



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Г.И. Копылов

P-1388

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ
КАСКАДНОГО РАСПАДА

*ж.ЭТФ, 1964, т.46, в.6,
стр. 2063-2069.*

Дубна 1983

Г.И. Копылов

P-1368

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ
КАСКАДНОГО РАСПАДА

Направлено в ЖЭТФ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

2079/1 48

1. Рассмотрим систему трех бесспиновых частиц 1, 2, 3 с массами m_1, m_2, m_3 , энергиями $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, эффективными массами пар m_{12}, m_{13}, m_{23} и эффективной массой тройки M . Фазовое пространство состояний этой системы в случае, когда центр масс покоится, изображается диаграммой Далитца^{/1/} в переменных $u_i^{(1)} = \omega_i - m_i$ ($i = 1, 2, 3$) или^{/2/} в переменных $u_i^{(2)} = m_{jk}^2 - (m_j + m_k)^2$ ($i \neq j \neq k$) (рис.1). Обе эти диаграммы обладают свойствами $\sum_i a_i u_i = \text{Const}$ (a_i - масштаб измерения u_i), а элемент площади на обеих диаграммах пропорционален элементу фазового объема системы трех частиц:

$$S_3 = \int \prod_i \frac{d\vec{p}_i}{2\omega_i} \delta^4(\sum_i p_i - P) = \pi^2 \iint_{\Phi^{(1)}} du_1^{(1)} du_2^{(1)} = \left(\frac{\pi}{2M}\right)^2 \iint_{\Phi^{(2)}} da_1^{(2)} da_2^{(2)} \quad (1)$$

(Φ - физическая область изменения переменных u).

Рассмотрим подробнее второй вариант диаграммы. Выпишем в интеграле по $\Phi^{(2)}$ пределы интегрирования (см., например,^{/3/}):

$$S_3 = \left(\frac{\pi}{2M}\right)^2 \int_{(m_2+m_3)^2}^{(M-m_1)^2} ds_{23} \int_{F^-(s_{23}, M)}^{F^+(s_{23}, M)} ds_{12} \cdot f(s_{12}, s_{23}, M), \quad (2)$$

где f - плотность точек на диаграмме, а

$$s_{11} = m_{11}^2, \quad \omega_1^2 = \frac{M^2 - s_{23} - m_1^2}{2\sqrt{s_{23}}}; \quad \omega_3^2 = \frac{s_{23} + m_3^2 - m_2^2}{2\sqrt{s_{23}}}; \quad p_1^2 = \omega_1^2 - m_1^2; \quad (3_{1,2,3,4})$$

$$F^\pm(s_{23}, M) = M^2 + m_2^2 - s_{23} - 2\omega_1^* \omega_3^* \pm 2p_1^* p_3^*. \quad (4)$$

Пусть теперь частицы 2 и 3 получились при распаде связанного состояния с массой m_{23} .

Фазовое пространство состояний с $m_{23} = \text{const}$ есть отрезок АВ. Точки вдоль отрезка отвечают различным значениям $m_{12}^2 = s_{12}$ или различным косинусам угла вылета частицы 2 в системе покоя пары 2 + 3^{/4/}. Отсюда следует, что если вероятности состояний описываются ковариантной моделью множественного рождения или если состояние с данным значением m_{23} распадается изотропно ($f = \text{const}$), то распределение по m_{12}^2 , в соответствии с (2), является прямоугольным с высотой $(\pi/2M)^2$ в пределах $F^\pm(s_{23}, M)$, а распределение по m_{12} имеет вид трапеции с максимумом в $F^+(s_{23}, M)$. Когда хорда АВ достаточно близка к границе "эллипса" Далитца, например, при малой энергии распада системы 2 + 3, то распределение по m_{12} должно обладать узким пиком при $s_{12} = F^+(s_{23}, M)$. При больших энергиях распада пик сместится к $F^+(s_{23}, M)$. В обоих случаях этот пик может имитировать резонанс в системе 1 + 2, хотя на самом деле резонируют частицы 2 и 3. Это - еще одна возможная причина ложных резонансов в дополнение к разобранным в^{/5/}.

2. Пусть известно, что система А, масса которой не фиксирована, распадается на

1, 2, 3 через промежуточное состояние (2+3) с массой m_{23} , причем распад $a \rightarrow 2+3$ изотропен. Пусть измерена плотность распределения $w(s_{12})$ по квадрату эффективной массы m_{12} . Покажем, что: 1) по положению пика в $w(s_{12})$ может быть определена масса m_{23} частицы a ; 2) по $w(s_{12})$ может быть восстановлено распределение по эффективной массе системы $A = (123)$ и системы (13). Эта теорема может явиться основой поисков резонансов в системе (123) или (13) при недостаточно высокой эффективности регистрации частицы 3.

Рассмотрим для доказательства изменение пределов $F^\pm(s_{23}, M)$ с ростом M от наименьшего значения $m_{23} + m_1$. При $M = m_{23} + m_1$

$$F^+ = F^- = \bar{s}_{12} = m_{23} m_1 + m_1^2 + m_2^2 + \frac{m_1}{m_{23}}(m_2^2 - m_3^2). \quad (5)$$

Далее, исследуя функции

$$\frac{dF^+}{dM^2} = \frac{(m_{23} - \omega_2^*) p_1^* + \omega_1^* p_3^*}{m_{23}^2}, \quad (6)$$

легко получить, что $\frac{dF^+}{dM^2} > 0$ при всех M , а $\frac{dF^-}{dM^2} < 0$ при $M^2 > M_{кр}^2 = m_1 m_2 + m_2^2 + \frac{m_1}{m_2}(m_2^2 - m_3^2 + m_1 m_2)$, причем при $M = M_{кр}$ F^- достигает наименьшего возможного предела $(m_1 + m_2)^2$. Когда $m_2 = 0$, то при любых M $\frac{dF^-}{dM^2} < 0$, т.е. $M_{кр} = \infty$ (рис. 2).

Таким образом, с ростом M от $m_{23} + m_1$ каждое значение s_{12} , большее \bar{s}_{12} , при некотором $M = M_{min}$ впервые оказывается правым концом спектра m_{12}^2 , а при другом $M = M_{max}$ - левым концом; точно так же каждое $s_{12} < \bar{s}_{12}$, если $m_2 \neq 0$, при некотором $M = M_{min}$ впервые, а при $M = M_{max}$ в последний раз принадлежит прямоугольному спектру m_{12}^2 . Чтобы найти эти значения M , вместо громоздкого прямого решения уравнений (2) проще отыскать экстремум инварианта $(p_1 + p_2 + p_3)^2$ при $(p_2 + p_3)^2 = m_{23}^2$:

$$M_{max}^2 = m_{23}^2 + m_{12}^2 - m_2^2 + 2(\omega_1 \omega_3 + p_1 p_3) \quad (m_2 \neq 0); \quad (7)$$

$$\omega_1 = \frac{m_{12}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_2}; \quad \omega_3 = \frac{m_{23}^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_2}; \quad p_1^2 = \omega_1^2 - m_1^2; \quad (8_{1,2,3})$$

При $m_2 = 0$:

$$M_{max}^2 = \infty; \quad M_{min}^2 = (m_{12}^2 \cdot m_{23}^2 - m_1^2 \cdot m_3^2) \left(\frac{1}{m_{12}^2 - m_1^2} + \frac{1}{m_{23}^2 - m_3^2} \right). \quad (9)$$

Допустим теперь, что спектр квадратов эффективных масс системы (123) имеет плотность $\Phi(M^2)$ в пределах от $(m_{23} + m_1)^2$ до ∞ . Умножим (2) на $\Phi(M^2)$ и проинтегрируем по M^2 . Переставляя порядок интегрирования, получим формулу для плотности распределения по m_{12}^2 при фиксированном m_{23}^2 в этих условиях:

$$\frac{d^2 N}{ds_{12} ds_{23}} = w(s_{12}) = \int_{M_{min}^2}^{M_{max}^2} dM^2 \cdot \frac{\pi^2}{4M^2} \Phi(M^2). \quad (10)$$

Продифференцировав (10) по s_{12} , можно получить иной вид формулы для $w(s_{12})$:

$$w(s_{12}) = \int_{(m_1+m_2)}^{s_{12}} ds_{12} [\Psi(M_{max}^2) \frac{dM_{max}^2}{ds_{12}} - \Psi(M_{min}^2) \frac{dM_{min}^2}{ds_{12}}], \quad (11)$$

где

$$\Psi(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^2 \cdot \Phi(x); \quad \frac{dM_{max}^2}{ds_{12}} = \frac{p_1(m_2 + \omega_1) \pm p_1 \omega_1}{m_2 p_1}. \quad (12_{1,2})$$

Из (10) следует, что если в спектре $\Phi(M^2)$ отсутствуют значения $M^2 > M_{кр}^2$, то при любом виде такого спектра распределение по m_{12}^2 имеет максимум - пик или плато - при $s_{12} = \bar{s}_{12}$. По положению пика из (5) можно получить значение m_{23} - массы резонансного состояния $a + 2 + 3$. Если наблюдается плато, т.е. в спектре $\Phi(M^2)$ отсутствуют массы меньше некоторой величины M_0 , то по абсциссам концов плато можно одновременно определить m_{23} и M_0 . Обозначим ω_1^a, p_1^a энергию и импульс /формула (8)/, отвечающие левому концу плато, а ω_1^b, p_1^b - те же величины на правом конце.

Если предположить, что $M_0 < M_{кр}$, то

$$m_{23} = \frac{m_2(\omega_1^b + \omega_1^a) + R}{U^{1/2}}, \quad (13)$$

$$M_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \frac{2m_2^2(p_1^a + p_1^b) + m_2(\omega_1^a + \omega_1^b)U + [2m_2(\omega_1^b + \omega_1^a) + U]R}{U}, \quad (14_1)$$

$$U = 2(\omega_1^a \omega_1^b - p_1^b p_1^a + m_1^2); \quad (15_1)$$

$$R^2 = m_2^2(p_1^b + p_1^a)^2 + m_3^2 U. \quad (16_1)$$

Если предположить, что $M_0 > M_{кр}$, то

$$m_{23} = \frac{m_2(p_1^b + p_1^a) + R}{U^{1/2}}, \quad (13_2)$$

$$M_0^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \frac{2m_2^2(\omega_1^b - \omega_1^a)^2 + m_2(\omega_1^b + \omega_1^a)U + [2(p_1^a(\omega_1^b + m_2) + p_1^b(\omega_1^a + m_2))]R}{U}, \quad (14_2)$$

$$U = 2(\omega_1^b \omega_1^a - p_1^b p_1^a - m_1^2); \quad (15_2)$$

$$R^2 = m_2^2(\omega_1^b - \omega_1^a)^2 + m_3^2 U. \quad (16_2)$$

Выбрать из этих двух решений истинное можно лишь привлекая дополнительные физические соображения об ожидаемых значениях m_{23} и M_0 .

При $m_2 = 0$ формулы (13)-(16) неприменимы. Вместо них имеем:

$$m_{23} = \frac{1}{2} \sqrt{q} (1 + \sqrt{1 + \frac{4m_3^2}{q}}), \quad (13_3)$$

$$M_0^2 = m_3^2 + m_1^2 + \frac{s_{12}^{(a)} s_{12}^{(b)} - m_1^4}{2m_1^2} (1 + \sqrt{1 + \frac{4m_3^2}{q}}), \quad (14_3)$$

$$q = (s_{12}^{(a)} - m_1^2)(s_{12}^{(b)} - m_1^2) m_1^{-2}, \quad (15_3)$$

где $s_{12}^{(a)}, s_{12}^{(b)}$ - абсциссы концов плато на кривой $w(s_{12})$.

В частности, при $m_2 = m_3 = 0$

$$m_{23} = \sqrt{q}, \quad M_0^2 = s_{12}^{(a)} s_{12}^{(b)} m_1^{-2}. \quad (13_4), (14_4)$$

Если известно, что в спектр $w(s_{12})$ давали вклад только значения $M < M_{xp}$ или только $M' > M > M_{xp}$ (рис. 2), то, произведя несколько горизонтальных сечений спектра $w(s_{12})$ и вычислив m_{23} по соответствующей формуле (13₁), можно получить значение m_{23} с повышенной точностью (будет использована не только область пика, а вся статистика измерений m_{12}).

Если же известно, что кривая $w(s_{12})$ в точности Π -образная, то с помощью формул (13)-(15) можно получить массы частиц A и a (см. § 1).

Когда определено значение m_{23} , то уравнение (10) может быть разрешено относительно $\Psi(M^2)$. Если $m_3 = 0$, то, дифференцируя (9), получим:

$$\Psi(M^2) = - \frac{dw(s_{12}(M^2))}{dM^2}. \quad (17)$$

Выбор в качестве $s_{12}(M^2)$ функций $F^+(s_{23}, M)$ или $F^-(s_{23}, M)$ приведет к одной и той же функции $\Psi(M^2)$. Практически удобнее пользоваться правым склоном пика

$$\Psi(M^2) = - \frac{dw(F^+(M^2))}{dF^+(M^2)} \cdot \frac{(m_{23} - \omega_3^*) p_2^* + \omega_1^* p_3^*}{m_{23} p_2^*}. \quad (18)$$

Если $m_3 \neq 0$, то напомним (10) для $s_{12}^{(2)}$, такого, чтобы для него M_{min}^2 совпало с M_{max}^2 из (10) (рис. 2). Сложив полученное равенство с (10), получим:

$$w(s_{12}^{(1)}) + w(s_{12}^{(2)}) = \int_{M_{min}^2(s_{12}^{(1)})}^{M_{max}^2(s_{12}^{(2)})} dM^2 \cdot \Psi(M^2). \quad (19)$$

Повторим эту процедуру до тех пор, пока $\Psi(M^2) = 0$ на верхнем пределе интегрирования. Тогда после дифференцирования будем иметь:

$$\Psi(M^2) = - \frac{dw(s_{12}^{(1)})}{dM^2} - \frac{dw(s_{12}^{(2)})}{dM^2} - \dots, \quad (20)$$

где $s_{12}^{(1)}$ вычисляется по одной из формул (4), смотря по тому, какой склон кривой $w(s_{12})$ используется, т.е. $s_{12}^{(1)}$ - ордината точки A_1 с абсциссой M^2 , затем по (7) вычисляется абсцисса точки B_1 , которая после подстановки в (4) даст $s_{12}^{(2)}$ - ординату точки A_2 и т.д. Удобнее расчет по (20) вести графически, пользуясь формулой

$$\Psi(M^2) = - \sum_i w'(A_i) a_i, \quad (21)$$

где $w'(A_i)$ - наклон касательных к спектру m_{12}^2 в точках A_i , определяемых по указанию на чертеже правилу; $a_i = \frac{ds_{12}(A_i)}{dM^2}$ - отношение приращений ординат точек A_i к малому приращению M^2 , также легко определяемое графически.

Восстановив спектр M^2 , можно получить затем спектр m_{23}^2 по формуле, аналогичной (10):

$$w(s_{12}) = \int_{m_{1a}^2}^{M_{max}^2} dM^2 \cdot \Psi(M^2), \quad (22)$$

где

$$\bar{M}_{min}^2 = m_{23}^2 + m_{13}^2 - m_1^2 + 2(\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \pm \bar{p}_1 \bar{p}_2), \quad (23)$$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{m_{13}^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_3}; \quad \bar{\omega}_2 = \frac{m_{23}^2 - m_2^2 - m_3^2}{2m_3}; \quad \bar{p}_1 = \bar{\omega}_1 - m_1^2. \quad (24)$$

Подставив сюда (20), получим:

$$w(s_{12}) = \sum_i w(s_{12}(M_{min}^2)) - \sum_i w(s_{12}(M_{max}^2)), \quad (25)$$

т.е. спектр $w(m_{12}^2)$ есть сумма ординат спектра m_{12}^2 , взятых в точках, зависящих от m_{12}^2 по формулам (23) и затем в соответствии с рис. 2.

В частности, если $m_2 = 0$ и $m_3 \neq 0$, то

$$w(s_{12}) = w(s_{12}(M_{min}^2)) - w(s_{12}(M_{max}^2)). \quad (26)$$

Указанные свойства спектра эффективных масс очень близки к известным особенностям энергетического спектра продуктов двухчастичного распада в лабораторной системе отсчета [6,7]. Однако их нельзя вывести друг из друга.

Эффективная масса пары частиц однозначно определяет собою энергию третьей частицы в системе покоя всех трех частиц. Если бы можно было непосредственно измерять энергию частицы 3 в системе покоя состояний (123), обладающих спектром масс $\Phi(M^2)$, то представлялась бы интересная возможность: только по энергетическому спектру одной этой частицы можно бы отыскать резонанс в системе трех частиц (конечно, при условии, что происходит процесс $A \rightarrow 1 + 2 \rightarrow 1 + 2 + 3$).

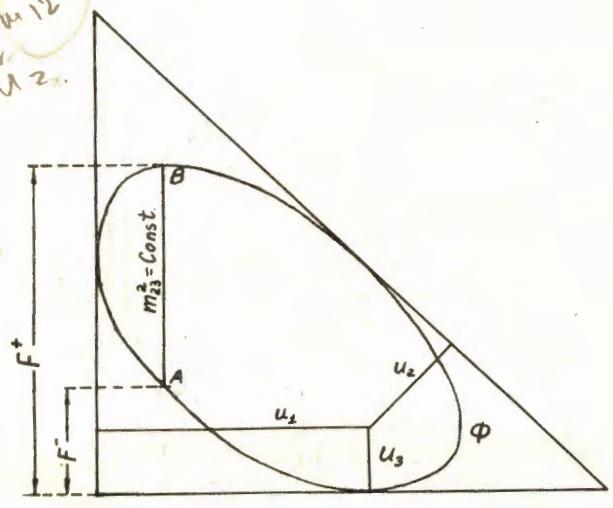
С помощью формул этой работы возможен поиск резонансов в системах $K^0 \pi^0 \Lambda^0 \pi^0$ и вообще YX , где X — изотропно распадающаяся частица с малым ($\leq 10^{-15}$ сек) временем жизни, лишь один из продуктов распада которой удается детектировать.

Л и т е р а т у р а

1. См., например, M.Gell-Mann, A.H.Rosenfeld. Ann. Rev. Nucl. Sci., 7, 407 (1957); Л.Окунь, Лекция по теории слабых взаимодействий элементарных частиц. Препринт ОИЯИ Р-833, Дубна, 1961.
2. См., например, G.Puppi. Proc. 1962 International Conference on High-Energy Physics at CERN, Geneva, p.713 (1962). W.H.Barkas, A.H.Rosenfeld UCRL-8030 (1963).
3. G.Pisaki. Nuovo Cimento, 24, N4, 719 (1962).
4. P.Eberhard, M.Pripstein. Phys. Rev. Letters, 10, 351 (1963).
5. G.I.Kopylov. Nuclear Phys. (в печати); препринт ОИЯИ Р-1079, Дубна, 1962.
6. A.G.Carlson, I.E.Nooper, D.T.King. Phys. Mag., 41, 701 (1950).
7. Г.И.Копылов. ЖЭТФ, 33, 430 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июня 1963 г.

$$u_1 = u_1/2 - (u_2 + u_3)$$



$$u_1 = u_1/2 - (u_2 + u_3)$$

Рис. 1.

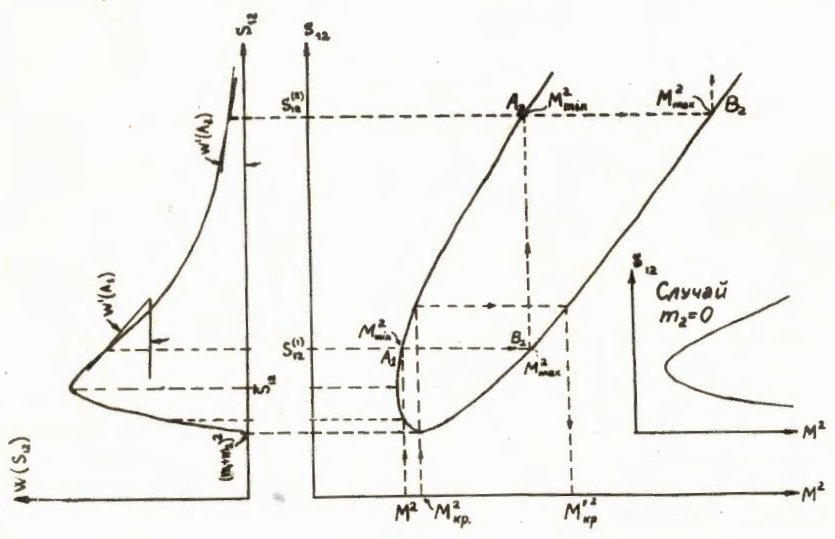


Рис. 2.