ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

В.И. Котов, А.Б. Кузнецов, Н.Б. Рубин

Р-1331

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС БЕТАТРОННЫХ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИНХРОФАЗОТРОНЕ ПРИ ЧАСТОТЕ, РАВНОЙ 2/3

Межд. конф. по ускорителям
Дубна, 1963. Труды...
М., Атомиздат, 1964
с. 844-846.

Дубна 1963

В.И. Котов, А.Б. Кузнецов, Н.Б. Рубин

Р-1331

НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕЗОНАНС БЕТАТРОННЫХ РАДИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИНХРОФАЗОТРОНЕ ПРИ ЧАСТОТЕ, РАВНОЙ 2/3

Дубна 1963

При проектировании слабофокусирующих ускорителей обычно ограничивались рассмотрением влияния на пучок линейных резонансов первого и второго порядка: внешнего, параметрического, и резонанса связи [1].

Во избежание их опасного воздействия рабочая область по n выбирается, как правило, такой, чтобы эти резонансы отсутствовали. В частности, в установках без прямолинейных промежутков и кольцевой по радиусу магнитной дорожкой используемая область по n лежит в пределах $0{,}5 < n < 0{,}75$.

В ускорителях с прямолинейными промежутками ввиду смещения параметрического резонанса при $\nu_x = ½$, где ν_x – число радиальных бетатронных колебаний, укладывающихся на одном обороте частиц, верхняя граница по n несколько выше. Например, для синхрофазотрона ОИЯИ, где $\frac{L}{R} = \frac{2}{7}$ (L –длина каждого из 4-х прямолинейных промежутков, R – радиус орбиты) резонанс $\nu_x = ½$ осуществился бы при $n = 0{,}79$, вместо $n = 0{,}75$ – в установках без промежутков.

Как показала практика работы многих слабофокусирующих машин указанного типа, подход к рассмотрению бетатронных колебаний, основанный на линейной теории, был вполне удовлетворительным.

Однако при стремлении свести к минимуму потери интенсивности пучка частиц в процессе его ускорения следует обратить внимание и на более тонкие нелинейные резонансы, расположенные в рабочей области. В частности, есть указание [2], что заметное влияние на интенсивность пучка может оказывать нелинейный резонанс третьего порядка с радиальными колебаниями при $\nu_x = \frac{2}{3}$. В синхрофазотроне ОИЯИ этому резонансу соответствует $n = 0{,}63$.

При анализе действия этого резонанса используем общий подход, который был разработан при исследовании резонансных явлений в ускорителях, изложенный, например, в [3].

Наша задача будет состоять главным образом в оценке потерь интенсивности пучка в процессе ускорения, то есть при многократном прохождении через резонанс из-за радиально-фазовых колебаний. Численные расчеты будут проводиться с использованием параметров синхрофазотрона ОИЯИ.

1. Для упрощения, и в то же время не делая большой ошибки, рассмотрение будем вести в "гладком приближении", именно: будем считать линейные колебания гармоническими с частотой

$$\nu_x = \sqrt{1-n}\,\left(1 + \frac{L}{\pi R}\right). \qquad (1)$$

При этом за независимую переменную выбирается θ, определяемая формулой

$$\theta = \frac{S}{R\left(1 + \frac{2L}{\pi R}\right)}, \qquad (2)$$

где S – текущая длина вдоль равновесной орбиты.

Тогда "сглаженные" уравнения радиальных бетатронных колебаний в разложении до 3-го порядка по $x = \frac{r-R}{R}$ и при учете только членов, ответственных за резонанс $\nu_x = \frac{2}{3}$, будут иметь вид:

$$x'' + \nu_x^2 x = -l\{(\frac{n_1}{2} - 2n + 1) + [\frac{\Delta H(\theta)}{H} - (\frac{H(\theta)}{H} n(\theta) - n) + \tfrac{1}{2}(\frac{H(\theta)}{H} n_1(\theta) - n_1)]\} x^2 + \tag{3}$$

$$+ \frac{1}{2l}[1 - 3\frac{\Delta H(\theta)}{H}] x'^2 + l(\frac{n_2}{6} - n_1 + n) x^3 + \frac{1}{2l}(3n-4) x x'^2 .$$

Здесь H определено из условия: $eHR = -pc$, p – импульс частицы; $l = 1 + \frac{2L}{\pi R}$; $\Delta H(\theta) = H(\theta) - H$; $H(\theta)$ – аксиальная компонента напряженности магнитного поля при $z = 0$ и $r = R$; $n_{k-1}(\theta) = n_{k-1}(r,\theta)|_{r=R}$, где $n_{k-1}(r,\theta) = (-1)^k \frac{r^k}{H(r,\theta)} \frac{\partial^k H(r,\theta,z)}{\partial r^k}|_{z=0}$ n, n_1, n_2 – не зависящие от θ "идеальные" значения параметров $n_{k-1}(\theta)$ (при $k = 1$ индекс "0" опущен). Следует также иметь в виду, что $n_{k-1}(\theta)$ при $k > 1$ можно выразить через $n(\theta), n'(\theta) = \frac{\partial n(r,\theta)}{\partial r}|_{r=R}, \ldots\ldots,$

$$n^{(k-1)}(\theta) = \frac{\partial^{(k-1)} n(r,\theta)}{\partial r^{k-1}}|_{r=R} .$$

Например,

$$n_1(\theta) = n^2(\theta) + n(\theta) - n'(\theta)R, \quad n_2(\theta) = n^3(\theta) + 3n^2(\theta) + 2n(\theta) - Rn'(\theta)[3n(\theta)+2] + R^2 n''(\theta).$$

Обозначим коэффициенты (включая знаки) при x^2, x'^2, x^3, xx'^2 соответственно через Γ, Λ, K, M и разложим зависящие от θ коэффициенты Γ и Λ в ряд Фурье:

$$\Gamma = \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k \cos k\theta + g_k \sin k\theta), \quad \Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k \cos k\theta + \ell_k \sin k\theta).$$

Будем искать решение приведенного уравнения при $\nu = \frac{2}{3} + \Delta\nu$, $\Delta\nu \ll 1$ методом усреднения /4/.

Решение однородного уравнения имеет вид:

$$x = a\cos(\nu\theta - \psi), \tag{4}$$

где a и ψ – константы.

Используя эту форму решения, но считая a и ψ медленными функциями θ, нетрудно получить из (3) систему укороченных уравнений для квадрата амплитуды $D = a^2$ и фазы колебаний. Эти уравнения запишем в гамильтоновой форме:

$$D' = \frac{3d_2}{8} D^{3/2} \sin 3\phi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi},$$

$$\phi' = \frac{3d_2}{16} D^{1/2} \cos 3\phi - \frac{3\xi}{16} D + \Delta\nu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial D}, \tag{5}$$

где

$$\phi = -\psi + \Delta\nu\cdot\theta + \frac{\eta}{3}, \quad \mathcal{H} = \Delta\nu\cdot D - \frac{3}{32}\xi D^2 + \frac{1}{8} d_2 D^{3/2} \cos 3\phi,$$

$$d_2 = \sqrt{(\frac{4}{9}\lambda_2 - \gamma_2)^2 + (\frac{4}{9}\ell_2 - g_2)^2}, \quad \cos\eta = \frac{\frac{4}{9}\lambda_2 - \gamma_2}{d_2}, \quad \sin\eta = \frac{\frac{4}{9}\ell_2 - g_2}{d_2}, \tag{6}$$

$$\xi = 3K + \frac{4}{9} M .$$

Как и следовало ожидать, резонанс вызывается лишь второй гармоникой в возмущениях параметров, характеризующих магнитное поле. Кубичная нелинейность в уравнениях (3) дает дополнительный сдвиг частоты колебаний (зависящий от D).

2. Положим $\Delta\nu = const$, тогда гамильтониан будет интегралом движения. Соответствующие интегральные кривые удобно представить на фазовой плоскости в полярной системе координат (см. рис. 1 и 2).

На указанных рисунках полярный угол есть ϕ, а полярный радиус $z = \frac{3}{16} d_2 a$. Параметр $g = \frac{16}{3}\frac{\xi}{d_2^2}$ отражает влияние кубичной нелинейности и зависит также от величины d_2, определяемой возмущениями в магнитном поле.

Как видно из рис. 1а, при $g = 0$ и $\Delta\nu = 0$ резонанс приводит к бесконечному нарастанию амплитуд. При наличии расстройки $\Delta\nu \neq 0$ (рис. 1б) и при малых амплитудах возможны устойчивые колебания с слабо варьирующейся амплитудой. Область ограниченных амплитуд на плоскости z, ϕ имеет вид равностороннего треугольника с радиусом вписанной окружности $z = \frac{\Delta\nu}{2}$. Отсюда, резонансная полоса определится соотношением

$$\Delta\nu \leq \frac{3}{8} d_2 a . \tag{7}$$

На рис. 2а, б, в, г, представлены случаи, когда $g \neq 0$. Как видно, здесь нет интегральных кривых, уходящих в бесконечность. Однако наряду с малой стационарной амплитудой, устойчивой (рис. 2а, в, г) или неустойчивой (рис. 2б), имеются также относительно большие стационарные амплитуды (рис. 2а, б, в), которые могут превышать полуапертуру, и в этом смысле резонанс может оказаться столь же опасным, как и при отсутствии кубичной нелинейности. Характерно также, что картина на фазовой плоскости существенно зависит от знака $\Delta\nu$.

3. Во всяком реальном ускорителе величина n обычно не постоянна по радиусу.

В квазибетатронном режиме, а также в процессе радиально-фазовых колебаний частицы могут проходить область резонансного значения n, и, следовательно, необходимо рассмотреть увеличение амплитуды колебаний при таком прохождении. Как показали оценки, в квазибетатронном режиме однократное прохождение частицами резонансной области практически совершенно безопасно. В соответствии с этим мы будем рассматривать только многократное прохождение резонансной области вследствие радиально-фазового движения. Здесь надо учитывать два фактора – раскачку колебаний при прохождении резонанса и их адиабатическое затухание, а также затухание радиально-фазовых колебаний между последовательными прохождениями. На основе проведенных оценок можно утверждать, что при радиально-фазовом движении прохождение через резонанс будет не адиабатическим, а быстрым x). Используя соответствующую этому случаю методику рассмотрения /3/, получим, что при малом относительном приросте амплитуды бетатронных колебаний и однократном прохождении через резонанс

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{3}{8} d_2 \sqrt{D} \sqrt{\frac{2\pi}{3|\Delta\nu'|}}, \tag{8}$$

x) Исключая случай, когда резонансному значению n соответствует орбита такого радиуса R_1, что $R_1 - R_s \approx b$, где b – амплитуда радиально-фазовых колебаний, R_s – равновесный радиус.

где $\Delta\nu' = \frac{d(\Delta\nu)}{d\theta}$, $\Delta\nu$ предполагается линейной функцией θ. $|\Delta\nu'|$, определяемое из радиально-фазового движения в линейной области, имеет следующий вид:

$$|\Delta\nu'| = I^2 \frac{\omega}{\omega_s} \frac{|\frac{dn}{dr}|\, 3}{4} \, b\, |\cos\sigma| . \tag{9}$$

Здесь ω – частота малых радиально-фазовых колебаний, ω_s – частота обращения, $\sin\sigma = \frac{R_1 - R_s}{b}$, R_1 – радиальное положение резонанса.

Очевидно, что потери частиц возможны лишь в том случае, если увеличение амплитуды радиальных бетатронных колебаний в результате двухкратного прохождения резонанса за период радиально-фазовых колебаний будет больше, чем суммарное уменьшение амплитуд бетатронных радиальных δa и радиально-фазовых колебаний δb из-за их затухания. Таким образом, условие отсутствия потерь можно записать в виде:

$$2\Delta a < \delta a + \delta b . \tag{10}$$

Согласно (8) и (9),

$$\Delta a = \frac{d_2 a^2}{8 R_s I} \sqrt{\frac{\omega_s 2\pi}{\omega \quad b\,|\frac{dn}{dr}|\,|\cos\sigma|}} . \tag{11}$$

Из адиабатических интвариантов

$$\delta a = \frac{\dot H\, 2\pi}{2 H_s \omega}\, a , \quad \delta b = q\, \frac{\dot H\, 2\pi}{H_s\, \omega}\, b , \tag{12}$$

где q – параметр, меняющийся от 1 (вне релятивистской области) до 3/4 (в релятивистской области).

Вводя обозначения $v = \frac{a}{h}$ и $u = \frac{b}{h}$, где h – радиальная полуширина ускорительной камеры, и подставляя (11) и (12) в (10), получим:

$$v^2 \leq 4r\,(v + 2u)\sqrt{u}\,\sqrt{|\cos\sigma|} , \tag{13}$$

где

$$r = \frac{\dot H \pi\sqrt{I}}{H_s\, \omega_s d_2} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\,\omega_s}\, |\frac{dn}{dr}|\, r_s \frac{r_s}{h}} .$$

Кроме этого, должно выполняться еще одно неравенство:

$$v + u \leq 1 , \tag{14}$$

отражающее тот факт, что сумма амплитуд бетатронных радиальных и радиально-фазовых колебаний не может превышать полуширину камеры.

Из (13), решая квадратное уравнение относительно v, получаем неравенство

$$v \leq 2r\sqrt{u}\,\sqrt{|\cos\sigma|}\,\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{u}}{r\sqrt{|\cos\sigma|}}}\,\right] , \tag{15}$$

разбивающее область амплитуд бетатронных колебаний на два интервала. В одном из них сумма амплитуд бетатронных и соответствующих радиально-фазовых колебаний уменьшается, а в другом – увеличивается.

Теперь можно представить физическую картину процесса, развивающегося при действии резонанса. Проще всего ее рассмотреть при $R_1 = R_s (\cos\sigma = 1)$.

При меньших u, согласно (15), уменьшается минимальная величина v, начиная с которой происходит увеличение суммы амплитуд $u + v$. Вместе с тем, при этом

увеличивается максимальная величина v, которую могут иметь частицы в ускоряемом пучке /см. (14)/. То есть чем меньше амплитуда радиально-фазовых колебаний, тем больше область амплитуд бетатронных колебаний, в которой происходит увеличение суммы $u + v$.

Таким образом, потери частиц при $R_1 = R_s$, $(\cos\sigma = 1)$ в основном идут из центральной части области радиально-фазовой устойчивости (сепаратрисы).

В случае, когда $R_1 \neq R_s$ и $u < \frac{|R_1 - R_s|}{h}$, резонанс не проходится, а для области $u > \frac{|R_1 - R_s|}{h}$ качественно картина та же самая, что и при $R_1 = R_s$. Однако, как видно из предыдущего, описанному действию резонанса в этом случае подвержено меньшее количество частиц.

До сих пор мы не учитывали медленное изменение параметров, например r и u, в процессе ускорения. Учесть это можно, анализируя (15) при $\cos\sigma = 1$. Например, при достаточно больших $\frac{\sqrt{u}}{r}$ (15) приближенно можно записать в виде:

$$v \leq 2\sqrt{2}\; u^{3/4} r^{1/4} . \tag{16}$$

Так как в процессе ускорения v уменьшается медленнее, чем $\frac{1}{\sqrt{H_s}}$, а правая часть при неизменных d_2 и $|\frac{dn}{dr}|$ в начале ускорения падает приблизительно как $\frac{1}{H^2}$, то неравенство (16) для начального этапа ускорения можно записать в виде:

$$v_0 \lesssim 2\sqrt{2}\; u_0^{3/4} r^{1/4} \left(\frac{H_{s0}}{H_s}\right)^{3/2} , \tag{17}$$

где индекс "0" отмечает величины, взятые в начальный момент.

Таким образом, в процессе ускорения все большее количество частиц подвергается раскачке, обеспечивающей увеличение суммы амплитуд бетатронных и соответствующих радиально-фазовых колебаний.

Качественно это справедливо и в дальнейшей, релятивистской области ускорения. При $R_1 \neq R_s$ $(\cos\sigma \neq 1)$ картина будет приблизительно такой же, как и при $R_1 = R_s$, пока $u \geq \frac{|R_1 - R_s|}{h}$. Как только в результате затухания становится $u < \frac{|R_1 - R_s|}{h}$, соответствующие частицы выходят из области действия резонанса, и, если они не потерялись, то в дальнейшем уже потеряться не могут.

Приведенное выше описание, конечно, носит сугубо приближенный характер. В действительности d_2 и $|\frac{dn}{dr}|$ за время ускорения будут меняться, и положение резонанса может смещаться. Кроме того, существенный отпечаток на характер потерь может накладывать многократное рассеяние частиц и ряд других возмущающих факторов. В связи с этим строгое рассмотрение данного вопроса весьма затруднительно. В дальнейшем мы приведем расчет потерь частиц при некоторых упрощающих предположениях, позволяющих с разумной точностью оценить опасность данного резонанса. А именно: будем предполагать, что условия резонанса выполняются на центральном радиусе $R_1 = R_s$, и все частицы, не удовлетворяющие в начале цикла ускорения неравенству (13), с течением времени теряются. Подчеркнем, что при этих упрощениях мы, с одной стороны, несколько завышаем результат, предполагая, что рассматриваемые частицы обязательно потеряются, но, с другой стороны, неучет динамики, занижает его. При указанных предположениях коэффициент потерь из-за резонанса можно записать в следующем виде:

$$K = \frac{1}{w}\int_0^{u_{гр}} du \int_{v_{гр}}^{1-u} F(v,u)\,dv, \qquad (18)$$

где $F(v,u)$–функция распределения частиц по амплитудам бетатронных и радиально–фазовых колебаний после инжекции, $w = \int_0^{u_{max}} du \int_0^{1-u} F(v,u)\,dv$ – полное количество частиц, захваченных в режим ускорения, $v_{гр}$ определяется из равенства (15), а $u_{гр}$ – из равенства

$$v_{гр}(u_{гр}) = 1 - u_{гр}. \qquad (19)$$

Если предположить, что в области интегрирования $F(v,u) = 1$, интеграл в (18) равен

$$G = \int_0^{u_{гр}} \int_{v_{гр}}^{1-u} du\,dv = \frac{u_{гр}}{210(1+u_{гр})^4}(70 + 385u_{гр} + 616u_{гр}^2 + 462u_{гр}^3 + 138u_{гр}^4 + 9u_{гр}^5), \qquad (20)$$

где $u_{гр.}$ следующим образом связано с параметром r:

$$r = \frac{(1-u_{гр})^2}{4\sqrt{u}\,(1+u_{гр})}. \qquad (21)$$

Графики $G(r)$ и $u_{гр.}(r)$, а также коэффициент потерь $k(r)$ приведены на рис. 3, 4, причем при вычислении $k(r)$ предполагалось $u_{max} \approx 0{,}75$, что приблизительно соответствует случаю синхрофазотрона на 10 Бэв.Для синхрофазстрона на 10 Бэв параметр

$$r = 1{,}8\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{d_2}\sqrt{\frac{dn}{dr}R_s}, \qquad R_s\frac{dn}{dr} \approx 1,\quad \frac{\Delta H(\theta)}{H} < 10^{-2},\quad \Delta n(\theta) \lesssim 10^{-2},\quad а\ \Delta n'(\theta)R_s$$

может быть $\approx 10^{-1}$ и более.

Поэтому основной вклад в амплитуду второй гармоники возмущения d_2 будет вносить член $\Delta n'(\theta)R_s$. Для приведенного значения этой величины $r \lesssim 2\cdot 10^{-2}$, и при $R_1 = R_s$ потери частиц могут превышать 70% (см. рис.4).

Как видно, при совпадении положения резонанса с равновесным радиусом действие резонанса $\nu_x = \frac{2}{3}$ может привести к уменьшению интенсивности в несколько раз. В случае же, когда $R_1 \neq R_s$ потери будут меньше, а действие резонанса может проявиться в сокращении азимутального размера ускоряемого сгустка, так как в этом случае потери идут только из внешней области сепаратрисы.

Литература

1. М.С.Рабинович. Труды ФИАН, X (1958).
2. Cosmotron Monthly Progress Report, March 28, (1962).
3. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, (1962).
4. Н.Н.Боголюбов и Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 июня 1963 г.

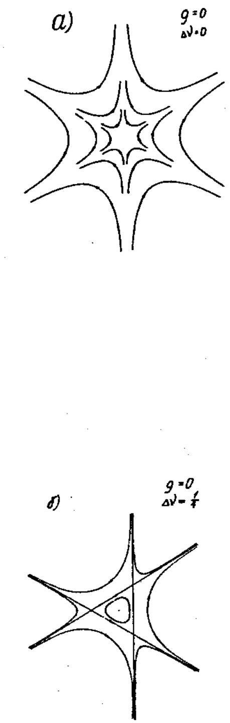

Рис.1. Фазовые траектории вблизи резонанса.

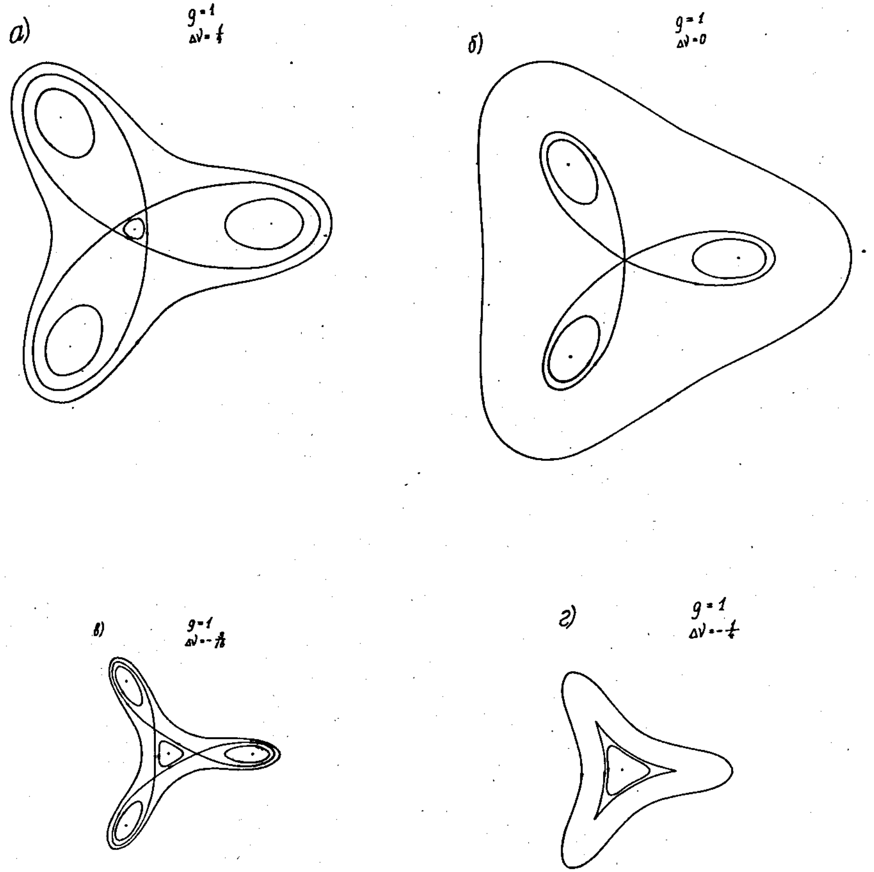

Рис. 2. Фазовые траектории вблизи резонанса.

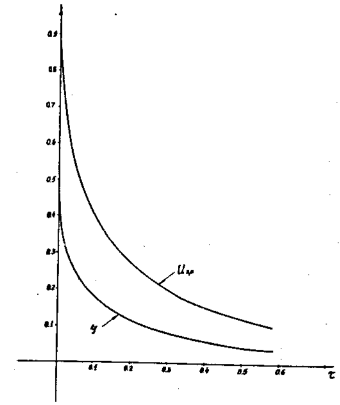

Рис. 3. Вид функций $G(r)$ и $u_{\text{гр}}(r)$.

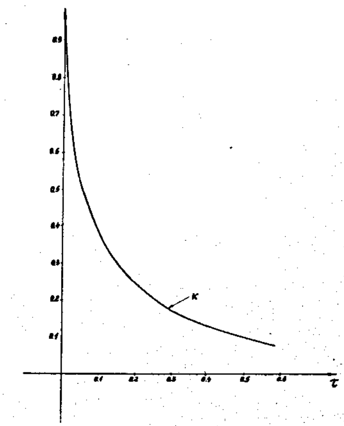

Рис. 4. Коэффициент потерь в зависимости от r.