Предположим противное: пусть $f_\alpha(t_0)$ достигает своей верхней грани $\tilde{t}_0'$ в некоторой точке $\tilde{t}_0$. Это означает, что при любом $t_0' > \tilde{t}_0'$ и $\dot{x}_0$ решение $\hat{x}_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условиям $\hat{x}_\varepsilon(t_0') = x_0$ и $\dot{\hat{x}}_\varepsilon(t_0') = \dot{x}_0$ не удовлетворяет условиям (A). Покажем, что это не так. Пусть $x_\varepsilon(t)$ есть решение уравнения ($*$), удовлетворяющее условиям (A)и условию $x_\varepsilon(\tilde{t}_0') = x_0$. Обозначим через $\bar{x}_\varepsilon(t)$ решение уравнения ($*$), удовлетворяющее условиям: $\bar{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0') = x_0$, $\dot{\bar{x}}_\varepsilon(\tilde{t}_0') = \frac{3}{2}\dot{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0')$, а через $\bar{\bar{x}}_\varepsilon(t)$ - решение, удовлетворяющее условиям: $\bar{\bar{x}}_\varepsilon(\tilde{t}_0') = x_0$, $\dot{\bar{\bar{x}}}_\varepsilon(\tilde{t}_0') = \frac{1}{2}\dot{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0')$. Тогда существует $\Delta t > 0$ такое, что решение $\tilde{x}_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условиям: $\tilde{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0' + \Delta t) = x_0$ и $\dot{\tilde{x}}_\varepsilon(\tilde{t}_0' + \Delta t) = \frac{3}{2}\dot{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0')$, пересечет прямую $x = x_s$, не сделав до этого при $t > \tilde{t}_0' + \Delta t$ ни одного возврата движения, а решение $\approx{x}_\varepsilon(t)$, удовлетворяющее условиям $\approx{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0' + \Delta t) = x_0$ и $\dot{\approx{x}}_\varepsilon(\tilde{t}_0' + \Delta t) = \frac{1}{2}\dot{x}_\varepsilon(\tilde{t}_0')$, не дойдя при $t > \tilde{t}_0' + \Delta t$ до прямой $x = x_s$, будем иметь точку возврата. Тогда рассуждениями, подобными тем, которые приводились при доказательстве теоремы 3, легко доказать существование точки

$\hat{\hat{x}}$, заключенной между $\frac{1}{2}\dot{x}_\xi(\tilde{t}'_0)$ и $\frac{3}{2}\dot{x}_\xi(\tilde{t}'_0)$, такой что решение, выходящее из точки $(x_0, \hat{\hat{x}})$ при $t = \tilde{t}'_0 + \Delta t$ удовлетворяет условиям (A), Получаемое противоречие показывает, что $f_\alpha(t_0)$ не достигает своей точной верхней грани. Пусть теперь $t'_k < \tilde{t}'_0$ и стремится к $\tilde{t}'_0$ при $k \to \infty$. Обозначим через T_k множество значений t_0 таких, что $f_\alpha(t_0) = t'_k$. Так как $\tilde{t}'_0$ есть точная верхняя грань, то никакое T_k не пусто, а так как любое $t_0 \in T_k$ удовлетворяет условию $t_0 > t'_k$, то существует конечное $t_k = \inf t_0 \; (t_0 \in T_k)$. Так как $f_\alpha(t_0)$ непрерывная функция, то $f_\alpha(t_k) = t'_k$, а так как $f_\alpha(t'_0)$ не достигает своей верхней грани, то $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Следовательно, $t_k - t'_k > t_k - \tilde{t}'_0 \to \infty$ при $k \to \infty$. Нетрудно видеть, что t_k есть первый при $t > t'_k$ момент времени, когда соответствующее решение, выйдя при $t = t'_k$ из точки, лежащей на прямой $x = x_0$, попадет на дугу L_α, т.е. при $t \in [t'_k, t_k]$ $\dot{x}^{(k)}_\xi(t) > \alpha|x - x_0|^{1/2}$, если $x_0 < x_s$, $\dot{x}^{(k)}_\xi < -\alpha|x_0 - x|^{1/2}$ если $x_0 > x_s$ т.е. $dt < \frac{dx}{\alpha|x_0 - x|^{1/2}}$, если $x_0 < x_s$, и $-dt > \frac{dx}{\alpha|x_0 - x|^{1/2}}$, если $x_0 > x_s$ Интегрируя, получаем, что $\int\limits_{x_0}^{x^{(k)}_\xi(t_k)} \frac{d\xi}{\alpha|x_0 - \xi|^{1/2}} > t_k - t'_k$, если $x_0 < x_s$ и $-\int\limits_{x_0}^{x^{(k)}_\xi(t_k)} \frac{d\xi}{\alpha|x_0 - \xi|^{1/2}} > t_k - t'_k$, если $x_0 > x_s$. Так как $x^{(k)}_\xi(t_k)$ заключено в любом из двух случаев между x_0 и x_s, а подинтегральные функции положительны, то, распространив интегрирование на весь промежуток от x_0 до x_s, мы только увеличим величины интегралов, стоящих в левых частях неравенства, т.е.

$t_k - t'_k < \int\limits_{x_0}^{x_s} \frac{d\xi}{\alpha|x_0 - \xi|^{1/2}}$ при $x_0 < x_s$ и $t_k - t'_k < \int\limits_{x_s}^{x_0} \frac{d\xi}{\alpha|x_0 - \xi|^{1/2}}$ при $x_0 > x_s$. Итак, мы имеем, что в обоих случаях $t_k - t'_k < \frac{2}{\alpha}|x_0 - x_s|^{1/2}$, т.е. при любом к ограничена сверху. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. Таким образом, в зависимости от того с какой стороны от x_s расположена точка x_0 мы имеем по одному семейству решений уравнения ($*$), зависящих от одного параметра t_0'. Эти два семейства содержат все решения, входящие в данное положение равновесия типа седла.

Обозначим через $g^{+}_{t_0, x_s}(t_0')$ непрерывное отображение прямой t_0' в плоскость $(x, \dot{x})$, которое определим следующим образом: на решении $x_\varepsilon(t)$ уравнения $(*)$, удовлетворяющим условиям: $x_\varepsilon(t_0') = x_0$, $x_0 < x_s$, $|x_0 - x_s| < h_0$ $x_\varepsilon(t) \to x_s$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{sign} \dot{x}_\varepsilon(t) = \operatorname{sign}(x_s - x_0)$ при $t \geqslant t_0'$, берем точку $(x = x_\varepsilon(t_0)$, $\dot{x} = \dot{x}_\varepsilon(t_0))$. Это будет непрерывное и взаимно-однозначное отображение на плоскость $(x, \dot{x})$. Аналогично определяется $g^{-}_{t_0, x_s}(t_0')$ для $x_0 > x_s$. Таким образом $\Gamma(t_0) = \bigcup\limits_{x_s}(L'_{x_s} \cup L''_{x_s})$, где L'_{x_s} и L''_{x_s} есть топологический образ прямой.

Глава III

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства решений следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)\dot{x}\right) - k(t)x = -k(t)\xi(t), \qquad (3.1)$$

где $m(t) > 0$ и $k(t) > 0$ — непрерывные функции. Соответствующее однородное уравнение имеет единственное положение равновесия: $x = 0$. Это будет положение равновесия типа седла. Целью настоящей главы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.

Если однородное уравнение (3.1) удовлетворяет условиям (α), а $\xi(t)$ ограничена и стремится к нулю при $t \to \infty$, то для всяких x_0 и t_0 существует решение $x(t)$ неоднородного уравнения (3.1), удовлетворяющее следующим условиям: $x(t_0) = x_0$ и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Заметим сразу, что если решение уравнения (3.1) существует, то оно единственно. Это следует из единственности решения, удовлетворяющего условиям: $x(t_0) = 0$ и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ соответствующего однородного уравнения. Доказательство этой теоремы для случая, когда интеграл $\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{m(t)}$ расходится, несколько отлично от аналогичного доказательства в случае, когда интеграл $\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{m(t)}$ сходится. Давая доказательства этой теоремы для каждого из возможных случаев, мы однако постараемся свести к минимуму все возможные повторения. Заменой $s = \int\limits_{t_0}^{t}\frac{dt}{m(t)}$ уравнение (3.1) приведется к виду:

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \tilde{k}(s)x = -\tilde{k}(s)\xi(t(s)), \qquad (3.2)$$

где $\tilde{k}(s) = k(t(s))\,m(t(s))$.

Лемма 5. Пусть интеграл $\int\limits_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{m(t)}$ расходится, $\xi(s)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка для любого $s \geqslant 0$ и стремится к нулю при $s \to \infty$ и пусть $\frac{d^2\xi(s)}{ds^2}$ имеет одинаковый знак с $\xi(s)$ при любом $s \geqslant 0$. Тогда у уравнения (3.2) существует решение, стремящееся к нулю при $s \to \infty$.

Доказательство:

Нетрудно видеть, что в этих предположениях $\xi(s)$ не меняет знака, так как если при $s = s_0$ $\xi(s) = 0$ то при $s > s_0$ $\xi(s) \equiv 0$. Так как в этом случае доказательство тривиально, то мы будем предполагать, что $\xi(s)$ при $s \geqslant 0$ не обращается в нуль и для определенности положительна. Кривая $x = \xi(s)$ разбивает полуплоскость $s \geqslant 0$ плоскости (s, x) на две части, в одной из которых выражение $x - \xi(s)$ положительно, в другой - отрицательно. Проинтегрируем (3.2) по s от $s_0 \geqslant 0$ до s. Получим:

$$\frac{dx(s)}{ds} - \frac{dx(s_0)}{ds} = \int\limits_{s_0}^{s} \tilde{K}(\tau)\{x(\tau) - \xi(\tau)\}\,d\tau \qquad (3.3)$$

Из формулы (3.3) видно, что всякое решение $x(s)$ уравнения (3.2) с начальными условиями $x(s_0) = x_0 \geqslant \xi(s_0)$ и $x'(s_0) = x_0' \geqslant \xi'(s_0)$ такими, что $(\xi(s_0) - x_0)^2 + (\xi'(s_0) - x_0')^2 > 0$ уходит монотонно в $+\infty$. Аналогично всякое решение $x(s)$ с начальными условиями $x(s_0) = x_0 \leqslant \xi(s_0)$ и $x'(s_0) = x_0' \leqslant \xi_0'(s_0)$ такими, что $(\xi(s_0) - x_0)^2 + (\xi'(s_0) - x_0')^2 > 0$ уходит монотонно в $-\infty$.

Возьмем $x_0 > \xi(0) > 0$. Если решение $x(s)$ уравнения (3.2) с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) < 0$ встретится с кривой $x = \xi(s)$, то $x(s)$ монотонно уходит в $-\infty$. Для этого достаточно показать, что в момент встречи s_1 $x'(s_1) < \xi'(s_1)$. Очевидно, что $x'(s_1) \leqslant \xi'(s_1)$.

Поэтому достаточно доказать, что $x'(S_1) \neq \xi'(S_1)$.
Предположим противное: пусть $x'(S_1) = \xi'(S_1)$. Тогда
$x(s) = x(s_1) + x'(s_1)(s - s_1) + o((s - s_1)^2)$,
так как $x''(S_1) = 0$, и $\xi(s) = \xi(s_1) + \xi'(s_1)(s - s_1) +$
$+ \xi''(S_1)\frac{(s-S_1)^2}{2!} + o((s-s_1)^2)$,
т.е. $\xi(s) - x(s) = \xi''(s_1)(s-s_1)^2\frac{1}{2!} + o((s-s_1)^2)$. При s достаточно близких к S_1 полученное выражение > 0, так как $\xi''(S_1) > 0$. С другой стороны при $s < s_1$ $\xi(s) - x(s) < 0$.
Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Пусть $x_0 > \xi(0) > 0$ и $x_0' < \xi'(0) < 0$. Обозначим через $x_\tau(s)$ $(\tau \in [0,1])$ решение уравнения (3.2) с начальными условиями $x_\tau'(0) = \tau x_0'$ и $x_\tau(0) = x_0 + \tau(\xi(0) - x_0)$. Обозначим через T_1 множество значений $\{\tau \in [0,1]\}$ таких, что $x_\tau(s)$ встречается с кривой $x = \xi(s)$ и, следовательно, уходят в $-\infty$. Обозначим через T_2 множество значений $\{\tau \in [0,1]\}$ таких, что решение $x_\tau(s)$, не достигнув кривой $x = \xi(s)$, имеет точку возврата и уходит в $+\infty$. Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий следует, что T_1 и T_2 открытые в $[0,1]$ множества. Ни одно из них не пусто, так как согласно выше сказанному $\tau = 1$ принадлежит T_1, а $\tau = 0$ принадлежит T_2. Очевидно, что $T_1 \cap T_2 = 0$. Из связности отрезка следует, что $[0,1] \setminus (T_1 \cup T_2) \neq 0$. Пусть $\tau_0 \in [0,1] \setminus (T_1 \cup T_2)$. Тогда ясно, что $x_{\tau_0}(s) > \xi(s) > 0$, а $x_{\tau_0}'(s) < 0$ при $s \geq 0$, т.е. $x_{\tau_0}(s)$ стремится к некоторому не отрицательному пределу. Умножив (3.2) на s и проинтегрировав по s от нуля до s, получаем

$$s x_{\tau_0}'(s) + x_{\tau_0}(0) - x_{\tau_0}(s) = \int_0^s \tau \tilde{K}(\tau)\{x_{\tau_0}(\tau) - \xi(\tau)\}d\tau. \quad (3.4)$$

Левая часть равенства (3.4) при любом $s \geq 0$ не превосходит $x_{\tau_0}(0)$, так как $s x_{\tau_0}'(s) - x_{\tau_0}(s) < 0$, следовательно, и правая часть равенства не превосходит $x_{\tau_0}(0)$. Так как подинтегральное выражение не отрицательно, то это означает, что интеграл

$\int_0^\infty s\,\tilde{K}(s)\left\{x_{\tau_0}(s)-\xi(s)\right\}ds$ сходится.

Учитывая условия (α) мы легко получаем, что это возможно только тогда, когда $x_{\tau_0}(s)-\xi(s)\to 0$ при $s\to\infty$, так как $x_{\tau_0}(s)$ монотонно убывающая функция. Следовательно, $x_{\tau_0}(s)\to 0$ при $s\to\infty$. Этим наша лемма доказана.

Лемма 5^{I}. Пусть интеграл $\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{m(t)}$ сходится, $\xi(s)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка для любого $s\in[0,S_0)$, где $S_0=\int_{t_0}^{\infty}\frac{dt}{m(t)}$, монотонно стремится к нулю при $s\to s_0$ и пусть $\xi''(s)$ имеет знак, противоположный знаку $\xi(s)$ при любом $s\in[0,S_0)$. Тогда у уравнения (3.2) существует решение, стремящееся к нулю при $s\to s_0$.

Доказательство:

Как и при доказательстве леммы 5 можно ограничиться случаем, когда $\xi(s)>0$ для любого $s\in[0,S_0)$. Из формулы, аналогичный (3.3), нетрудно убедиться, что всякое рашение $x(s)$ уравнения (3.2) с начальными условиями $x(S_0')=x_0\geq\xi(S_0')$ и $x'(S_0')=x_0'>\xi'(S_0')$ уходит монотонно в $+\infty$. Аналогично всякое решение с начальными условиями $x(S_0')=0$, $x'(S_0')<0$ уходит монотонно в $-\infty$. Пусть $x_0'>\xi'(0)$. Обозначим через $x_\tau(s)$ $(\tau\in[0,1])$ решение уравнения (3.2) с начальными условиями: $x_\tau(0)=\xi(0)(1-\tau)$ и $x_\tau'(0)=-\tau+x_0'(1-\tau)$.
Через T_1 обозначим множество значений $\{\tau\in[0,1]\}$ таких, что решение $x_\tau(s)$ пересекаются при $s=S_0'\in[0,S_0)$ с кривой $x=\xi(s)$. Через T_2 обозначим множество значений $\{\tau\in[0,1]\}$ таких, что решение $x_\tau(s)$ пересекаются с прямой $x=0$. Как при доказательстве леммы 5, нетрудно убедиться, что если решение $x_\tau(s)$ пересекает кривую $x=\xi(s)$, то дальше оно монотонно уходит в $+\infty$. Поэтому T_1 и T_2 открытые в $[0,1]$ множества и $T_1\cap T_2=0$.

Выбор множества начальных значений сделан так, чтобы ни одно из множеств не было пусто. Из связанности отрезка следует, что $[0,1]\setminus(T_1\cup T_2)\neq 0$. Пусть $\tau_0\in[0,1]\setminus(T_1\cup T_2)$. Тогда $x_{\tau_0}(s)$ заключено между $x=\xi(s)$ и $x=0$, т.е. $x_{\tau_0}(s)\to 0$ при $s\to s_0$. Этим лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $\xi(s)$ определена и ограничена при $s\geqslant 0$ и при $s\to\infty$ стремится к нулю, тогда существует $\bar\xi(s)>0$ **такая, что** $\bar\xi(s)>|\xi(s)|$, $\lim\limits_{s\to\infty}\bar\xi(s)=0$, $\bar\xi'(s)<0$, $\bar\xi''(s)$ – кусочно непрерывна, в точках разрыва имеет предел справа и слева и $\bar\xi''(s)>0$ для любого $s\geqslant 0$.

Доказательство:

Пусть $|\xi(s)|<M$ при $s\geqslant 0$. Возьмем $\varepsilon_0=4M$ и положим $\varepsilon_k=\varepsilon_0 2^{-k}$ для $k>0$. Для каждого ε_k определим S_k такое, что $|\xi(s)|<\frac{\varepsilon_k}{4}$ для $s\geqslant S_k$ $(S_0=0)$. Беря, если нужно, $S_k'>S_k$ $(S_k'=0)$, мы можем добиться, чтобы $\Delta_k=\frac{\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k}{S_{k+1}-S_k}$ удовлетворяло условию: $\Delta_k<\Delta_{k+1}$. Полагая $\tilde\Delta_k=\frac{1}{2}\Delta_k$ мы видим, что $\tilde\Delta_k<\tilde\Delta_{k+1}$ для любого $k\geqslant 0$. Введем две кусочно-непрерывные функции $\sigma_1(s)=\Delta_k$ для $s\in[S_k,S_{k+1})$ и $\sigma_2(s)=\tilde\Delta_k$ для $s\in[S_k,S_{k+1})$. Пусть $\sigma_3(s)=\frac{\varepsilon_{k+1}(s-S_k)+\varepsilon_k(S_{k+1}-s)}{S_{k+1}-S_k}$ и $\sigma_4(s)=\frac{1}{2}\sigma_3(s)$ для $s\in[S_k,S_{k+1}]$. Нетрудно видеть, что $\sigma_3(s)=-\int\limits_s^\infty\sigma_1(\tau)\,d\tau$ и $\sigma_4(s)=-\int\limits_s^\infty\sigma_2(\tau)\,d\tau$. Очевидно, что $\sigma_3(\tau)>\sigma_4(\tau)>|\xi(s)|$. Наконец, введем $\sigma_5(s)=\frac{\Delta_k(S_{k+1}-s)+\tilde\Delta_k(s-S_k)}{S_{k+1}-S_k}$ для $s\in[S_{k+1},S_k]$ и положим $\bar\xi(s)=-\int\limits_s^\infty\sigma_5(\tau)\,d\tau$. Легко видеть, что $0\geqslant\sigma_2(s)\geqslant\sigma_5(s)\geqslant\sigma_1(s)$, т.е. $0<-\sigma_2(s)\leqslant-\sigma_5(s)\leqslant-\sigma_1(s)$. Интегрируя последнее неравенство от s до ∞, получим, что $-\int\limits_s^\infty\sigma_2(\tau)\,d\tau\leqslant-\int\limits_s^\infty\sigma_5(\tau)\,d\tau\leqslant-\int\limits_s^\infty\sigma_1(\tau)\,d\tau$, т.е. $\sigma_4(s)\leqslant\bar\xi(s)$. Сравнивая последнее неравенство с неравенством $\sigma_4(s)>|\xi(s)|$, мы получаем, что $\bar\xi(s)>|\xi(s)|$. $\bar\xi'(s)<0$ и для $s\in(S_k,S_{k+1})$ $\bar\xi''(s)=\frac{\tilde\Delta_k-\Delta_k}{S_{k+1}-S_k}=\frac{\varepsilon_{k+1}}{(S_{k+1}-S_k)^2}>0$. Из того, что $\sigma_4(s)$ и $\sigma_3(s)$ стремятся к нулю при $\qquad$, следует, что и $\bar\xi(s)\to 0$ при $s\to\infty$.

Этим доказательство леммы завершается.

Лемма 6^I. Пусть $\xi(s)$ определена и ограничена для $s \in [0, S_0)$ и стремится к нулю при $s \to S_0$. Тогда существует $\bar{\xi}(s) > 0$, монотонно стремящаяся к нулю при $s \to S_0$ такая, что $\bar{\xi}(s) > |\xi(s)|$, а $\bar{\xi}''(s)$ -кусочно-непрерывна, в точках разрыва имеет предел справа и слева и $\bar{\xi}''(s) < 0$ для любого $s \in [0, S_0)$.

Доказательство:

Из плоскости (s, ξ) возьмем полупрямую L : $s = s_0$, $\xi > 0$ и на ней последовательность точек $p_k = \{s_0, \xi_0 \cdot 2^{-k}\}$, где $\xi_0 = \sup\limits_{s \in [0, s_0)} |\xi(s)|$. Через каждую точку p_k проведем прямую $\xi = \xi_k + \gamma_k (s_0 - s)$ $(\gamma_k > 0)$ так, чтобы график функции $|\xi(s)|$ находился ниже нашей прямой. Для этого нужно взять γ_k достаточно большим. Выбор γ_k подчиним следующим условиям: $(\gamma_{k+1} - \gamma_k) > \frac{1}{2}(\gamma_k - \gamma_{k-1}) > \frac{3}{16} \frac{\xi_0}{S_0}$ и $\gamma_{k+1} > \frac{4}{3}\gamma_k$. Тогда, как нетрудно проверить $\bar{S}_{k+1} = S_0 + \frac{3}{4}\frac{\xi_{k+1} - \xi_k}{\gamma_{k+1} - \gamma_k}$ и $\bar{\xi}_{k+1} = \frac{\xi_k \gamma_{k+1} - \gamma_k \xi_{k+1}}{\gamma_{k+1} - \gamma_k}$ при $k+1 > 0$, а $\bar{S}_0 = 0$ и $\bar{\xi}_0 = \xi_0 + \frac{4}{3}\gamma_0 S_0$ удовлетворяют следующим условиям: $\bar{S}_{k+1} > \bar{S}_k$, $\bar{\xi}_{k+1} < \bar{\xi}_k$ и $\gamma_k(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k) < (\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_{k+1}) < \gamma_{k+1}(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k)$. Последние условия, как нетрудно в этом убедиться, являются необходимыми и достаточными для существования непрерывной положительной функции $\alpha_k(s)$ такой, что $\int\limits_{\bar{S}_k}^{\bar{S}_{k+1}} \alpha_k(s)\,ds = \gamma_{k+1} - \gamma_k$ и $\int\limits_{\bar{S}_k}^{\bar{S}_{k+1}} \int\limits_{\bar{S}_k}^{\omega} \alpha_k(s)\,ds\,d\omega = (\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_{k+1}) - \gamma_k(\bar{S}_{k+1} - \bar{S}_k)$.

Обозначим через $\gamma(s)$ функцию, равную $\gamma_k + \int\limits_{\bar{S}_k}^{s} \alpha_k(\tau)\,d\tau$ для $s = [\bar{S}_k, \bar{S}_{k+1}]$, и пусть $\bar{\xi}(s) = \bar{\xi}_0 - \int\limits_0^s \gamma(\tau)\,d\tau$. Тогда, как это нетрудно проверить, полученная функция $\bar{\xi}(s)$ удовлетворяет всем условиям леммы.

Заметим сразу, что лемма 5 (лемма 5^I) останется справедливой если $\xi(s)$, удовлетворяющую условиям леммы 5 (леммы 5^I), заменить на $\bar{\xi}(s)$, построенную в лемме 6 (лемме 6^I).

Пользуясь последним замечанием, будет совсем нетрудно закончить доказательство теоремы 5. Обозначим через $X(t)$ решение однородного уравнения (3.I), удовлетворяющее следующим условиям: $x(t_0)=1$, $\dot{x}(t)<0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$. Тогда, как известно, общее решение уравнения (3.I) имеет вид:

$$\bar{x}(t) = C_1 x(t) + C_2 x(t)\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{m(\tau)x^2(\tau)} - \tag{3.4}$$

$$- x(t)\int_{t_0}^{t_0}\left\{\frac{1}{m(\tau)x^2(\tau)}\int_{t_0}^{\tau} K(\omega)x(\omega)\xi(\omega)\,d\omega\right\}d\tau,$$

где $x(t)\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{m(\tau)x^2(\tau)}$ есть второе, линейно-независимое от $x(t)$ решение однородного уравнения (3.I). Из того, что однородное уравнение (3.I) удовлетворяет условиям (α) следует, что $x(t)\int_{t_0}^{t}\frac{d\tau}{m(\tau)x^2(\tau)}\to\infty$ при $t\to\infty$. Следовательно, выражение (3.4) может стремиться к нулю только при $C_2 = \int_{t_0}^{\infty} K(\omega)x(\omega)\xi(\omega)d\omega$. По предположению $\xi(t)$ ограничена и стремится к нулю при $t\to\infty$. Тогда согласно леммам 6 и 6^{I} всегда существует $\bar{\xi}(t) > |\xi(t)|$ такая, что если в уравнении (3.I) заменить на $\bar{\xi}(t)$, то получится уравнение, у которого согласно леммам 5 и 5^{I} существует решение, стремящееся к нулю при $t\to\infty$. Это означает, что выражение

$$x(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{m(\tau)x^2(\tau)}\int_{\tau}^{\infty} K(\omega)\bar{\xi}(\omega)x(\omega)\,d\omega\right\}d\tau$$

стремится к нулю при $t\to\infty$. Так как $x(t)>0$ при $t\geqslant t_0$, то

$$x(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{m(\tau)x^2(\tau)}\int_{\tau}^{\infty} K(\omega)\bar{\xi}(\omega)x(\omega)\,d\omega\right\}d\tau \geqslant$$

$$\geqslant x(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{m(\tau)x^2(\tau)}\int_{\tau}^{\infty} K(\omega)|\xi(\omega)|x(\omega)\,d\omega\right\}d\tau \geqslant$$

$$\geqslant x(t)\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{1}{m(\tau)x^2(\tau)}\left|\int_{\tau}^{\infty} K(\omega)\xi(\omega)x(\omega)\,d\omega\right|\right\}d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \left| x(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{1}{m(\tau) x^2(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} k(\omega) \xi(\omega) x(\omega)\, d\omega \right\} d\tau \right|, \text{и},$$

следовательно, выражение

$$x(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{1}{m(\tau) x^2(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} k(\omega) \xi(\omega) x(\omega)\, d\omega \right\} d\tau$$

стремится к нулю при $t \to \infty$. Таким образом, выражение

$$x_0 x(t) + x(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{1}{m(\tau) x^2(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} k(\omega) \xi(\omega) x(\omega)\, d\omega \right\} d\tau$$

есть искомое решение. Этим теорема 5 доказана.

Лемма 7. Пусть однородное уравнение (3.I) удовлетворяет условиям (α), а $x(t)$ есть решение однородного уравнения (3.I), удовлетворяющее условиям: $x(t_0) = 1$, $\dot{x}(t) < 0$ при $t \geqslant t_0$ и $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда $m(t)\dot{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Доказательство:

Для случая, когда интеграл $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{m(t)}$ расходится доказательство очевидно. Докажем справедливость леммы для случая, когда интеграл $\int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{m(t)}$ сходится. $m(t)\dot{x}(t)$ есть монотонно возрастающая функция, строго меньшая нуля для любого $t \geqslant t_0$. Пусть $\lim_{t \to \infty} m(t)\dot{x}(t) = -c < 0$. Тогда при любом $t \geqslant t_0$ $m(t)\dot{x}(t) < -c$, т.е. $-\dot{x}(t) > \frac{c}{m(t)}$. Интегрируя от t до ∞, получаем, что $x(t) > c \int_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{m(\tau)}$. Умножив последнее рпвенство на $k(t)$ и проинтегрировав от t_0 до ∞, получаем, что

$$\int_{t_0}^{\infty} k(t) \int_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{m(\tau)}\, dt < \frac{1}{c} \int_{t_0}^{\infty} k(t) x(t)\, dt .$$

Последний интеграл, как было замечено раньше, сходится. Следовательно, интеграл $\int_{t_0}^{\infty} \kappa(t) \int_{t}^{\infty} \frac{d\tau}{m(\tau)}\, dt$ также сходится. Известно, что из сходимости интеграла $\int_{0}^{\infty}\int_{v}^{\infty} |f(s)|\, ds\, dv$ следует сходимость интеграла $\int_{0}^{\infty} s|f(s)|\, ds$. Для $s = \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)\, d\tau$ и $f(s) = \frac{1}{m(t(s)) \cdot \kappa(t(s))}$ первый интеграл равен $\int_{t_0}^{\infty}\int_{t}^{\infty} \kappa(t) \frac{d\tau}{m(\tau)}\, dt$ и по доказанному сходится. Следовательно, сходится и второй интеграл, т.е. сходится интеграл $\int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{m(t)} \int_{t_0}^{t} \kappa(\tau)\, d\tau\, dt$, что противоречит условиям (α). Полученное противоречие доказывает нашу лемму.

Теорема 6. Пусть уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(m(t,\lambda)\dot{x}\right) - \kappa(t,\lambda)\, x = -\kappa(t,\lambda)\, \xi(t,\lambda) \tag{3.5}$$

удовлетворяет условиям теоремы 5 для любого $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$, $(\delta > 0)$ функции $m(t,\lambda)$, $\kappa(t,\lambda)$ и $\xi(t,\lambda)$ стремятся к $m(t,\lambda_0)$, $\kappa(t,\lambda_0)$ и $\xi(t,\lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно на каждом отрезке $[t_0, t']$, а функция $\xi(t,\lambda)$ ограничена одной константой для любого $t \geq t_0$ и любого $\lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$. Обозначим через $x_\lambda(t)$ решение уравнения (3.5), удовлетворяющее условиям: $x_\lambda(t_0) = x_0$ и $x_\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда $x_\lambda(t)$ непрерывной зависит от λ, т.е. $x_\lambda(t) \to x_{\lambda_0}(t)$ при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно на каждого конечном отрезке значений t.

Доказательство:

Согласно теореме 5

$$x_\lambda(t) = x_0 \bar{x}_\lambda(t) + \bar{x}_\lambda(t) \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{1}{m(\tau,\lambda)\, \bar{x}_\lambda^2(\tau)} \int_{\tau}^{\infty} \kappa(\omega,\lambda)\, \xi(\omega,\lambda)\, \bar{x}_\lambda(\omega)\, d\omega \right\} d\tau \tag{3.6}$$

где $\bar{x}_\lambda(t)$ есть решение однородного уравнения (3.5), удовлетворяющее условиям: $\bar{x}_\lambda(t_0) = x_0$, $\bar{x}_\lambda(t) < 0$ и $\bar{x}_\lambda(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Из того, что $\overline{x}_\lambda(t)$ и $\dot{x}_\lambda(t)$ при $\lambda \to \lambda_0$, стремятся к $\overline{x}_{\lambda_0}(t)$ и $\dot{\overline{x}}_{\lambda_0}(t)$ соответственно равномерно на каждом отрезке $[t_0, t]$, пользуясь леммой 7, можно написать, что

$$\int_t^\infty K(\tau,\lambda)\,\overline{x}_\lambda(\tau)\,d\tau = -m(t,\lambda)\,\dot{\overline{x}}_\lambda(t) \to -m(t,\lambda_0)\,\dot{\overline{x}}_{\lambda_0}(t) =$$

$$= \int_t^\infty K(\tau,\lambda_0)\,\overline{x}_{\lambda_0}(\tau)\,d\tau \quad \text{при } \lambda \to \lambda_0$$

равномерно на каждом конечном отрезке значений t (в силу того, что написанные выражения есть монотонно стремящиеся к нулю функции t, следует, что сходимость будет равномерной на всей полуоси $t > t_0$). Пользуясь равномерной по λ ограниченностью функции $\xi(t,\lambda)$ нетрудно показать, что

$$\int_t^\infty K(\tau,\lambda)\,\xi(\tau,\lambda)\,\overline{x}_\lambda(\tau)\,d\tau \to \int_t^\infty K(\tau,\lambda_0)\,\xi(\tau,\lambda_0)\,\overline{x}_{\lambda_0}(\tau)\,d\tau$$

при $\lambda \to \lambda_0$ равномерно на каждом конечном отрезке значений t. Последнее же означает, что выражение (3.6) при $\lambda \to \lambda_0$ стремится к аналогичному выражению для $\lambda = \lambda_0$ равномерно на каждом конечном отрезке значений t. Этим теорема доказана.

Глава 4.

Результаты предыдущей главы дают возможность закончить намеченную программу. Целью этой главы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 7. Пусть функции $m(\varepsilon,t)$, $K(\varepsilon,t)$, $p'(x)$ и $\varepsilon f(\varepsilon,t,x,\dot{x})\dot{x}$ обладают непрерывными производными по ε, x и $\dot{x}$ до K-того порядка $(K>0)$ и удовлетворят условиям (β) (их смысл будет объяснен при доказательстве теоремы). Тогда каждое решение уравнения $(*)$, удовлетворяющее условиям (A), имеет непрерывные производные по ε до K-того порядка, стремящиеся к нулю при $t\to\infty$ и удовлетворяющие уравнениям, получающимся из $(*)$ последовательным дифференцированием по ε.

Доказательство:

Докажем утверждение для первой производной. Для производных старших порядкоЙ доказательство аналогично. Пусть $x_\varepsilon(t)$ - решение уравнения $(*)$, удовлетворяющее условиям: $x_\varepsilon(t_0)=x_0$ $(|x_0-x_s|<h_0)$, $x_\varepsilon(t)\to x_s$ при $t\to\infty$ и $\operatorname{sign}\dot{x}_\varepsilon(t)=$ $=\operatorname{sign}(x_s-x_0)$ для $t\geq t_0$,

а $x_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}(t)$ - решение уравнения $(*)$, с измененным значением параметра, удовлетворяющее тем же условиям. Из уравнения для $x_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}(t)$ вычтем соответствующее для $x_\varepsilon(t)$. Применяя лемму Адамара (см., например, [7], стр.81), мы получим, что $\frac{\Delta x_\varepsilon(t)}{\Delta\varepsilon}=\frac{x_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}(t)-x_\varepsilon(t)}{\Delta\varepsilon}$ при $\Delta\varepsilon\neq 0$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(m(\varepsilon+\Delta\varepsilon,t)\frac{\Delta\dot{x}_\varepsilon(t)}{\Delta\varepsilon}\right)-\frac{\Delta\dot{x}_\varepsilon(t)}{\Delta\varepsilon}\cdot\Big\{f(\varepsilon+\Delta\varepsilon,t,x_{\varepsilon+\Delta\varepsilon},\dot{x}_{\varepsilon+\Delta\varepsilon})+$$

$$+ \dot{x}_\varepsilon \int_0^1 f'_{\dot{x}_\varepsilon}(\varepsilon+\Delta\varepsilon, t, x_{\varepsilon+\Delta\varepsilon}, \dot{x}_\varepsilon + \xi\Delta\dot{x}_\varepsilon)\, d\xi \Big\} (\varepsilon+\Delta\varepsilon) +$$

$$+ \frac{\Delta x_\varepsilon(t)}{\Delta\varepsilon} \Big\{ \kappa(\varepsilon+\Delta\varepsilon, t) \int_0^1 p''(x_\varepsilon + \xi\Delta x_\varepsilon)\, d\xi - \qquad (4.1)$$

$$- (\varepsilon+\Delta\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon \int_0^1 f'_{x_\varepsilon}(\varepsilon+\Delta\varepsilon, t, x_\varepsilon + \xi\Delta x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, d\xi \Big\} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\Big(\dot{x}_\varepsilon \int_0^1 m'_\varepsilon(\varepsilon+\xi\Delta\varepsilon, t)\, d\xi \Big) - p'(x_\varepsilon) \int_0^1 \kappa'_\varepsilon(\varepsilon+\xi\Delta\varepsilon, t)\, d\xi +$$

$$+ f(\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon + (\varepsilon+\Delta\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon \int_0^1 f'_\varepsilon(\varepsilon+\xi\Delta\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, d\xi,$$

с граничными условиями:

$$\frac{\Delta x_\varepsilon(t_0)}{\Delta\varepsilon} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta x_\varepsilon(t)}{\Delta\varepsilon} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow \infty .$$

Пусть $z_\varepsilon(t)$ есть решение уравнения:

$$\frac{d}{dt}(m(\varepsilon,t)\,\dot{z}_\varepsilon) - \varepsilon\,\dot{z}_\varepsilon \Big\{ f(\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon) + f'_{\dot{x}_\varepsilon}(\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon \Big\} +$$

$$+ z_\varepsilon \Big\{ \kappa(\varepsilon,t)\, p''(x_\varepsilon) - \varepsilon f'_{x_\varepsilon}(\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon \Big\} = f(\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon + \qquad (4.2)$$

$$+ \varepsilon f'_\varepsilon(\varepsilon, t, x_\varepsilon, \dot{x}_\varepsilon)\, \dot{x}_\varepsilon - \frac{d}{dt}(m'_\varepsilon(\varepsilon,t)\, \dot{x}_\varepsilon) - \kappa'_\varepsilon(\varepsilon,t)\, p'(x_\varepsilon)$$

с граничными условиями: $z_\varepsilon(t_0) = 0$ и $z_\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В силу теоремы 4 коэффициенты в уравнении (4.I) при $\Delta\varepsilon \to 0$ стремятся к соответствующим коэффициентам уравнения (4.2). Однородные уравнения (4.I) и (4.2) удовлетворяют условиям (α) в силу того, что условиям (α) удовлетворяет уравнения ($*$). Поэтому для применимости теорем 5 и 6 нехватает только, чтобы выражение

$$\Big\{f(\varepsilon,t,x_\varepsilon,\dot x_\varepsilon)\dot x_\varepsilon+(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\dot x_\varepsilon\int_0^1 f'_\varepsilon(\varepsilon+\xi\Delta\varepsilon,t,x_\varepsilon,\dot x_\varepsilon)\,d\xi-$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(\dot x_\varepsilon\int_0^1 m'_\varepsilon(\varepsilon+\xi\Delta\varepsilon,t)\,d\xi\Big)-p'(x_\varepsilon)\int_0^1 K'_\varepsilon(\varepsilon+\xi\Delta\varepsilon,t)\,d\xi\Big\}:$$

$$\Big\{K(\varepsilon+\Delta\varepsilon,t)\int_0^1 p''(x_\varepsilon+\xi\Delta x_\varepsilon)\,d\xi-$$

$$-(\varepsilon+\Delta\varepsilon)\dot x_\varepsilon\int_0^1 f'_{x_\varepsilon}(\varepsilon+\Delta\varepsilon,t,x_\varepsilon+\xi\Delta x_\varepsilon,\dot x_\varepsilon)\,d\xi\Big\}$$

было равномерно ограничено для достаточно малых $\Delta\varepsilon$ и стремилось к нулю при $t\to\infty$. Это будет выполнено, если для любого $c>0$ для $|x-x_s|\le h_0$, $|\dot x|\le c$ и достаточно малых $\Delta\varepsilon$ выражение $\{|f(\varepsilon,t,x_\varepsilon,\dot x_\varepsilon)+(\varepsilon+\Delta\varepsilon)f'_\varepsilon(\varepsilon+\theta_1\Delta\varepsilon,t,x_\varepsilon,\dot x_\varepsilon)|+$ $+|K'_\varepsilon(\varepsilon+\theta_1\Delta\varepsilon,t)|\}:|K_c(\varepsilon+\Delta\varepsilon,t)|$ $(0<\theta_1<1)$ (см.гл.I) будет ограниченно при $t\to\infty$ или возрастает медленнее, чем $\min\left\{\frac{1}{|\dot x_\varepsilon(t)|},\frac{1}{|x_s-x_\varepsilon(t)|}\right\}$, а выражение $\frac{d}{dt}(\dot x_\varepsilon m'_\varepsilon(\varepsilon+\theta_2\Delta\varepsilon,t)):$ $|K_c(\varepsilon+\Delta\varepsilon,t)|$ $(0<\theta_2<1)$ ограничено и $\to 0$ при $t\to\infty$. Назовем это условие условием (β),. Требованием выполнимости для уравнения ($*$) условия (β) мы можем закончить доказательство теоремы, ибо ее доказательство для производных более высокого порядка при условии выполнимости условия, аналоиичного условию (β), совершенно одинаково.

Глава 5.

Займемся теперь фактическим вычислением $\bar{X}_K(t)$. Дифференцируя уравнение ($*$) K раз по ε и полагая $\varepsilon = 0$, мы получаем:

$$m_0 \ddot{\bar{X}}_0 + K_0 p'(\bar{X}_0) = 0 \tag{5.0}$$

$$m_0 \ddot{\bar{X}}_K + K_0 p''(\bar{X}_0)\bar{X}_K = \mathcal{F}_K(t, \bar{X}_0, \ldots, \ddot{\bar{X}}_{K-1}) \tag{5.К}$$

Таким образом, определив $\bar{X}_0(t)$, из (5.0.), мы могли бы, пользуясь (5к), определять последовательно $\bar{X}_1(t)$, $\bar{X}_2(t)$ и т.д. Однако определение $\bar{X}_K(t)$ значительно упрощается, если в (5к) за независимую переменную взять $\bar{X}_0$. Умножим для этого (5.0) на $\dot{\bar{X}}_0(t)$ и проинтегрируем от t_0' до t. Получим:

$$m_0\left(\frac{\dot{\bar{X}}_0^2(t)}{2} - \frac{\dot{\bar{X}}_0^2(t_0')}{2}\right) = -K_0\left\{p(\bar{X}_0(t)) - p(\bar{X}_0(t_0'))\right\} \tag{5.I}$$

Переходя в (5.I) к пределу при $t \to \infty$, получаем, пользуясь тем, что $\bar{X}_0(t) \to X_s$ при $t \to \infty$, а $\dot{\bar{X}}_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$, что

$$-m_0 \frac{\dot{\bar{X}}_0^2(t_0')}{2} = -K_0\left\{p(X_s) - p(X_0(t_0'))\right\} \tag{5.2}$$

Вычитая (5.2) из (5.I), мы получаем, что

$$m_0 \frac{\dot{\bar{X}}_0^2(t)}{2} = K_0\left\{p(X_s) - p(\bar{X}_0(t))\right\}, \text{ т.е.}$$

$$t = \int_{X_0}^{\bar{X}_0} \frac{d\xi}{\sqrt{2\frac{K_0}{m_0}(p(X_s) - p(\xi))}} + t_0',$$

где t_0' - момент времени, в которой решение $x_\xi(t)$, удовлетворяющее условиям (A), в последний раз пересекает прямую $x = x_0$

Имеем:

$$\dot{\bar{X}}_K = \frac{d\bar{X}_K}{d\bar{X}_0}\dot{\bar{X}}_0 , \quad \ddot{\bar{X}}_K = \frac{d^2\bar{X}_K}{d\bar{X}_0^2}\dot{\bar{X}}_0^2 + \frac{d\bar{X}_K}{d\bar{X}_0}\ddot{\bar{X}}_0 .$$

Подставляя в (5.К), получаем:

$$2\frac{d^2\bar{X}_K}{d\bar{X}_0^2}\left(p(x_s) - p(\bar{X}_0)\right) - \frac{d\bar{X}_K}{d\bar{X}_0}p'(\bar{X}_0) +$$

$$+ \bar{X}_K p''(\bar{X}_0) = \frac{1}{K_0}\mathcal{F}_K(\bar{X}_0, t_0') . \tag{5.3}$$

Нетрудно проверить, что $\bar{X}_K(\bar{X}_0) = [2p(x_s) - 2p(\bar{X}_0)]^{1/2}$ есть стремящееся к нулю при $\bar{X}_0 \to x_s$ (т.е. при $t \to \infty$) решение однородного уравнения (5.3). Тогда согласно теореме 5 решение уравнения (5.3), равное нулю при $\bar{X}_0 = x_0$, т.е. при $t = t_0'$ и стремящееся к нулю при $\bar{X}_0 \to x_s$, т.е. при $t \to \infty$ имеет вид:

$$\bar{X}_K(\bar{X}_0) = \sqrt{2p(x_s) - 2p(x_0)} \cdot \int_{x_0}^{\bar{X}_0} \frac{-\int_x^{x_s}\frac{1}{K_0}\mathcal{F}_K(\xi, t_0')\,d\xi}{\left(2p(x_s) - 2p(x)\right)^{3/2}}\,dx . \tag{5.4}$$

Для того, чтобы вычислить область захвата для момента времени t_0, нужно вычислить $\bar{X}_K(\bar{X}_0)$ и $\frac{d\bar{X}_K}{d\bar{X}_0}\dot{\bar{X}}_0$ для значения $\bar{X}_0 = \bar{X}_0(t_0)$ для всех t_0'. По взятому t_0' определяем $\bar{X}_0$ из формулы:

$$\int_{x_0}^{\bar{X}_0} \frac{d\xi}{\sqrt{2\frac{K_0}{m_0}\left(p(x_s) - p(\xi)\right)}} = t_0 - t_0' . \tag{5.5}$$

Для полученного таким образом $\bar{X}_0$, определяем $\bar{X}_K(\bar{X}_0)$ и $\frac{d\bar{X}_K}{d\bar{X}_0}\dot{\bar{X}}_0$ из формулы (5.4), подставив туда предварительно выражение для t_0' по формуле (5.5). Так полученные поправки дают хорошие результаты для той части границы области захвата, которая уходит в точку $(x_s, 0)$, т.е. для $t_0' \le t_0$. Для $t_0' > t_0$ мы сначала определим $\dot{x}_\varepsilon(t_0')$, а затем будем искать наше решение для $t_0 \leq t \leq t_0'$, беря в качестве $\bar{x}_0$ решение уравнения (5.0) с начальными условиями: $\bar{x}_0(t_0') = x_0$ и $\dot{\bar{x}}_0(t_0') = \dot{x}_\varepsilon(t_0')$, а для $\bar{x}_K$ - решение уравнения (5.К) с начальными условиями: $\bar{x}_K(t_0') = \dot{\bar{x}}_K(t_0') = 0 \quad (K > 0)$. Для этого разложения справедлива теорема А.Пуанкаре о разложении в ряд по малому параметру и обычные теоремы о существовании производных по параметру. Таким образом, и в этом случае мы можем определить точку $(\dot{x}_\varepsilon(t_0), x_\varepsilon(t_0))$ на решении, удовлетворяющем условиям (A).

Заключение

Читатель мог заметить, что нигде, кроме последней главы, мы не пользовались близостью уравнения ($*$) к консервативному. Таким образом, результаты первых четырех глав останутся справедливыми и для уравнения:

$$\frac{d}{dt}(\tilde{m}(\varepsilon,t)\dot{x}) + \tilde{k}(\varepsilon,t)p'(x) = \tilde{f}(\varepsilon,t,x,\dot{x})\dot{x} \qquad (**)$$

без предположения, что при $\varepsilon = 0$ функции $\tilde{m}(\varepsilon,t)$ и $\tilde{k}(\varepsilon,t)$ не зависят от t, а $\tilde{f}(\varepsilon,t,x,\dot{x})\dot{x}$ равна нулю тождественно. Поэтому мы и здесь могли бы сначала определить область захвата для уравнения ($**$) при $\varepsilon = 0$, что обычно проще, чем при $\varepsilon \neq 0$ а затем строить асимптотические разложения по степеням ε. Однако случаи, когда коэффициенты разложения можно выразить в виде интегралов, как это имеет место для уравнения ($*$), при таких общих предположениях, представляются нам крайне редкими. Однако численное интегрирование линейных уравнений типа (5.К), вероятно, все-таки проще, чем численное интегрирование уравнения ($**$).

Литература

I. А.П.Гринберг,- Методы ускорения заряженных частиц, Гостехиздат, 1950, 245-246.

2. Twiss, R.Q. and Frank, N.H., Orbital Stability in a Proton Synchrotron, Rev. Sci. Instr., 20, 1 (1942).

(Перевод: "Устойчивость орбит протонов в синхрофазотроне", сборник "Резонансные циклические ускорители элементарных частиц", И.Л., 1950, 136-137.)

3. Kaiser, T.R., On the Capture of particles into synchrotron Orbits, Proc. Phys. Soc., 19 A, 52-66 (1950).

(Перевод: "О захвате частиц на синхронную орбиту", сборник "Проблемы современной физики", 2 (1952), 62-63).

4. Wintner, A. On almost free linear motions, Am. J. of Math., 71, (1949), 595-602.

5. Hartman, P., and Wintner, A., On the non-increasing solutions of $y''=f(x,y,y')$, Am.J. Math., 73,2,390 (1950).

6. Weyl, H., Uber gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Gottinger Nachrichten, 1909, 37-63.

7. И.Г. Петровский, - Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949.

8. П.С.Александров, - Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, 1948.