18
М-60

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.В. Миллер

Р- 1340

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФОКУСИРОВКИ ЧАСТИЦ ДУБЛЕТОМ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Дубна 1963

В.В. Миллер

Р- 1340

20837/1 эк.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФОКУСИРОВКИ ЧАСТИЦ ДУБЛЕТОМ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Направлено в ПТЭ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963

При расчете систем с магнитными квадрупольными линзами часто возникает задача определения градиентов полей в линзах, которые при данном расположении линз обеспечивают фокусировку частиц, испущенных из мишени (положение мишени и ее изображения также заданы). Квадрупольные линзы при фокусировке частиц в одной плоскости (скажем, по горизонтали) дефокусируют их в плоскости, перпендикулярной первой (по вертикали). Поэтому наименьшее число линз в системе, дающей действительное изображение, равно двум. Однако даже в этом простом, но практически важном случае определение градиентов производится либо методом подбора, либо по приближенным формулам, дающим малую точность для сильных линз [1].

В работе предполагается приближенный аналитический способ определения фокусных расстояний (а следовательно, градиентов) для дублета линз, дающий точность лучше 1% даже в том случае, если фокусное расстояние лишь вдвое превышает длину линзы. Легко показать, что сумма фокусных расстояний квадрупольной линзы f_+ и f_- (для фокусирующей и дефокусирующей плоскостей) равна

$$f_+ + f_- = 1/\sqrt{k}\ \sin\sqrt{k}\ell - 1/\sqrt{k}\ \mathrm{sh}\sqrt{k}\,\ell \approx \ell[\,1+x^4(1/90+1/840)]/3, \qquad (1)$$

где $x=\sqrt{k}\,\ell$, $k=\frac{dB}{dr}/B\rho$, $\frac{dB}{dr}$ – градиент поля в линзе, $B\rho$ – магнитная жесткость частиц, ℓ – эффективная длина линзы. Даже для сильных линз можно считать, что $f_+ + f_- = \ell/3$. Например, для линзы МЛ-16 с $\ell = 1{,}1$ м при $x = 0{,}781$ поправочный член $\lesssim 0{,}5\%$[x]. Кроме того, мы пока примем, что расстояния Δ между главными плоскостями и центром линзы равны нулю. Действительно, для фокусирующей и дефокусирующей плоскостей имеем:

$$\Delta_+ = (1-\cos\sqrt{k}\,\ell)/\sqrt{k}\ \sin\sqrt{k}\ell \approx \ell\, x^2(1+x^2/10+x^4/100)/24,$$
$$\Delta_- = (1-\mathrm{ch}\sqrt{k}\ell)/\sqrt{k}\ \mathrm{sh}\sqrt{k}\ell \approx -\ell x^2(1-0{,}1\,x^2+0{,}01\,x^4)/24. \qquad (2)$$

Положительный знак Δ показывает, что входная плоскость линзы вынесена от центра по пучку. Для МЛ-16 в описанном выше режиме $\Delta_+ = 2{,}98$ см, $\Delta_- = 2{,}64$ см, т.е. довольно малы. Сначала мы будем считать, что расстояния a от центра первой линзы Λ_1 до источника частиц и расстояния b от центра второй линзы Λ_2 до изображения одинаковы в обоих плоскостях (стигматичность), $a>0$, $b>0$ при действительных источнике и изображении.

Тогда для плоскости ФД (Λ_1 –фокусирует, Λ_2 – дефокусирует):
$1/b_1 = 1/f_1 - 1/a$, $1/b = 1/(c_2 - f_2) - 1/(d-b_1)$, для плоскости ДФ: $1/b_2 = 1/(c_1 - f_1) - 1/a$,
$1/b = 1/f_2 - 1/(d-b_2)$.

Здесь d –расстояние между центрами линз, $c_1 = \ell_1/3$, $c_2 = \ell_2/3$, $f_1 \equiv f_{1+}$, $f_2 \equiv f_{2+}$, b_1 и b_2 – расстояния от Λ_1 до промежуточного изображения.

---

[x] Так как фокусировка в дублете более критично зависит от f_+, чем от f_-, то для f_{1+} и f_{2+} точность оказывается еще выше. Для рассмотренного ниже примера поправка на зависимость ℓ от $x \lesssim 0{,}05\%$.

Исключая b_1, b_2 и f_2 и обозначая $m=a+d$, $n=d+b$, $p=a+d+b$, получаем для f квадратное уравнение

$$f_1^2-c_1 f_1-[2a^2bdn-c_1ab(dp+mn)-c_2a^2n^2+c_1c_2abp]/(2bmp-c_2p^2)=0. \qquad (3)$$

Обращая задачу, т.е. меняя местами a и b, а также c_1 и c_2, получим аналогичное уравнение для f_2. По известным f_1 и f_2 легко вычислить необходимые градиенты.

Разложив решения уравнений (3) в ряд по степеням c_1 и c_2 и ограничиваясь линейными членами, имеем удобные формулы для искомых фокусных расстояний:

$$f_1=\sqrt{a^2dn/mp}\,[1-c_1(mn+pd)/4adn-c_2(mn-pd)/4bdm]+c_1/2,$$

$$f_2=\sqrt{b^2dm/np}\,[1-c_2(mn+pd)/4bdm-c_1(mn-pd)/4adn]+c_2/2. \qquad (4)$$

Для оценки точности метода рассмотрим конкретный пример. Пусть $a=1{,}2$ м, $b=6$ м, $d=1{,}2$ м. Точное решение уравнений (3) дает $f_1=1{,}994$ м, $f_2=2{,}088$ м, а из формул (4) следует: $f_1=2{,}005$ м, $f_2=2{,}100$ м. Если же мы будем пользоваться точными формулами для фокусных расстояний и считать, что $\Delta\neq 0$, то подбором находим, что f_1 и f_2 должны быть равны 2,0345 м и 2,0970 м, соответственно.

Таким образом, уравнения (3) обеспечивают точность 0,5% при $\ell/f_+\approx 0{,}6$[x]. Приближение (4) в данном случае практически компенсирует погрешность уравнений (3). При увеличении a и b и уменьшении ℓ точность оказывается еще выше.

Очень часто приходится иметь дело с более общей задачей, в которой источники и изображения в плоскостях ФД и ДФ не совпадают. Это различие может возникнуть из-за фокусирующих свойств магнитного поля ускорителя и отклоняющих магнитов или вводиться умышленно. В этом случае вместо уравнения (3) имеем:

$$f_1^2(A_1+A_2-c_2)+f_1[A_1(D_2-B_1)-A_2(D_1-B_2)+c_2(D_2-D_1)]-(A_1B_1D_2+A_2B_2D_1-c_2D_1D_2)=0, \qquad (5)$$

$$A_1=b'm'/p',\ A_2=b''m''/p'',\ B_1=a'd/m',\ B_2=(a''d/m'')-c_1,\ D_1=a'n'/p',\ D_2=(a''n''/p'')-c_1.$$

Величины с одним штрихом относятся к плоскости ФД, а с двумя штрихами – к плоскости ДФ. Уравнение для f_2 получается заменой $a'\rightleftarrows b'$, $a''\rightleftarrows b''$, $c_1\rightleftarrows c_2$ и т.д. Заметим, что поправка на $\Delta\neq 0$ может быть учтена в качестве второго приближения. Для этого по найденным из уравнения (3) или (5) значениям f_1 и f_2 находим x_1 и x_2, а затем Δ_{1+}, Δ_{1-}, Δ_{2+}, Δ_{2-} по формулам (2). В случае $\Delta\neq 0$ в уравнения должны входить расстояния до соответствующих главных плоскостей, т.е. a' заменяется на $a_1'=a'+\Delta_{1+}$, b' на $b_1'=b'+\Delta_{2-}$;, аналогично $a_1''=a''+\Delta_{1-}$, $b_1''=b''+\Delta_{2+}$. В качестве расстояния между линзами следует принять расстояние между выходной главной плоскостью Λ_1 и входной плоскостью Λ_2, т.е. $d'=d+\Delta_{1+}+\Delta_{2-}$, $d''=d+\Delta_{1-}+\Delta_{2+}$. Новые расстояния подставляем вместо старых в уравнение (5), причем, естественно, в A_1, B_1, D_1 войдет d', а в A_2, B_2, D_2 – d''.

---

x) Даже для $\ell/f\approx 1$ ($a=3$м, $b=2{,}5$ м, $d=1{,}5$ м, $\ell_1=\ell_2=1{,}2$ м) точность $\approx 1\%$.

Литература

1. Techniques of High Energy Physics, D.M.Ritson. Edit., N.Y-London, Interscience publ. (1961); Annual Review of Nuclear Science, 10, 161 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 июня 1963 г.