

1343

73



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

Г.Н. Вялов

P-1343

К РАСЧЕТУ ФАЗОВЫХ СООТНОШЕНИЙ
В ЦИКЛОТРОНЕ

Дубна 1963

Вялов Г.Н.

К расчету фазовых соотношений в циклотроне

Описывается метод расчета фазового движения в циклотроне, не требующий громоздких численных расчетов, основанный на параболической аппроксимации спада магнитного поля на нескольких радиальных участках.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1963**

P-1343

Vyalov G.N.

Calculation of Phase Relations in the Cyclotron

A method is described for the phase motion in the cyclotron which does not require complicated numerical calculations. It is based on the parabolic approximation of the magnetic field decrease in some radial sections.

**Preprint Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1963.**

Г.Н. Вялов

P-1343

К РАСЧЕТУ ФАЗОВЫХ СООТНОШЕНИЙ
В ЦИКЛОТРОНЕ

Направлено в журнал
"Атомная энергия"

Дубна 1963

Фазовое движение в циклотроне изучалось рядом авторов^{1,2/}. Как известно, уравнение фазового сдвига можно представить в форме:

$$\sin \phi_2 - \sin \phi_1 = \kappa \left[\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} h(\epsilon) d\epsilon + \frac{\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2}{2} - p(\epsilon_2 - \epsilon_1) \right], \quad /1/$$

$$\kappa = \frac{\pi W_k^2}{2eV_0 m_0 c^2} \frac{A}{Z}, \quad /2/$$

где: ϕ - фаза и $2V_0$ - амплитуда ускоряющего потенциала между дуантами;
 W_k - конечная энергия иона, приходящаяся на один нуклон;
 e - элементарный заряд;
 c - скорость света;
 m_0 - масса покоя нуклона;
 A - массовое, Z - зарядовое число иона.

Спад магнитного поля $h(\epsilon)$ и превышение магнитного поля в центре H_0 над резонансным значением H_{p0} определяются соотношениями:

$$H(\epsilon) = H_0 [1 - \epsilon_k h(\epsilon)], \quad /3/$$

$$H_{p0} = H_0 (1 - \epsilon_k p), \quad /4/$$

где: $\epsilon_k = W_k / m_0 c^2$.

Полагая в /1/ $\epsilon_1 = \epsilon_*$; $\epsilon_2 = \epsilon_0 = 0$ и решая /1/ относительно $2eV_0$, получим:

$$2eV_0 = \frac{\pi W_k^2}{m_0 c^2} \frac{A}{Z} D(\epsilon_*, \phi), \quad /5/$$

где:

$$D(\epsilon_*, \phi) = \frac{\int_{\epsilon_*}^0 h(\epsilon) d\epsilon - \frac{\epsilon_*^2}{2} + p\epsilon_*}{\sin \phi_0 - \sin \phi_*}, \quad /6/$$

причем $p = h_* + \epsilon_*$,

и ϵ_* - энергия иона в точке поворота фазы.

Для определения энергии поворота ϵ_* можно воспользоваться уравнением:

$$B_1 = \frac{\sin \phi_k - \sin \phi_0}{\sin \phi_0 - \sin \phi_*} = \frac{\int_0^k h(\epsilon) d\epsilon + \frac{1}{2} - p}{\int_0^k h(\epsilon) d\epsilon - \frac{\epsilon_*^2}{2} + p\epsilon_*}. \quad /8/$$

В общем случае интегралы

$$J_k = \int_0^{\epsilon_k} h(\epsilon) d\epsilon, \quad J_n = \int_0^{\epsilon_n} h(\epsilon) d\epsilon$$

и величину ϵ_k из /8/ можно найти численными методами. Как известно, вычисление ϵ_k и $D(\epsilon_k, \phi)$ очень просто выполняется аналитически в специальном случае магнитного поля с параболическим спадом по радиусу или с линейным спадом по энергии:

$$h(\epsilon) = H_0 (1 - a \epsilon_k \epsilon), \quad \text{т.е. } h = a\epsilon. \quad /9/$$

В этом случае для ϵ_k , $D(\epsilon_k, \phi)$ и $2eV_0$ получаются очень простые выражения:

$$\epsilon_k = \frac{1}{1 + \sqrt{B}}; \quad D = \frac{(1+a)\epsilon_k^2}{2(\sin\phi_0 - \sin\phi_k)}; \quad /10/$$

$$2eV_0 = \frac{\pi W_k^2}{2m_0 c^2} \frac{A}{Z} \frac{1+a}{(1+\sqrt{B})^2 (\sin\phi_0 - \sin\phi_k)}; \quad /11/$$

где $B = 1 + B_1$.

Однако в практических случаях простой формулой /11/ можно пользоваться только для очень приближенных оценок из-за непараболическости реального спада. В реальных циклотронах имеются большие отклонения от чисто параболического спада в центре циклотрона, где создается магнитный "горб" для улучшения аксиальной фокусировки, и вблизи края магнита, где для аппроксимации поля нужно к параболическому члену добавлять члены типа ϵ^n с $n \geq 5$ /2/. Поэтому формула /11/ дает сильно завышенную оценку для $2eV_0$, если a определяется по спаду поля на конечной радиусе $r = R_k$ /завышение порядка 50%/. Таким образом, формула /11/, вообще говоря, неприемлема для практических расчетов. Использование общих формул /5-7/ для анализа многих вариантов шиммирования магнитного поля и выбора оптимального варианта в процессе наладки ускорителя практически неудобно, так как требует довольно большого объема вычислений.

В 1955 г. И.М. Матора предложил такой способ вычисления $2eV_0$, когда функция спада $h(\epsilon)$ в окрестности точки поворота ϵ_k аппроксимировалась линейным спадом:

$$h(\epsilon) = a + a\epsilon, \quad \epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2. \quad /12/$$

В этом приближении уравнение /8/ квадратично по ϵ_k и элементарно решается. Это упрощает вычисление, хотя при $\epsilon < \epsilon_1$ и $\epsilon > \epsilon_2$ все еще приходится иметь дело с численным интегрированием, что затрудняет общий анализ фазовых соотношений.

В процессе наладки ускорителей тяжелых ионов Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ потребовалось анализировать большое число вариантов спада магнитного поля. При этом оказалось полезным вывести и практически использовать приближенные формулы типа /11/, дающие удовлетворительную точность расчета при минимальном объеме вычислений. При выводе приближенных формул мы исходили из обобщения аппроксимации типа /12/. Интервал энергий от 0 до 1 разбивается на n участков точками

$\epsilon_0 = 0, \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n = 1$. Очевидно, что при достаточно большом числе точек n и при достаточно малой длине каждого из участков $(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i)$ спад поля на каждом i -м участке аппроксимируется линейной функцией

$$h(\epsilon) = a_i + a_i \epsilon, \quad \epsilon_{i-1} < \epsilon < \epsilon_i. \quad /13/$$

с любой наперед заданной точностью.

На практике из простых соображений легко определить, в каком из интервалов $(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i)$ находится точка поворота ϵ_k . Предположим, что номер i этого интервала известен. Тогда, обозначая

$$J_i = \int_0^{\epsilon_i} h d\epsilon,$$

получим:

$$J_i = \sum_{j=1}^i [a_j (\epsilon_j - \epsilon_{j-1}) + \frac{1}{2} a_j (\epsilon_j^2 - \epsilon_{j-1}^2)], \quad /14/$$

$$J_i = J_{i-1} + a_i \epsilon_k + \frac{a_i}{2} \epsilon_k^2, \quad /15/$$

$$J_{i-1} = J_{i-1} - a_i \epsilon_{i-1} - \frac{a_i}{2} \epsilon_{i-1}^2. \quad /15/$$

Уравнение /8/ может быть записано в виде:

$$B_1 = \frac{Q - 2\epsilon_k}{\epsilon_k^2 - T}, \quad /16/$$

где:

$$\begin{cases} Q = \frac{2}{1+a_i} (J_n + \frac{1}{2} - a_i) \\ T = \frac{2}{1+a_i} J_{i-1} \end{cases} \quad /17/$$

Откуда имеем:

$$\epsilon_k = \frac{1}{1+\sqrt{B}} + \frac{\sqrt{B}}{B_1} (\sqrt{1-x} - 1), \quad /18/$$

где:

$$\begin{cases} x = q - \frac{B_1}{B} \\ q = Q + TB_1 - 1 \end{cases} \quad /19/$$

Функция $D(\epsilon_k, \phi)$ определяется выражением:

$$D(\epsilon_k, \phi) = \frac{(1+a_i)(\epsilon_k^2 - T)}{2(\sin\phi_0 - \sin\phi_k)}. \quad /20/$$

В практически важном частном случае, когда $n=3$, $i=2$, $a_i=0$, имеем:

$$2eV_0 = \frac{\pi W_0^2}{2m_0 c^2} \frac{A}{Z} \frac{(1+a_1)(\epsilon_2^2 - T)}{\sin \phi_0 - \sin \phi_s},$$

$$T = \epsilon_1^2 \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2},$$

$$q = \frac{1}{1 + a_2} [(\epsilon_2 - 1)^2 (a_3 - a_2) + B \epsilon_1^2 (a_1 - a_2)].$$

/21/

Окончательная формула для $2eV_0$ (15/, 20/, 21/) близка по форме к 11/ и отличается от нее поправочным множителем, учитывающим отклонение спада от параболического. Как правило, величина q оказывается в несколько десятков раз меньше единицы. Поэтому энергия поворота ϵ_s слабо зависит от параметров поля a и определяется с точностью несколько процентов узловыми фазами ϕ_0 , ϕ_s , ϕ_k (через B):

$$\epsilon_s = \frac{1}{1 + \sqrt{B}}.$$

/22/

Из полученных выражений для $2eV_0$ легко получить аналитически величину ошибки в определении V_0 , связанную с ошибками в определении коэффициентов a .

Для иллюстрации эффективности и точности предлагаемого метода расчета $2eV_0$ на рис. 1 приводится серия кривых спада магнитного поля циклотрона Лаборатории ядерных реакций ОИЯИ. Из рисунка видно, что кривые спада аппроксимируются тремя линейными по ϵ участками с точностью лучше 0,05%, что лежит в пределах точности магнитных измерений.

Л и т е р а т у р а

1. Д.М. Каминкер. Диссертация.
2. Ю.А. Завенягин, Н.Д. Федоров. К вопросу о выборе величины разности потенциалов между дуантами циклотрона. Атомная энергия, т. III, № 7, 50 /1957/.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июня 1963 г.

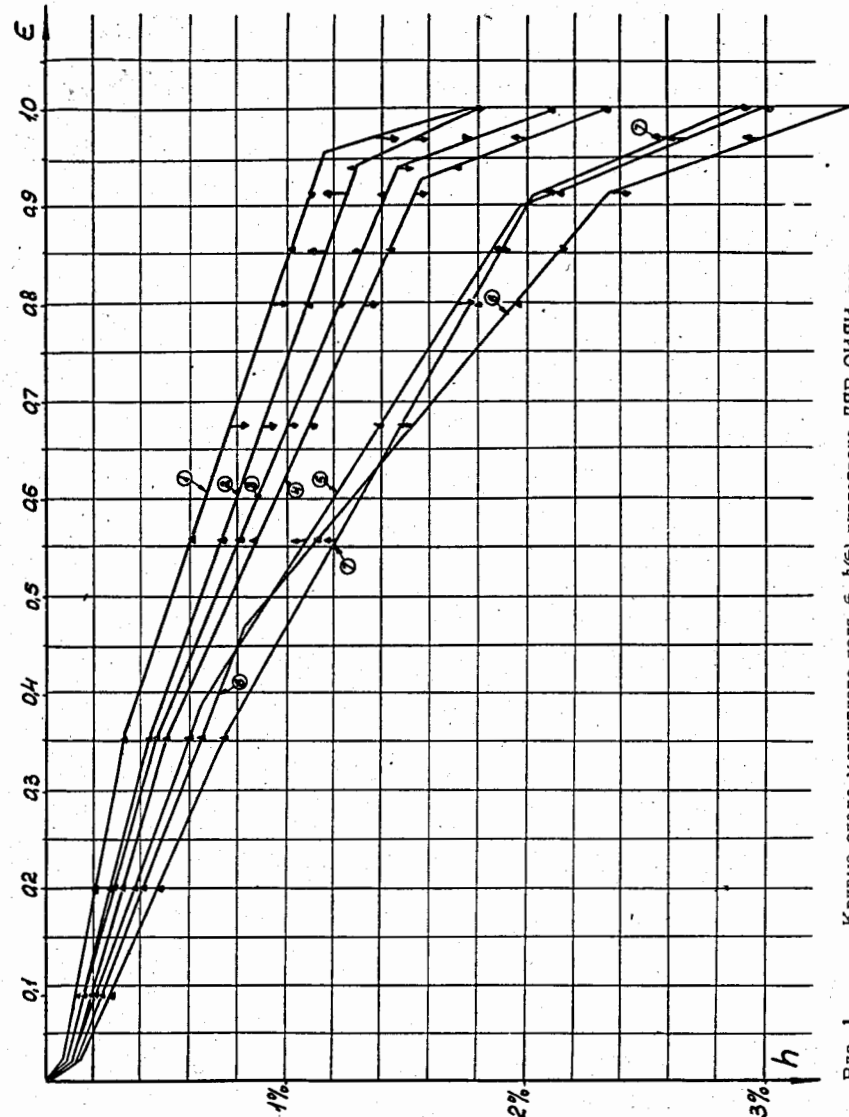


Рис. 1. Кривые спада магнитного поля $\epsilon, h(\epsilon)$ циклотрона ЛЯР ОИЯИ как функции относительной энергии $\epsilon = W/W_k$ при различных значениях магнитного поля в центре H_0 . Треугольниками обозначены экспериментальные точки; вертикальные отрезки указывают, к какой кривой относится данная экспериментальная точка.