

3
5-95



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

И. Быстрицкий, Г.И. Копылов

P-1364

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ
МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Дубна 1983

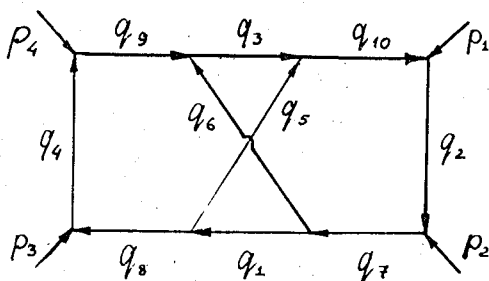
И. Быстрицкий^{х/}, Г.И. Копылов

2062/3 "5"

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ
МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Отыскание особых точек матрицы рассеяния имеет кардинальное значение для теории взаимодействия элементарных частиц. Каждой диаграмме /рис. 1/, изображающей процесс рассеяния, отвечают свои особенности матрицы рассеяния. Они могут быть найдены из системы алгебраических уравнений, полученной Ландау^{1/}. Обозначим число



Р и с. 1

внутренних линий в диаграмме ℓ , число вершин ν , число независимых контуров k . Присвоим каждой внешней линии диаграммы четырехмерный импульс $p_i (i = 1, \dots, n)$ и массу M_i , каждой внутренней - 4-импульс q_i , массу m_i и параметр Фейнмана $a_i (i = 1, \dots, \ell)$. Сумму внутренних импульсов, входящих в вершину j , обозначим Σ_j , суммирование вдоль замкнутого контура $k' - \Sigma^{k'}$. Тогда система Ландау будет иметь вид:

$$\Sigma_j q_i = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad ; \quad /1.1/$$

$$\Sigma_j q_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu - n) \quad ; \quad /1.2/$$

$$\Sigma^{k'} a_i q_i = 0 \quad (k' = 1, 2, \dots, k) \quad ; \quad /1.3/$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} a_i = 1 \quad ; \quad /1.4/$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 0 \quad ; \quad /1.5/$$

$$q_i^2 + m_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \ell) \quad ; \quad /1.6/$$

$$p_i^2 + M_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad ; \quad /1.7/$$

$$(p_1 + p_2)^2 = -s \quad ; \quad /1.8/$$

$$(p_2 + p_3)^2 = -t \quad ; \quad /1.9/$$

Ограничимся случаем, когда $n = 4$ и ни в одну вершину не входит более одной внешней линии. Тогда система /1/ определяет t при данном s . Кривой Ландау-Карплуса на физическом листе для данной диаграммы с определенными m_i, M_i называется функция $t = t(s)$, найденная из /1/ при действительных s и t и $0 < a_i < 1$ ($i = 1, \dots, \ell$). Если некоторые a_i равны при этом нулю, то кривая Ландау отвечает "редуцированной" диаграмме, в которой соответствующие этим a_i линии стянуты в точку. Решения при $a_i \notin (0, 1)$ отвечают "нефизическим" особенностям и тоже представляют интерес.

Система /1/ решена лишь для некоторых простейших диаграмм. Методом ее решения уже посвящено значительное число работ /см., напр., /3,4/. Связь задачи об отыскании особенностей фейнмановских диаграмм и экстремальной задачи теории электрических цепей показана в /5/.

Ниже излагается численный метод решения системы Ландау для действительных s и t .

Систему /1.1/ при $j = 1, 2, 3$ /1.2/ и /1.3/ запишем в матричном виде:

$$AQ = P, \quad /2/$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_\ell \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad /3/$$

A - матрица, составленная из левых частей /1.1, 1.2, 1.3/. Она частью совпадает с матрицей инцидентности диаграммы. Так, для рис. 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & a_6 & a_7 & 0 & 0 & a_{10} \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & -a_5 & 0 & 0 & a_8 & a_9 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 & -a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выразим из /2/ через p_i и a_i : /4/

или

$$Q = A^{-1}P,$$

$$q_i = Q_{i1} p_1 + Q_{i2} p_2 + Q_{i3} p_3 \quad (i = 1, \dots, \ell), \quad /5/$$

где $Q_{i,j}$ - функции $a_1, \dots, a_{\ell-1}$, если учесть /1.4/. Из /1.7-1.9/ и /1.5/ следует, что

$$\sigma_3 = p_1 p_2 = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 - s), \quad /6/$$

$$\sigma_1 = p_2 p_3 = \frac{1}{2}(M_2^2 + M_3^2 - t), \quad /7/$$

$$\sigma_2 = p_1 p_3 = \frac{1}{2}(M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - M_4^2) - \sigma_1 - \sigma_3. \quad /8/$$

Остались неиспользованными только ℓ уравнений /1.6/. Подстановка в них /5/ позволит определить ℓ величин $a_1, \dots, a_{\ell-1}$ и σ_i , если задать σ_3 , т.е. s :

$$F_i = -M_1^2 Q_{i1}^2 - M_2^2 Q_{i2}^2 - M_3^2 Q_{i3}^2 + 2Q_{i1} Q_{i2} \sigma_3 + 2Q_{i2} Q_{i3} \sigma_1 + 2Q_{i1} Q_{i3} \sigma_2 + m_i^2 = 0. /9/$$

Эта система может быть решена численно на счетной машине. Для поправок $\Delta a_i, \Delta \sigma_i$ к очередному приближению получается линейная система уравнений /метод Ньютона решения системы нелинейных уравнений/:

$$\sum_{j=1}^{\ell-1} \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial Q_{j\mu}} \frac{\partial Q_{j\mu}}{\partial a_j} \Delta a_j + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_j} \Delta \sigma_j = -F_i \quad (i = 1, \dots, \ell) \quad j = 1, \dots, \ell-1 \quad /10/$$

В ней F_i /см. /9/ может быть также записано в виде:

$$F_i = -\frac{1}{2} m_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial Q_{i\mu}} Q_{i\mu}. \quad /11/$$

Далее,

$$\frac{\partial F_i}{\partial Q_{i\mu}} = -2M_\mu^2 Q_{i\mu} + 2Q_{i\mu'} \sigma_{\mu''} + 2Q_{i\mu''} \sigma_{\mu'} \quad (\mu' \neq \mu'' \neq \mu), \quad /12/$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial \sigma_j} = 2(Q_{i2} - Q_{i1}) Q_{i3}; \quad /13/$$

$\partial Q_{i\mu} / \partial a_j$ - три первых столбца ($\mu = 1, 2, 3$) матрицы

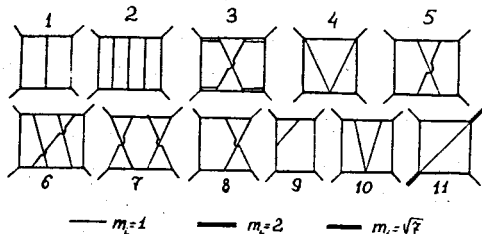
$$\partial A^{-1} / \partial a_j = -A^{-1} (\partial A / \partial a_j) A^{-1}, \quad /14/$$

а матрица $\frac{\partial A}{\partial a_j}$ состоит только из единиц и нулей и легко воспроизводится машиной по матрице A . Существенно, что рецепт составления системы /10/ не зависит от вида диаграммы. Достаточно задать диаграмму /матрицей A /, чтобы получить по твердым правилам матрицу B системы /10/, а затем решить систему. Получив из /10/ поправки $\Delta a_j, \Delta \sigma_j$, можно вычислить очередное приближение и с ним начать расчет снова, пока не будет выполнено для всех j неравенство $|F_j| < \delta_j$, где δ_j - заданная точность. Трудность возникает только в выборе нулевого приближения в первой точке кривой Ландау.

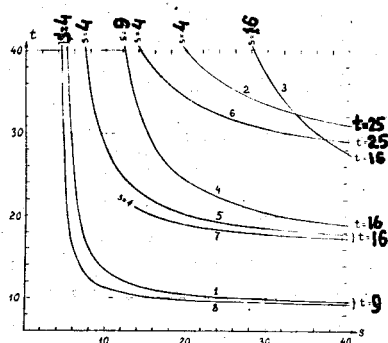
Расчеты проводились для ряда значений s в ожидаемой области наличия особенностей. Нулевое приближение для t и a_1 в начальной точке s_0 отыскивалось обычно вслепую, так как лишь в простейших диаграммах можно из физических соображений установить s, t и a_1 близ асимптот кривой $t = t(s)$ ($s \gg M_1^2$). В соседних точках s нулевые приближения получались из уже полученных значений t, a_1 для начальной точки s_0 при помощи линейной и квадратичной экстраполяции. Ход кривых $t = t(s)$ обычно довольно плавный, так что /кроме двух первых значений s /

при остальных s необходимая для физических задач точность достигалась за 1-2 приближения. Расчет одной кривой $t = t(s)$ занимает доли минуты для $l \leq 15$.

Если найдена $t = t(s)$ для некоторой диаграммы с массами $m_i^{(0)}$, $M_i^{(0)}$, то нулевое приближение в первой точке s_0 , t_0 для той же диаграммы с другими массами m_i , M_i получается линейной интерполяцией по массам: отыскиваются $t_0 = t_0(s_0)$ для 18 диаграмм с массами $m_i^{(0)} + \kappa(m_i - m_i^{(0)})$, $\kappa = \frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \dots, 1$.



Р и с. 2



Особенности диаграмм рис. 2
Возле каждой кривой указаны ее асимптоты
и номер соответствующей диаграммы на рис. 2

Р и с. 3

По составленной программе были рассчитаны кривые Ландау для ряда диаграмм /часть их изображена на рис. 2 и 3/. У некоторых из них особенности оказались на физическом листе /1-4/, у других - на нефизическом /5-8/. У диаграмм 9,10 метод Ньютона не сходится ни к какой кривой. Для диаграммы 11 особенность на значительном интервале изменения s совпадает с асимптотой $t=9$, в согласии с аналитическим результатом. В таблице сопоставлены результаты точного аналитического и численного решения системы Ландау для диаграммы рис. 1 /было взято $\delta_1 = 0,01$ и все массы равными 1/.

Т а б л и ц а 1

s	t анал	t числ
24	10,240000	10,239989
20	10,562500	10,562460
16	11,111111	11,110917

Можно констатировать, что численный метод поиска особенностей амплитуд способен дополнить общепринятый аналитический.

Отметим, что изложенный метод почти без изменений применим для поиска особенностей произвольных "многохвосток". В этом случае особенности лежат на многомерной поверхности, и счетная машина может вычислять сечения этой поверхности плоскостями $s_{ij} = \text{const}$, где s_{ij} - те новые инварианты /кроме s и t /, наличие которых только и отличает "многохвостку" от "четырёххвостки". Расчет при фиксированных S_{ij} может производиться по той же программе, но в формулах /5/, /10/, /11/ и т.д. суммирование по μ будет происходить не от 1 до 3, а от 1 до $n-1$, в соответствии с тем, что теперь в столбце P /см. /3// будет не 3, а $n-1$ ненулевых элементов p_i .

Метод может быть распространен и на поиск комплексных /по a_i , s и t / особенностей. Возникающие здесь трудности связаны только с определением области изменения s и распознаванием того, лежит ли найденная особенность на физическом или нефизическом листе /см., например, /7//.

В приложении программа поиска особенностей описана на языке АЛГОЛ-60 /6/.

Авторы весьма благодарны И.В. Полубаринову, А.П. Рудику и И.Т. Тодорову за ценные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Л.Д. Ландау. Об аналитических свойствах вершинных частей в квантовой теории поля. ЖЭТФ, 37, № 1, 62-70 /1959/.
2. L.V. Okun', A.P. Rudik, On a Method of Finding Singularities of Feynman Graphs. Nuclear Physics, 15, N2, 261-288 (1960).
3. А.П. Рудик. Особенности квантовых амплитуд в теории возмущений. Диссертация, М., 1961.
4. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников. Поверхность особых точек диаграммы Фейнмана. Препринт ОИЯИ Р-889, Дубна, 1962.

5. J. Mathews. Application of Linear Network Analysis to Feynman Diagrams. Phys. Rev., 113, N1, 381 (1959).
 6. Дж. В. Бэкус и др. Сообщение об алгоритмическом языке АЛГОЛ-60. Журнал ВМ и МФ, 1, 308 /1961/.
 7. Д.Я. Петрина. Аналитические свойства вкладов диаграмм Фейнмана. ДАН СССР, 149, № 4, 808-811 /1963/.

П р и л о ж е н и е

Исходя из заданного начального приближения, программа вычисляет последовательные приближения к $a_1, \dots, a_{\ell-1}, \sigma_1$ до тех пор, пока для всех i не выполнено неравенство $|F_i| < \delta_i$, где δ_i - заданная точность. Диаграмма представляется в виде матрицы A , причем достаточно ввести в машину только знаки отдельных элементов /т.е. +1,0 или -1/. Обращение (A, Q) обозначает процедуру обращения матрицы A . Обратная матрица обозначена Q .

Процедура РКЛ ($\ell, k, A, \delta, a, \sigma$)

значение ℓ, k ; целый ℓ, k ; вещественный массив $A_{1,\ell,1,\ell}, \delta, a_{1,\ell}, \sigma_{1,\ell}$;

начало целый ν, i, j, n, r ; вещественный s, t, D ;

вещественный массив $Q, V_{1,\ell,1,\ell}, C_{1,\ell,1,\ell}, F, d_{1,\ell}$;

$\nu := 0$;

$AA: \nu := \nu + 1$; $\sigma_2 := 0.5 \times (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 - M_4^2) - \sigma_1 - \sigma_3$;

матрица A : для $j := 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

для $i := \ell - k + 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

$A_{i,j} := a_j \times \text{sign}(A_{i,j})$;

обращение (A, Q) ;

для $j := 1$ шаг 1 до 3 выполнить

для $i := 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

начало если $j = 3$ то $n := 1$ иначе $n := j + 1$;

$C_{1,j} := -M_j^2 \times Q_{1,j} + Q_{1,n} \times \sigma_{\ell-n-j} + Q_{1,\ell-n-j} \times a_n$

конец i, j ;

примечание $C_{i,j}$ представляет производную F_i по $Q_{i,j}$;

для $i := 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

начало для $j := 1$ шаг 1 до $\ell - 1$ выполнить

начало $V_{1,j} := 0$;

для $n := 1$ шаг 1 до 3 выполнить

начало $D := 0$;

для $r := \ell - k + 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

$D := D + Q_{1,r} \times (\text{sign}(A_{r,\ell}) \times Q_{\ell,n} - \text{sign}(A_{r,n}) \times Q_{1,\ell})$;

$V_{1,j} := V_{1,j} + D \times C_{1,n}$

конец n

конец j ; $V_{1,k} := Q_{1,3} \times (Q_{1,2} - Q_{1,1})$

конец i ;

примечание $D_{i,j}$ представляет производную F_i по a_j для $j \neq k$, по σ_1 для $j = k$. Матрица $\partial Q / \partial a_j$ вычисляется по формуле $\partial Q / \partial a_j = -Q \times \partial A / \partial a_j \times Q$.

Элементы этой матрицы вычисляются в цикле с переменной r ;

для $i := 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

$F_i := -0.5 \times (C_{i,1} \times Q_{1,1} + C_{i,2} \times Q_{1,2} + C_{i,3} \times Q_{1,3} + m_i^2)$;

Обращение (B, V) ;

для $i := 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

начало $d_i := 0$; для $j := 1$ шаг 1 до $\ell - 1$ выполнить

$d_i := d_i + V_{1,j} \times F_j$

конец i, j ; $a_j := 1$;

для $i := 1$ шаг 1 до $\ell - 1$ выполнить

начало $a_i := a_i + d_i$; $a_\ell := a_\ell - a_i$

конец i ; $\sigma_i := \sigma_i + d_i$;

для $i := 1$ шаг 1 до ℓ выполнить

если $\text{abs}(F_i) > \delta_i$ то перейти к AA ;

$s := M_1^2 + M_2^2 - 2 \times \sigma_1$; $t := M_2^2 + M_3^2 - 2 \times \sigma_3$;

печатать $(a_{1:k}, s, t, \nu)$

конец программы.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июля 1963 г.