Экз. Мещерякова В.


ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т. Тодоров, О.А. Хрусталев


Р-1353

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дубна 1963

P-1353

Логунов А.А., Нгуен Ван Хьеу, Тодоров И.Т., Хрусталев О.А.

Асимптотические соотношения между сечениями в локальной теории поля.

На основе общих принципов локальной релятивистской квантовой теории поля получен ряд асимптотических соотношений между дифференциальными и полными сечениями процессов рассеяния при больших энергиях. Все выводы основаны на предположениях об отсутствии осцилляций у сечений при высоких энергиях и на теореме Фрагмена и Линделефа в теории аналитических функций.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований.**
**Дубна.1963.**

P-1353

Logunov A.A., Nguyen-van-Hieu, Todorov I.T., Khrustalev O.A.

Asymptotic Relations between Cross Sections in Local Field Theory

Anumber of asymptotic relations between the differential and total scattering cross section at high energy has been obtained on the basis of general postulates of the local relativistic quantum field theory. All the conclusions are based on the assumption that the cross sections at high energy are not oscillating and on Phragmen and Lindelof's theorem in the theory of analytical functions.

**Preprint.Joint Institute for Nuclear Research.**
**Dubna. 1963.**

А.А. Логунов, Нгуен Ван Хьеу, И.Т. Тодоров, О.А. Хрусталев

Р-1353

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЕЧЕНИЯМИ В ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Дубна 1963

## Введение

В настоящей работе, говоря о локальной теории, мы подразумеваем выполнение основных постулатов релятивистской квантовой теории поля[I,2] (см, также[3]), не требуя задания конкретного лагранжиана. Напомним, что среди этих постулатов, наряду с требованиями инвариантности относительно неоднородной группы Лоренца, существования полной системы физических состояний с положительной энергией и микропричинности, содержится и некоторое предположение математического характера: требуется, чтобы элементы матрицы рассеяния были обобщенными функциями умеренного роста (т.е. являлись линейными непрерывными функционалами над пространством $S$ бесконечно гладких быстро убывающих функций - см., например[4]). Значение этого на первый взгляд чисто формального требования обнаруживается при изучении порядка роста аналитического продолжения матричных элементов в импульсном пространстве. Оказывается, что оно обеспечивает, например, полиномиальную ограниченность преобразования Фурье $f_r(k)$ от запаздывающей амплитуды во всей области аналитичности этой функции (см.[4], теорема I). Ослабление этого требования приводит к тому, что аналитическое продолжение матричных элементов в импульсном пространстве может иметь любой рост (например, экспоненциальный), что соответствовало бы в лагранжевом формализме неперенормируемой теории[x)].

Рядом авторов при анализе неперенормируемых теорий высказывались предположения, что сечения процессов в таких теориях должны расти с увеличением энергии. Однако поскольку можно ожидать, что для неперенормируемых теорий точка $\infty$ является существенно особой, то возрастание $n$-го члена теории возмущений как полинома той же степени по энергии не означает, что амплитуда должна возрастать вдоль действительной оси $E$, так как наличие существенной особенности на бесконечности приводит к тому, что амплитуда может неограниченно возрастать вдоль одних направлений в комплексной плоскости $E$, оставаясь конечной вдоль других.

Включение предположения об умеренном росте матричных элементов в число основных постулатов локальной теории оправдано тем, что без этого предположения нельзя получить дисперсионных соотношений - практически единственного опытно проверяемого следствия из общих принципов квантовой теории. Кроме того, как отмечается в[I,2], для того чтобы компенсировать экспоненциальное возрастание амплитуды в верхней полуплоскости по энергии $E$, необходимо ввести множитель типа $e^{iaE}$, где положительная постоянная "$a$" имеет размерность длины и может быть интерпретирована как некоторая мера нелокальности теории ("элементарная длина").

Оказывается, что если к общим принципам локальной теории добавить физическое допущение, что сечения процессов рассеяния не осциллируют, а имеют определенный степенной или логариф-

x) См. обсуждение этого вопроса в[3], п. П.

мический рост, когда энергия стремится к бесконечности (при фиксированной передаче импульса) то можно получить ряд интересных, экспериментально проверяемых равенств между различными сечениями. Первое соотношение такого рода – равенство полных сечений взаимодействия частиц и античастиц при высоких энергиях – было получено Померанчуком/5/. Точные условия, при которых справедливо утверждение Померанчука, и строгое доказательство этого утверждения на основе теоремы Фрагмена и Линделёфа дано Мейманом/6/.

В настоящей работе мы покажем, что, основываясь на теореме Фрагмена-Линделёфа, можно установить ряд асимптотических соотношений не только между полными, но и между дифференциальными сечениями различных процессов. § I носит вводный характер. Здесь на элементарном примере рассеяния вперед скалярных нейтральных частиц (при определенных предположениях об асимптотическом поведении амплитуды рассеяния) будет подробно изложен метод доказательства, и , в частности, получается теорема Померанчука для этого случая. Затем указывается, как можно обобщить полученные результаты на амплитуду рассеяния при произвольной передаче импульса и более общее поведение на бесконечности . Метод, изложенный в § I, применяется в следующих параграфах для изучения более интересных с физической точки зрения процессов рассеяния заряженных частиц со спином и формфакторов. Основные физические результаты резюмированы в § 5.

## § I. Асимптотические свойства амплитуды рассеяния скалярных частиц

В этом параграфе мы будем рассматривать связанные между собой процессы упругого рассеяния скалярных частиц $a_i$ (с массой $m$ ) и $b_i$ ( с массой $M$ )

$$a_1 + b_1 \to a_2 + b_2 , \tag{I}$$

$$\bar{a}_2 + b_1 \to \bar{a}_1 + b_2 , \tag{II}$$

где черта означает переход к античастице.

Будем работать с инвариантной амплитудой $T(s,t)$, где $s$ и $t$ – квадрат полной энергии в системе центра масс и инвариантная передача импульса. Полное и дифференциальное сечения процесса (I) выражаются следующим образом посредством амплитуды $T(s,t)$:

$$\sigma_t(s) = \frac{1}{2k\sqrt{s}} \operatorname{Im} T(s,0); \tag{I.I}$$

$$\frac{d\sigma(s,t)}{dt} = \frac{1}{64\pi s k^2} \left| T(s,t) \right|^2; \tag{I.2}$$

здесь $k$ – модуль трехмерного импульса в системе центра масс:

$$k^2 = \frac{1}{4s} \left[ s^2 - 2(M^2+m^2)s + (M^2-m^2)^2 \right] . \tag{I.3}$$

Амплитуда $\tilde{T}(s,t)$ процесса (П) связана при вещественных $s$ и $t$ обычным перекрестным соотношением с амплитудой $T(s,t)$:

$$\tilde{T}(s,t) = T^*(u,t), \qquad (I.4)$$

где $u = 2(M^2+m^2) - s - t$, а $*$ означает комплексное сопряжение.

В локальной теории поля амплитуда $T(s,t)$ аналитична при фиксированном $t$ (из некоторого интервала) в комплексной плоскости $s$ с разрезами вдоль действительной оси от $(M+m)^2$ до $\infty$ и от $-\infty$ до $(M-m)^2-t$ и с конечным числом полюсов на действительной оси между двумя разрезами. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что полюсные члены отсутствуют. Их учет не приводит к затруднениям, так как члены исчезают при $s \to \infty$.

Докажем сначала некоторое обобщение теоремы Померанчука, которое может служить хорошим методическим введением к последующему рассмотрению более сложных случаев, где не будут приводиться подобные доказательства.

Будем исходить из следующих физических предположений.

I) Предположим, что полные сечения $\sigma_t(s)$ и $\tilde{\sigma}_t(s)$ процессов (I) и (П) стремятся к определенным пределам $\sigma_t^+$ и $\sigma_t^-$, когда энергия стремится к бесконечности.

2) Предположим далее, что дифференциальные сечения для рассеяния вперед $\frac{d\sigma(s,0)}{dt}$ и $\frac{d\tilde{\sigma}(s,0)}{dt}$ ограничены как функции энергии и стремятся к определенным пределам $\frac{d\sigma^+}{dt}$ и $\frac{d\sigma^-}{dt}$ при $s \to \infty$ x).

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА I

При предположениях I) и 2) в локальной теории поля имеет место равенство полных и дифференциальных сечений в пределе при энергии, стремящейся к бесконечности:

$$\sigma_t^+ = \sigma_t^-, \qquad (I.5)$$

$$\frac{d\sigma^+}{dt} = \frac{d\sigma^-}{dt}. \qquad (I.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В силу (I.I)-(I.4) предположения I) и 2) могут быть сформулированы в терминах функции

$$f(s) = \frac{T(s,0) - T(M^2,0)}{s - M^2} \qquad (I.7)$$

следующим образом. Функция $f(s)$ ограничена на вещественной оси $s$ и стремится к определенным пределам при $s \to \pm\infty$:

---

x) Для доказательства теоремы Померанчука /т.е. равенства (I.5)/ достаточно потребовать ограниченности дифференциальных сечений (см. /6/). Сделанное нами предположение позволяет доказать эту теорему более элементарными средствами и заодно получить равенство дифференциальных сечений под нулевым углом (I.6).

$$\lim_{s\to\pm\infty} \mathrm{Im}\, f(s) = \sigma_t^{\pm} \quad , \qquad \lim_{s\to\pm\infty} \mathrm{Re}\, f(s) = \sqrt{16\pi \frac{d\sigma^{\pm}}{dt} - (\sigma_t^{\pm})^2} \; . \qquad (I.8)$$

Кроме того, как уже отмечалось, из постулатов локальной теории поля следует, что эта функция аналитична в комплексной плоскости $s$ с разрезами вдоль действительной оси от $(M+m)^2$ до $\infty$ и от $-\infty$ до $(M-m)^2$ и что она полиномиально ограничена в комплексной плоскости $s$. Воспользуемся теперь следующей теоремой Фрагмена и Линделёфа/6,7/.

ТЕОРЕМА 2 (Фрагмена-Линделёфа)

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция от $z = re^{i\theta}$, регулярная в области $\mathcal{D}$, заключенной между двумя полупрямыми, которые образуют угол $\pi/\alpha$ с вершиной в нуле, и ограничена на этих полупрямых. Пусть далее $f(z) \to a$ при $z\to\infty$ вдоль одной из полупрямых и $f(z)\to b$ при $z\to\infty$ вдоль другой полупрямой. Тогда, если $a \neq b$ и

$$M(r) = \max_{|z|=r,\; z\in\mathcal{D}} |f(z)| , \qquad (I.9)$$

то при достаточно больших $r$

$$M(r) \geqslant A e^{c r^{\alpha}} \quad , \quad \text{где } A>0 \; , \quad c>0 \; . \qquad (I.10)$$

Функция $f(z)$ может быть полиномиально ограниченной в $\mathcal{D}$ лишь при предположении, что $a=b$, и тогда $f(z)$ стремится к $a$ при $z\to\infty$ равномерно в области $\mathcal{D}$.

Функция $f(s)$ (I.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 2 (в качестве области $\mathcal{D}$ можно выбрать верхнюю полуплоскость; при этом $\alpha$ = I). Поскольку функция $f(s)$ полиномиально ограничена, то её предельные значения при $s\to\pm\infty$ должны совпадать. Отсюда следует утверждение теоремы I.

Заметим, что доказанная теорема I допускает следующее обобщение. Предположим, что вместо конечного предела у полного сечения существуют при фиксированном $t$ (не обязательно равном нулю) пределы

$$\lim_{s\to\pm\infty} \frac{T(s,t)}{s^2\, \varphi(s,t)} , \qquad (I.II)$$

где функция $\varphi(s,t)$ аналитична в верхней полуплоскости $s$ при фиксированном $t$, не обращается в нуль при $\mathrm{Im}\, s>0$ и удовлетворяет условию $\lim_{s\to\infty} \frac{\varphi(s,t)}{\varphi(-s,t)} = 1$. Такими свойствами обладают, например, функции вида $(s+i)^{2n} \ln^{q}(s+i)$, $n=0,1,\ldots$ Тогда в силу теоремы Фрагмена-Линделёфа можно также доказать равенство этих пределов и вывести отсюда соответствующие соотношения между сечениями рассеяния частиц и античастиц $\frac{d\sigma}{dt}$ и $\frac{d\tilde{\sigma}}{dt}$.

## § 2. Асимптотические соотношения между дифференциальными сечениями для частиц со спином

Мы рассмотрели случай рассеяния скалярных частиц и доказали асимптотическое равенство между дифференциальными сечениями процессов (I) и (П) при $s\to\infty$. Это равенство также можно доказать в случае рассеяния частиц со спином.

Рассмотрим сначала случай, когда спин частиц $a_i$ равен нулю, а частицы $b_i$ имеют спин I/2. Обозначим импульсы частицы $a_i$ и $b_i$ через $q_i$ и $p_i$, а массы – через $m_i$ и $M_i$, соответственно. Если амплитуда процесса (I) равна

$$T(p_2, q_2; p_1, q_1) = \bar{u}(p_2)\left[A(s,t) + B(s,t)\, i\, \frac{\hat{q}_1+\hat{q}_2}{2}\right] u(p_1), \tag{2.I}$$

то амплитуда реакции (П) равна

$$\tilde{T}(p_2, q_2; p_1, q_1) = \bar{u}(p_2)\left[\tilde{A}(s,t) + \tilde{B}(s,t)\, i\, \frac{\hat{q}_1+\hat{q}_2}{2}\right] u(p_1), \tag{2.2}$$

где $q_1$ и $q_2$ есть импульсы частиц $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_1$.

Функции $A$, $B$ и $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ удовлетворяют условиям перекрестной симметрии:

$$\tilde{A}(s,t) = A^*(u,t), \quad \tilde{B}(s,t) = -B^*(u,t). \tag{2.3}$$

Дифференциальное сечение процесса (2.I) равно

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q_1^2}\,\mathcal{F}, \tag{2.4}$$

$$\mathcal{F} = \left[(M_1+M_2)^2 - t\right]|A|^2 + \frac{(u-s)^2-(m_1^2-m_2^2)^2-\left[t-2(m_1^2+m_2^2)\right]\left[t-(M_1-M_2)^2\right]}{4}\,|B|^2$$
$$+\left[M_1(s-u+m_2^2-m_1^2)+M_2(s-u+m_1^2-m_2^2)\right]\,\mathrm{Re}\,AB^*, \tag{2.5}$$

а сечение процесса (П) получается из (2.4) и (2.5) заменой $A \to \tilde{A}$, $B \to \tilde{B}$ и $m_1 \rightleftarrows m_2$.

Пусть $A$ и $sB$ имеют одинаковое асимптотическое поведение при $s \to \pm\infty$ (если это не так, то достаточно рассмотреть лишь одну из амплитуд):

$$s^{\tau}\varphi(s,t), \tag{2.6}$$

где $\tau$ – некоторая функция от $t$, а $\varphi(s,t)$–функция, указанная в предыдущем параграфе. Тогда функции

$$A_0(s,t) = \frac{A(s,t)}{(s+i)^{\tau}\varphi(s,t)}, \quad B_0(s,t) = \frac{s\,B(s,t)}{(s+i)^{\tau}\varphi(s,t)} \tag{2.7}$$

стремятся при $s \to \infty$ к некоторым пределам, причем на основании теоремы Фрагмена–Линделёфа

$$A_0(-s,t) = A_0(s,t), \quad B_0(-s,t) = B_0(s,t), \quad s \to \infty. \tag{2.8}$$

Отсюда при $s \to \infty$

$$A(-s,t) = e^{i\tau\pi}A(s,t), \quad B(-s,t) = -e^{i\tau\pi}B(s,t), \tag{2.9}$$

что вместе с условием перекрестной симметрии (2.3) дает

$$\tilde{A}(s,t) = e^{-i\tau\pi}A^*(s,t), \quad \tilde{B}(s,t) = e^{-i\tau\pi}B^*(s,t). \tag{2.IO}$$

Из соотношений (2.4), (2.5) и (2.IO) следует равенство дифференциальных сечений процессов (I) и (П)

$$\frac{d\sigma\,(a_1+b_1\to a_2+b_2)}{dt}=\frac{d\sigma\,(\bar a_2+b_1\to \bar a_1+b_2)}{dt},\quad s\to\infty. \tag{2.11}$$

Теперь рассмотрим рассеяние нуклона на нуклоне, например:

$$n+p\to n+p. \tag{Ш}$$

Амплитуда этого процесса имеет вид:

$$T(p_2,q_2;\,p_1,q_1)=\sum_i \bar u(p_2)\Gamma_i u(p_1)\cdot\bar u(q_2)\Gamma_i u(q_1)\cdot F_i(s,t), \tag{2.12}$$

где $i=S,V,T,A,P$ .

Процесс рассеяния антинейтрона на протоне

$$\bar n+p\to\bar n+p \tag{IУ}$$

описывается амплитудой:

$$T(p_2,q_2;\,p_1,q_1)=\sum_i \bar u(p_2)\Gamma_i u(p_1)\,\bar u(q_2)\Gamma_i u(q_1)\,\tilde F_i(s,t). \tag{2.13}$$

Для удобства состояния античастиц мы также описываем с помощью спиноров с положительной энергией.

Инвариантные амплитуды $\tilde F_i(s,t)$ в (2.13) связаны с амплитудами в (2.12) условием перекрестной симметрии:

$$\tilde F_i(s,t)=\pm F_i^*(u,t), \tag{2.14}$$

где знак плюс соответствует $S$ , $A$ , $P$ , а знак минус – $V$ и $T$ .

Сечение процесса ( Ш ) равно

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{64\pi q^2 s}\,\mathcal{F}, \tag{2.15}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{F}={}&(t-4M^2)^2|F_S|^2+2\left[(s-2M^2)^2+(u-2M^2)^2+4M^2t\right]|F_V|^2+4\Big[(s-2M^2)^2+(u-2M^2)^2\\&+6M^4-\frac{(t-2M^2)^2}{2}\Big]|F_T|^2+2\left[(s-2M^2)^2+(u-2M^2)^2+4M^2(4M^2-t)\right]|F_A|^2+t^2|F_P|^2\\&+2\,\mathrm{Re}\Big\{4M^2(s-u)\left(F_SF_V^*-3F_AF_T^*\right)+\left[(s-2M^2)^2-(u-2M^2)^2\right]\left(2F_VF_A^*-2F_TF_P^*-F_SF_T^*\right)\\&+4M^2t\left(3F_VF_T^*-F_AF_P^*\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

При фикисрованном $t$ и $s\to\infty$ функция $\mathcal{F}$ имеет асимптотическое поведение

$$\mathcal{F} \to (t-4M^2)^2 |F_S|^2 + 4s^2(|F_V|^2 + |F_A|^2 + 2|F_T|^2) + t^2|F_P|^2$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\left\{ 8M^2 s\, F_S F_V^* + 2st\, F_S F_T^* + 4st\, F_T F_P^* \right\}. \tag{2.17}$$

Сечение для процесса ( IУ ) получается из (2.I5) и (2.I6) заменой функций $F_i \to \tilde{F}_i$.

Рассмотрим общий случай, когда в асимптотику сечения дают вклады все амплитуды $F_i$. Тогда функции $sF_V$, $sF_T$, $sF_A$, $F_S$ и $F_P$ имеют одинаковое асимптотическое поведение. Как и ранее, из теоремы Фрагмена-Линделёфа следует:

$$F_i(-s,t) = \pm e^{i\tau\pi} F_i(s,t), \quad s \to \infty, \tag{2.18}$$

(+) для $S$ , $P$ , а (–) для $V$ , $T$ и $A$ . Эти соотношения вместе с условием перекрестной симметрии (2.I4) дают

$$\tilde{F}_i(s,t) = \pm e^{-i\tau\pi} F_i^*(s,t), \quad s \to \infty, \tag{2.19}$$

где (+) соответствует $S$ , $V$ , $T$ , $P$ , а (–) соответствует $A$.

Так как в асимптотическом выражении для сечения нет интерференции между амплитудой $F_A$ и остальными членами, то при $s \to \infty$ из (2.I9) следует равенство дифференциальных сечний

$$\frac{d\sigma(n+p \to n+p)}{dt} = \frac{d\sigma(\bar{n}+p \to \bar{n}+p)}{dt}. \tag{2.20}$$

Аналогично мы имеем соотношение:

$$\frac{d\sigma(p+p \to p+p)}{dt} = \frac{d\sigma(\bar{p}+p \to \bar{p}+p)}{dt}. \tag{2.21}$$

## § 3. Асимптотические соотношения между полными сечениями

Рассмотрим амплитуду упругого рассеяния $\pi$ -мезона на нуклоне вперед $A(s,0)$ и $B(s,0)$ . Предположим, что при этом значении $t$ постоянная $\tau$ в (2.6) равна I. В этом случае дифференциальное сечение (2.4) при $s \to \infty$ ведет себя,как $|\varphi(s,0)|^2$. Амплитуды $A$ и $B$ имеют следующую изотопическую структуру:

$$A_{\beta\alpha} = A^{(+)}\delta_{\beta\alpha} + A^{(-)}\tfrac{1}{2}[\tau_\beta,\tau_\alpha], \quad B_{\beta\alpha} = B^{(+)}\delta_{\beta\alpha} + B^{(-)}\tfrac{1}{2}[\tau_\beta,\tau_\alpha]. \tag{3.1}$$

Амплитуды процессов

а) $\pi^+ + p \to \pi^+ + p$ ,

в) $\pi^- + p \to \pi^- + p$ ,

с) $\pi^- + p \to \pi^0 + n$ ,

$$d)\quad \pi^0+p \to \pi^+ + n,$$
$$e)\quad \pi^0 + p \to \pi^0 + p \qquad (3.2)$$

связаны с амплитудами (3.I) соотношениями

$$A^a = A^{(+)} - A^{(-)},\quad A^b = A^{(+)} + A^{(-)},\quad A^c = -A^d = -\sqrt{2}\,A^{(-)},\quad A^e = A^{(+)} \qquad (3.3)$$

и аналогично для $B$) .

Теорема Фрагмена-Линделёфа вместе с условием перекрестной симметрии дает в этом случае (см. формулы (2.I0) с $\tau$ = I):

$$A^a = -A^{b*},\quad A^c = -A^{d*},\quad A^e = -A^{e*};\quad B^a = -B^{b*},\quad B^c = -B^{d*},\quad B^e = -B^{e*}. \qquad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что

$$\mathrm{Im}\,A^{(-)} = \mathrm{Im}\,B^{(-)} = 0, \qquad (3.5)$$

т.е.

$$\mathrm{Im}\,A^a = \mathrm{Im}\,A^b = \mathrm{Im}\,A^e,\quad \mathrm{Im}\,A^c = \mathrm{Im}\,A^d = 0,$$
$$\mathrm{Im}\,B^a = \mathrm{Im}\,B^b = \mathrm{Im}\,B^e,\quad \mathrm{Im}\,B^c = \mathrm{Im}\,B^d = 0. \qquad (3.6)$$

Таким образом, если при $t$ = 0 $\tau$ = I, то имеется асимптотическое равенство между полными сечениями

$$\sigma_t(\pi^+p) = \sigma_t(\pi^-p) = \sigma_t(\pi^0 p). \qquad (3.7)$$

Первое из этих равенств было получено Померанчуком/5/, а второе было предложено на основе анализа экспериментальных данных в работе/9/.

Аналогично из соотношений (2.I9) следует, что если $\tau = 1$ при $t$ = 0, то имеются асимптотические равенства между полными сечениями

$$\sigma_t(\bar{p}p) = \sigma_t(pp),\quad \sigma_t(\bar{n}p) = \sigma_t(np). \qquad (3.8)$$

Для других процессов также можно доказать аналогичные соотношения.

Отметим, что соотношения (3.8) были получены Померанчуком/5/в предположении, что полные сечения при $s \to \infty$ стремятся к постоянным значениям. Мы видим здесь, что они имеют место, даже если полные сечения ведут себя при $s \to \infty$ , например, как $(\ln s)^\gamma (\ln \ln s)^\beta$, $\gamma, \beta \geq 0$ .

Из (3.3) и (3.4) ещё следует, что

$$\mathrm{Re}\,A^{(+)} = \mathrm{Re}\,B^{(+)} = 0. \qquad (3.9)$$

Это означает, что при $s \to \infty$

$$\mathrm{Re}\,A^a = -\mathrm{Re}\,A^b = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\,A^c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\,A^d,\quad \mathrm{Re}\,B^a = -\mathrm{Re}\,B^b = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\,B^c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Re}\,B^d,\quad \mathrm{Re}\,A^e = \mathrm{Re}\,B^e = 0. \qquad (3.10)$$

Эти соотношения также можно проверить экспериментально.

## § 4. Асимптотика вершинной части

На основании теории возмущений можно утверждать[10], что вершинная часть $\Gamma_\alpha(M^2, M^2, t)$ является аналитической функцией переменной $t$ с разрезом вдоль положительной действительной оси. Предположение, что теория локальна, т.е. что формфактор возрастает не быстрее полинома, позволяет сделать некоторое заключение об асимптотике процессов, которые описываются в $e^2$- приближении через электромагнитные формфакторы. Рассмотрим, например, процессы электрон-протонного рассеяния и превращения протона и антипротона в электрон и позитрон. Сечение этих процессов выражается в этом приближении через электромагнитные формфакторы $F_1(t)$ и $F_2(t)$ или через их линейные комбинации[8]:

$$G_E(t) = F_1(t) + \frac{t}{4M^2}\mu F_2(t), \tag{4.1}$$

$$G_\mu(t) = F_1(t) + \mu F_2(t), \tag{4.2}$$

причем в первом процессе берутся значения этих функций при отрицательных $t$, а во втором процессе-при положительных $t$. Последние эксперименты по рассеянию электронов на протонах показывают, что в широкой области больших отрицательных $t$ функция $G_E(t)$ приблизительно постоянная и отлична от нуля, а $G_\mu(t)$ стремится к нулю.

Если предположить, что мы имеем дело с асимптотическим поведением формфакторов при $t \to -\infty$, то формфакторы имеют, в силу теоремы Фрагмена-Линделёфа, такие же значения и при больших положительных $t$. Поэтому в $e^2$-приближении дифференциальное сечение процесса превращения протона и антипротона в электрон и позитрон описывается при соответствующих положительных значениях $t$ теми же значениями формфакторов, что и асимптотические значения для процесса рассеяния.

Если бы имелись достаточно убедительные доказательства, что при этих значениях $t$ рассматриваемые нами процессы хорошо описываются формфакторами, то из несоответствия сечений рассеяния и аннигиляции следовало бы, что мы ещё не достигли асимптотических значений $t$. При этом изменение значений формфакторов должно наблюдаться в обоих процессах. Ясно выраженное асимптотическое поведение одного процесса при отсутствии такового для другого свидетельствовало бы о том, что при $|t| \to \infty$ вершинная функция возрастает, по крайней мере, экспоненциально.

## § 5. Выводы

Основываясь на постулатах локальной теории поля и на физическом предположении, что дифференциальные сечения $\frac{d\sigma}{dt}$ при фиксированной передаче импульса $t$ не осциллируют когда квадрат энергии $s$ стремится к бесконечности, а имеют произвольный (логарифмический, или степенной) рост, мы выводим следующие физические следствия.

I) Дифференциальные сечения процессов типа (I) и (II), например :

$$\begin{cases} \pi^- + p \to \pi^- + p, \\ \pi^+ + p \to \pi^+ + p; \end{cases} \quad \begin{cases} \pi^- + p \to \Sigma^- + K^+, \\ K^- + p \to \Sigma^- + \pi^+; \end{cases} \quad \begin{cases} K^+ + p \to K^+ + p, \\ K^- + p \to K^- + p \end{cases}$$

при фиксированном $t$ и $s \to \infty$ асимптотически равны. Аналогичные равенства справедливы и для дифференциальных сечений процессов рассеяния нуклона и антинуклона на нуклоне:

$$\begin{cases} p + p \to p + p, \\ \bar{p} + p \to \bar{p} + p; \end{cases} \qquad \begin{cases} n + p \to n + p, \\ \bar{n} + p \to \bar{n} + p. \end{cases}$$

2) Если при $t = 0$ дифференциальные сечения $\frac{d\sigma}{dt}$ ведут себя при $s \to \infty$, например, как $(\ln s)^{\beta}$, $\beta \geq 0$, то имеется асимптотическое равенство между полными сечениями различных процессов, например:

$$\sigma_t(\pi^+ p) = \sigma_t(\pi^- p), \quad \sigma_t(K^+ p) = \sigma_t(K^- p), \quad \sigma_t(\bar{p} p) = \sigma_t(pp), \quad \sigma_t(\bar{n} p) = \sigma_t(np).$$

Если изотопическая инвариантность выполняется, то имеются ещё другие равенства между полными сечениями:

$$\sigma_t(\pi^+ p) = \sigma_t(\pi^- p) = \sigma_t(\pi^0 p),$$
$$\sigma_t(\pi^+ K^+) = \sigma_t(\pi^- K^+) = \sigma_t(\pi^0 K^+).$$

3) Предельные значения формфакторов при $t \to \pm\infty$ равны между собой.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову за интерес к работе и стимулирующие обсуждения, а также Д.И. Блохинцеву, В.С. Владимирову, М.А. Маркову, Х.Я. Христову и П.Шураньи за полезные замечания.

Примечание при корректуре.

После того, как рукопись была сдана в печать, был получен препринт Ван Хова /II/, в котором обобщением метода Померанчука /5/ устанавливаются асимптотические равенства между дифференциальными сечениями рассеяния скалярных частиц.

Литература:


I. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИТТЛ, М., I957.

2. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. ГИФМЛ, М., I958.

3. R. Haag and B. Schroer, J. Math Phys. 3, 248 (I962).

4. В.С. Владимиров, Труды Математического института Академии наук 60, IOI (I96I).

5. И.Я. Померанчук, ЖЭТФ, 34, 725 (I958).

6. Н.Н. Мейман, Некоторые свойства аналитических функций. В книге "Вопросы физики элементарных частиц", Изд. АН Арм. ССР, Ереван, I962.

7. Р. Неванлина. Однозначные аналитические функции. ГИТТЛ, М-Л (I94I).

8. L.N.Hand, D.G.Miller and R.W.Wilson, Rev. Mod Phys. 35, 335 (I963).

9, Л.Б. Окунь, И.Я. Померанчук, ЖЭТФ, 30, 424 (I956).

IO. Лю И-чень и И.Т. Тодоров, ДАН СССР, I48, 806 (I963).

II. L. Van Hove, An Extension of Pomeranchuk's Theorem to Diffraction Scattering, CERN, I963.


Рукопись поступила в издательский отдел 9 июля I963 г.