ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Ромуальд Вит

Р - 1336

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ АМПЛИТУДЫ ПИОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

Дубна 1963

Ромуальд Вит

Р-1336

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ АМПЛИТУДЫ ПИОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

Направлено в "Acta Physica Polonica"

Дубна 1963

1. Введение

Все последующие рассуждения относятся к амплитуде рассеяния $T^{(1)}(\omega)$, которая по определению равняется

$$T^{(1)}(\omega) = T(\omega) = \tfrac{1}{2}[T^{+}(\omega) + T^{-}(\omega)],$$

где ω –энергия падающего мезона в ЛСК : $\omega = \sqrt{p^2+1}$. Все вычисления проведены в такой системе единиц, в которой $\hbar = c = \mu = 1$. Для дальнейшего нам нужно знать указанные ниже свойства $T(\omega)$, которые используются в качестве исходных предположений. По определению

$$T(\omega) = D(\omega) + iA(\omega), \quad D(\omega) = D^*(\omega), \quad A(\omega) = A^*(\omega).$$

Тогда

1. $T^*(z) = T(z^*)$;
$D(\omega - i0) = D(\omega + i0)$,
$A(\omega - i0) = -A(\omega + i0)$,

2. $D(-\omega + i0) = D(\omega + i0)$,
$A(-\omega + i0) = -A(\omega + i0)$.

Отсюда получаем:

$$D(-\omega - i0) = D(\omega + i0), \qquad D'(-\omega - i0) = -D'(\omega + i0),$$
$$A(-\omega - i0) = A(\omega + i0), \qquad A'(-\omega - i0) = -A'(\omega + i0),$$
$$D'(-\omega + i0) = -D'(\omega + i0), \qquad D'(\omega - i0) = D'(\omega + i0),$$
$$A'(-\omega + i0) = A'(\omega + i0), \qquad A'(\omega - i0) = -A'(\omega + i0).$$

3. $T(\omega)$ имеет два простых полюса в точках $\omega = \pm\,\omega_B = \pm\,\frac{1}{2M}$ и разрезы вдоль действительной оси $\omega \in (-\infty, -1)$ и $\omega \in (1, \infty)$. Одномерное дисперсионное соотношение для $T(\omega)$ имеет следующий вид:

$$T(\omega) = T(\omega_0) + \frac{2}{\pi}(\omega^2 - \omega_0^2)\int_1^{\infty}\frac{d\omega'\,\omega'\,A(\omega')}{(\omega'^2 - \omega_0^2)(\omega'^2 - (\omega+i0)^2)} + \frac{f^2}{M}\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_B^2)(\omega_0^2 - \omega_B^2)} \qquad /1/$$

Из этой формулы видно, что а/ $T(\omega)$ растет при $x > 0$, уменьшается при $x < 0$ для $\omega = x \in (-1, 1)$; б/ $T(\omega)$ уменьшается при $y > 0$, растет при $y < 0$ для $\omega = iy$.

4. $T(\omega)$ имеет два или четыре нуля в зависимости от $T(1)$; а/ при $T(1) < 0$ амплитуда $T(\omega)$ имеет два корня, б/ при $T(1) > 0$ амплитуда $T(\omega)$ имеет четыре корня.

Последний случай представлен на рис. 1. Видно, что два "добавочных" корня находятся на вещественной оси в пределах $|\omega_B| < |\omega_0| < 1$.

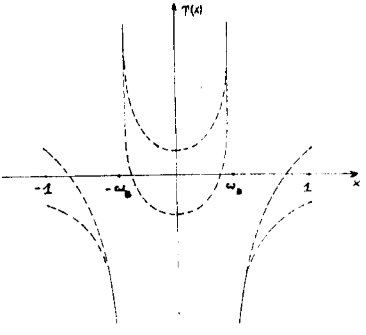

Рис. 1.

5. Предполагаем, что $T(0) \neq 0$, $T(1) \neq 0$.

Из опыта нужно определить: а/ знак $T(1)$; б/ сечения взаимодействия и асимптотику /мы в дальнейшем принимаем, что $\sigma^{+}(\infty) = \sigma^{-}(\infty) - 29\,mb$, $D(\infty) = -0.400$); в/ $T(0)$ из формулы /1/.

Определение корней

Используем следующую теорему:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{1}{z^n}\frac{T'(z)}{T(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{a_i^n} - \sum_{\ell=1}^{P}\frac{1}{b_\ell^n} + \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{T'(x)}{T(x)}\Big|_{x=0} . \qquad /2/$$

Контур интегрирования показан на рис. 2. Левая сторона /2/ для четных принимает вид:

$$\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^n}\frac{A'D - D'A}{A^2 + D^2} = -\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^n}\frac{(\frac{D}{A})'}{1 + (\frac{D}{A})^2} . \qquad /3/$$

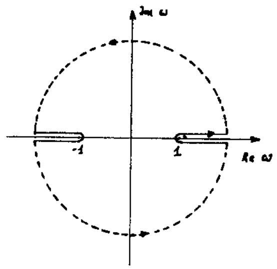

Рис. 2.

При "n" нечетных она тождественно равна нулю. Правая сторона /2/ для "n" нечетных также тождественно равняется нулю потому, что: а/ $T(\omega)$ зависит от ω , как от ω^2 в интервале /-1,1/; тогда "нулевые" и "полюсные" члены уничтожаются; б/четные производные функции типа $x g(x^2)$ в нуле равняются нулю.

Остановимся на первом случае - "n" четные. Возьмем, например, $n = 2$. "Полюсный" и последний член с правой стороны /2/ действительны. Левая сторона /2/ - тоже (см. /3/). Пусть $T(\omega)$ имеет только два нуля /возможные остальные два, очевидно, находятся на вещественной оси/ - они расположены в точках z_0 и $(-z_0)$. Поэтому

$$\frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{(-z_0)^2} = 2\,\frac{x_0^2 - y_0^2 - 2i\,x_0 y_0}{x_0^4 + y_0^4} , \quad z_0 = x_0 + i y_0 .$$

Отсюда получаем первое заключение: <u>корни $T(\omega)$ должны быть расположены на действительной или мнимой оси.</u>

Этот результат уже получил Aramaki [1] , <u>но совсем другим путем.</u>

Вернемся к уравнению /2/.

В зависимости от знака $T(0)$ два корня могут находится на вещественной или мнимой оси /см. рис. 1, вблизи $x = 0$ /.

Перепишем формулу /2/ в несколько ином виде:

$$-\Big\{\frac{1}{\pi}\int_1^\infty \frac{d\omega}{\omega^n}\frac{(\frac{D}{A})^1}{1 + (\frac{D}{A})^2} + \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big(x\frac{P(x^2)}{T(x^2)}\Big)\Big|_{x=0}\Big\} + \frac{1}{\omega_B^n} =$$

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{x_0^n} + \frac{1}{x_1^n} > 0 , & T(1) > 0 & \\ & & T(0) < 0 , \\ \frac{1}{x_0^n} > 0 , & T(1) < 0 & \\ & & \\ \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{(iy)^n} , & T(1) > 0 & \\ & & T(0) > 0 , \\ \frac{1}{(iy)^n} & T(1) < 0 & \end{array}\right. \qquad /4/$$

$$D(\omega^2) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{A(\omega')\,d\omega'^2}{(\omega'^2 - \omega^2)^2} + \frac{f^2}{M}\frac{1 - \omega_B^2}{(\omega^2 - \omega_B^2)^2} .$$

Таким образом, мы установили метод нахождения координат нулей амплитуды $T(\omega)$. Изменяя, например, "n" , мы находим сколь угодно много уравнений для одной или двух неизвестных. Высокоэнергетические "хвосты" в интегралах убывают. Возникает вопрос: нет ли возможности таким путем определить знак $T(1)$? Действительно, в настоящее время нам известны следующие экспериментальные данные:

a) Orear [2] : $T(1) = -0.0172\,\lambda_c$;
b) Hamilton - Woolcock [3] : $T(1) = +0.0015\,\lambda_c$.

Один из этих результатов, очевидно, неправилен. Однако уравнение /4/ не совсем пригодно для наших дальнейших рассуждений. В нем содержится член с производными, который имеет сложный вид.

С целью упрощения формулы /4/ рассмотрим интеграл $\oint \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}\frac{T'(z)}{T(z)}$. Видно, что

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}\frac{(D^2 + A^2)^1}{D^2 + A^2} =$$

$$= 2\pi\left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_B^2}} > 1 , & T(1) > 0 & \\ & & T(0) < 0 , \\ \frac{1}{\sqrt{1 - x_0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_B^2}} < 0 , & T(1) < 0 & \\ & & \\ \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_B^2}} > 0 , & T(1) > 0 & \\ & & T(0) > 0 . \\ \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_B^2}} < 0 , & T(1) < 0 & \end{array}\right. \qquad /5/$$

Существование производной под знаком интеграла не является недостатком полученной формулы: интегрированием по частям мы можем устранить дифференцирование /получая $ln(A^2 + D^2)/$, а "опасную" часть вблизи $x = 1$ прямо вычислить, соответственно аппроксимируя в этой области $D(x)$ и $A(x)$. Отметим, что под интегралом в левой части уравнения /5/ стоит функция, которую можно определить прямо из опыта, в то время как для формулы /4/ нам нужно еще соотношение /1/.

Мы подобрали функцию $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ таким образом, чтобы а/обеспечить сходимость интеграла на бесконечность; б/ особенности этой функции были интегрируемы в точках $z = 1$ и $z = -1$; в/ мы уже не имели дела с полюсными членами. Возможно, одни разрезы решат поставленные вопросы.

Имея ввиду эти соображения, мы можем ввести еще одну вспомогательную функцию: $\frac{1}{\sqrt{z-1}}$, которая в еще меньшей степени, чем предыдущая, подавляет "физическое" содержание интеграла. Тогда

$$\int_1^\infty \frac{dx}{A^2+D^2}\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}}(D'D + A'A) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}(DA' - D'A)\right] = \int_1^\infty dx\left[\tfrac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\frac{(D^2+A^2)'}{A^2+D^2} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\frac{(\frac{D}{A})'}{1+(\frac{D}{A})^2}\right] =$$

$$= \pi \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{1-x_0}} + \frac{1}{\sqrt{1+x_0}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+x_1}} - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_B}} - \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B}} > 2, & T(1)>0 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x_0}} + \frac{1}{\sqrt{1+x_0}} - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_B}} - \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B}} < 0, & T(1)<0 \end{array}\right\} T(0)<0 \\ \\ \left.\begin{array}{ll} 2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{2(1+y)}} + \frac{1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+x_1}} - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_B}} - \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B}} > 0, & T(1)>0 \\ 2\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+y^2}}{2(1+y^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_B}} - \frac{1}{\sqrt{1+\omega_B}} < 0, & T(1)<0 \end{array}\right\} T(1)<0. \end{cases} \qquad /6/$$

Неравенства в формулах /5/ и /6/ получаются, например, если разложить в ряд соответственные радикалы.

Установление связи между $T(0)$ и $T(1)$

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию:

$$\frac{T(z) - T(1)}{z^2-1}\,\frac{z^2-\omega_B^2}{z^2-\omega_0^2}\,\frac{1}{z}.$$

Ее единственные полюса находятся в точках $z=0$ и $z = \pm\omega_0$ / ω_0 - положение корня $T(\omega)$ / . Используя теорему Коши, получаем:

$$\frac{T(1) - T(0)}{\omega_0^2}\omega_B^2 - \frac{T(1)\,\omega_0^2}{1-\omega_0^2}(\omega_B^2 - \omega_0^2) = \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{dx\, A(x)(x^2-\omega_B^2)}{(x^2-1)(x^2-\omega_0^2)} > 0 ,$$

или, после несложных преобразований:

$$T(0)\,\frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} < T(1)\,\frac{1-\omega_B^2}{1-\omega_0^2} .$$

Рассмотрим случай $T(0) > T(1)$, $T(0) > 0$ $(\omega_0^2 = -y^2 < 0)$. Для $T(1)<0$

или

$$-\frac{\omega_B^2}{y^2} > \frac{1-\omega_B^2}{1+y^2} ,$$

$$-\omega_B^2 > y^2 ,$$

что, очевидно, невозможно, поэтому такой случай необходимо исключить из дальнейшего рассмотрения. Таким образом, данные *Orear'a* противоречат утверждению $T(0)>0$, которое получается из /1/ для указанных выше значений $T(1)$, независимо от знака $T(1)$.

Из правых частей соотношений /4/, /5/ и /6/, таким образом, мы исключаем последние строки, тогда выражения, стоящие в /5/ и /6/ слева должны /при $T(0)\neq 0$ и $T(1)\neq 0$ / быть всегда положительными или отрицательными. Зная, что $T(0) > 0$, нам осталось проверить, что они всегда положительны.

Численные результаты

Вернемся еще раз к соотношению /6/ и вычислим входящие в него интегралы. Значения $D(x)$ взяты из соответственным образом измененных результатов *Cronin'a* [4] . Для левой части /6/ получаем:

$L_1 = 36{,}012$, $T(1) > 0$, $(T(0) = 2{,}265)$;

$L_2 = 58{,}088$, $T(1) < 0$, $(T(0) = 2{,}246)$.

Похожие результаты получаются и для выражения, стоящего слева в /5/. Из этого видно, что правильными нужно считать результаты *Hamilton'a-Wodcock'a* $T(1) > 0$. Отсюда вытекают некоторые следствия.

Рассматривая вспомогательные функции

$$\frac{T(z)}{z(z^2-\omega_0^2)\sqrt{z^2-1}} , \qquad \frac{T(z)(z^2-\omega_B^2)}{(z^2-\omega_0^2)(z^2-\omega_1^2)\,z\sqrt{z^2-1}}$$

и используя соотношение /1/, получаем, что $D(\omega)$ должна удовлетворять следующим интегральным связям:

а/

$$\int_1^\infty \frac{D(x)(x^2-\omega_B^2)}{(x^2-\omega_1^2)(x^2-\omega_0^2)\,x\sqrt{x^2-1}} > 0 ,$$

б/

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{f^2}{M}\,\frac{1}{(\omega_1^2-\omega_B^2)(\omega_B^2-\omega_0^2)} = \sqrt{1-\omega_B^2}\int_1^\infty \frac{dx\, x\, D(x)}{(x^2-\omega_1^2)(x^2-\omega_0^2)\sqrt{x^2-1}} = \int_1^\infty \frac{dx\, x\, A(x)}{(x^2-\omega_0^2)(x^2-\omega_1^2)} > 0 .$$

Они не являются тривиальными из-за того, что $D(\omega)$ принимает в области $(1, \infty)$ как положительные, так и отрицательные значения, $/A(\omega)$ в силу оптической теоремы будет всегда положительной/.

В заключение автор выражает грубокую благодарность А.А. Логунову и П.С. Исаеву за обсуждение полученных результатов. Он очень обязан также сотрудникам кафедры теоретической физики Ягеллонского университета за ряд ценных, стимулирующих советов.

Литература

1. S.Aramaki. Prog. Theor. Phys., 28, 479 (1962).
2. J.Orear. Nuovo Cim, 4, 856 (1956).
3. J.Hamilton, W.F.Woolcock. Phys. Rev., 118, 291 (1960).
4. J.Cronin. Phys. Rev., 118, 824 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1963 г.