



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Э.Г. Бубелев

P-1320

ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ
ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО
НА ЕВКЛИДОВУ ПОЛОСУ
К КИНЕМАТИКЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

*Acta Phys. Polonica, 1964, v 26,
n 2, p. 279-305.*

Дубна 1963

Э.Г. Бубелев

P-1320

20871, чз

ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ
ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО
НА ЕВКЛИДОВУ ПОЛОСУ
К КИНЕМАТИКЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1983

§ I. ВВЕДЕНИЕ

Исследование взаимодействий частиц высокой энергии требует анализа кинематики таких взаимодействий. Особенно просто и наглядно кинематика релятивистских частиц выглядит в образах пространства скоростей^{/1/}.

Пространство скоростей является пространством Лобачевского с радиусом кривизны, с точностью до мнимой единицы равным скорости света c ^{/1-3/}. Кинематика релятивистских частиц в образах этого пространства впервые сформулирована и подробно рассмотрена Н.А.Черниковым^{/1,4,5/}. Геометрическое истолкование релятивистской кинематики помогает найти простые и наглядные графические методы решения различных кинематических задач. Так, Черниковым совместно с Майковым предложен графический метод решения задачи о столкновении двух частиц, использующий конформное отображение пространства Лобачевского на внутренность евклидовой сферы^{/6/}.

В настоящей работе рассматривается графический метод анализа кинематики реакций между частицами высокой энергии, основанный на конформном отображении плоскости Лобачевского на евклидову полосу. С помощью этого отображения получена наглядная диаграмма скоростей частиц, участвующих в реакции. Эта диаграмма позволяет выявлять характерные особенности кинематики множественного образования частиц при любой энергии первичной частицы и проводить анализ таких особенностей. Она позволяет также с помощью подвижной координатной сетки графически решать задачи, часто встречающиеся в физике частиц высокой энергии: осуществлять Лоренцовы преобразования импульсов и углов вылета частиц, строить гистограммы угловых и импульсных распределений частиц и т.д.^{x)}

Приведем некоторые сведения о пространстве скоростей, облегчающие освоение используемых здесь геометрических образов. Точка пространства скоростей представляет скорость частицы с ненулевой массой покоя (или инерциальной системы отсчета). Относительная скорость двух частиц (или систем отсчета) v связана с расстоянием z между соответствующими точками пространства скоростей соотношением

$$v = c \cdot th \frac{z}{c}, \quad (I)$$

^{x)} Основные результаты этой работы доложены в феврале 1961г. на семинаре в Физическом институте АН СССР им. П.Н. Лебедева и в марте 1962 г. — на семинаре ЛВЗ ОИЯИ

где c - скорость света. Расстояние z имеет размерность скорости (velocity), но в отличие от нее называется быстротой (rapidity) ^{x)}. Быстроты складываются по формуле треугольника Лобачевского

$$ch \frac{z_2}{c} = ch \frac{z_1}{c} ch \frac{z_{12}}{c} - sh \frac{z_1}{c} sh \frac{z_{12}}{c} \cos \theta_1, \quad (2)$$

где z_1 и z_{12} - стороны, прилежащие к углу θ_1 , а z_2 - противолежащая ему сторона (рис. I).

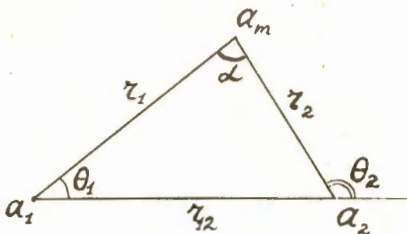


Рис. I. Треугольник в пространстве скоростей для частицы с $m > 0$.

Эта формула совпадает с формулой для Лоренц-фактора частицы $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ в движущейся системе отсчета, если иметь в виду вытекающие из (I) соотношения

$$ch \frac{z}{c} = \gamma = E/mc^2; \quad sh \frac{z}{c} = \beta\gamma = p/mc. \quad (I')$$

Как расстояние в пространстве скоростей, быстрота z аддитивна, в чем нетрудно убедиться, рассматривая формулу (2) при $\theta_1 = 0$. Поэтому она во многих отношениях является более удобной кинематической характеристикой, чем относительная скорость v или Лоренц-фактор γ , которые складываются по соответствующим формулам Лоренцевых преобразований.

§ 2. Отображение плоскости в пространстве скоростей на евклидову полосу

Распределение в пространстве скоростей вторичных частиц, образовавшихся при взаимодействии первичных частиц высокой энергии, обычно имеет сигарообразный вид с осью, проходящей через точки-скорости сталкивающихся частиц. Вытянутость распределения вдоль оси облегчает выявление и анализ его характерных особенностей. Поэтому для графического анализа кинематики множественного образования частиц нужен такой евклидов образ распределения

x) Это название предложено А.А.Роббом и цитируется Варичаком /8/.

частиц в пространстве скоростей, который бы сохранял неизменной быстроту вдоль оси распределения. Азимутальная симметрия распределения вторичных частиц в струях высокой энергии^{9/} позволяет свести трехмерное распределение к двумерному, не нарушая его характерных особенностей. Это делается с помощью свертки распределения по азимутальному углу вокруг его оси на полуплоскость. Поэтому в нашей задаче можно ограничиться евклидовым образом азимутальной плоскости пространства скоростей, проходящей через ось распределения частиц. Эту ось будем в дальнейшем называть базовой прямой.

Введем на азимутальной плоскости следующие координаты точки - скорости α : продольную быстроту $r_{||}$ - расстояние вдоль базовой прямой от начала координат до основания перпендикуляра, опущенного на нее из точки, и поперечную быстроту r_{\perp} - расстояние от точки до базовой прямой (рис.2а). Рассмотрим отображение этой плоскости, являющейся плоскостью Лобачевского, на евклидову полосу с декартовыми координатами η и ξ (рис.2б), которое осуществляется преобразованием поперечной быстроты с помощью функции Лобачевского $\Pi(\frac{r_{\perp}}{c}) = 2 \operatorname{arctg} e^{-r_{\perp}/c}$:

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \Pi\left(\frac{r_{\perp}}{c}\right); \quad \eta = \frac{r_{||}}{c}. \quad (3)$$

Это отображение конформно, то есть сохраняет углы между кривыми, что следует из вида метрики плоскости Лобачевского в координатах η и ξ

$$dr^2 = dr_{\perp}^2 + ch^2 \frac{r_{\perp}}{c} dr_{||}^2 = c^2 ch^2 \frac{r_{\perp}}{c} (d\xi^2 + d\eta^2). \quad (4)$$

Отметим, что оно является единственным конформным отображением плоскости Лобачевского на евклидову полосу^{х)}.

В трехмерном случае теорема Лиувилля ограничивает конформные отображения пространства Лобачевского на часть евклидова пространства только сферическими отображениями, переводящими сферы пространства Лобачевского в евклидовы сферы. Это известные отображения Пуанкаре пространства Лобачевского на внутренность евклидовой сферы^{хх)} и на евклидову

х) Если совершить преобразование (3) в трехмерном случае, не изменяя азимутального угла φ , $\xi = \frac{\pi}{2} - \Pi(\frac{r_{\perp}}{c})$, $\eta = \frac{r_{||}}{c}$, $\varphi = \varphi$, то плоскость пространства Лобачевского, перпендикулярная к базовой прямой, конформно отобразится на евклидову полусферу, или Риманову плоскость, так как ее метрика в координатах ξ и φ имеет вид:

$$dr^2 = dr_{\perp}^2 + c^2 sh^2 \frac{r_{\perp}}{c} d\varphi^2 = c^2 ch^2 \frac{r_{\perp}}{c} (d\xi^2 + \sin^2 \xi d\varphi^2).$$

хх) Это отображение в приложении к релятивистской кинематике рассмотрено в работе /6/.

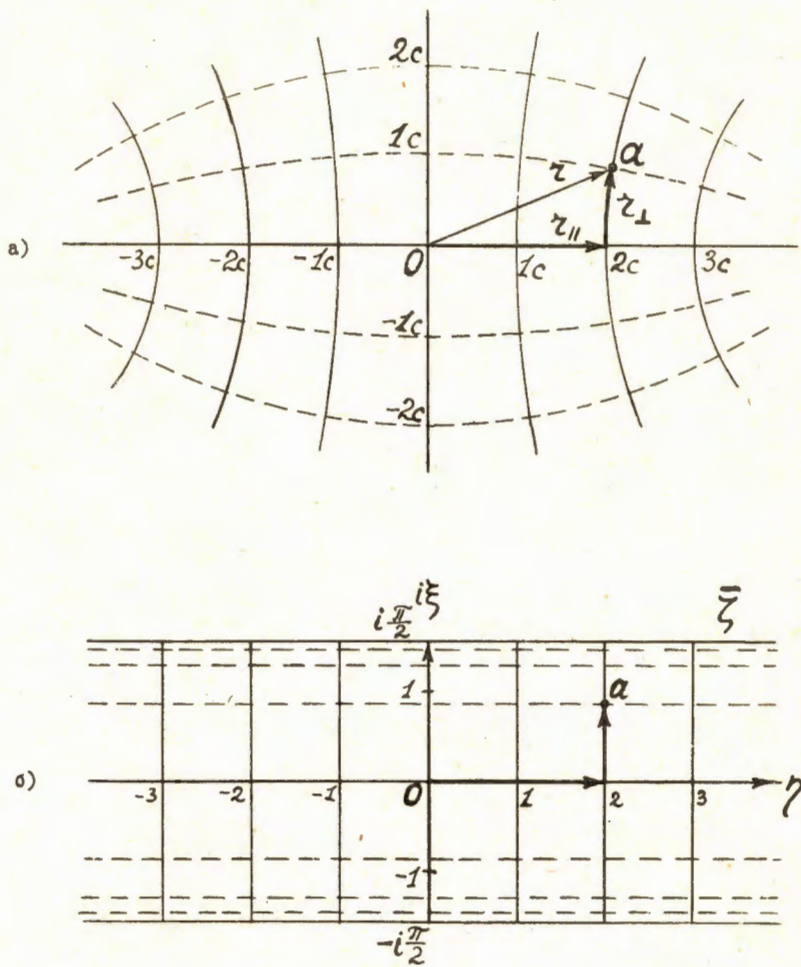


Рис. 2. а) Плоскость Лобачевского с гиперболической координатной сеткой и б) её конформное отображение на евклидову полосу.

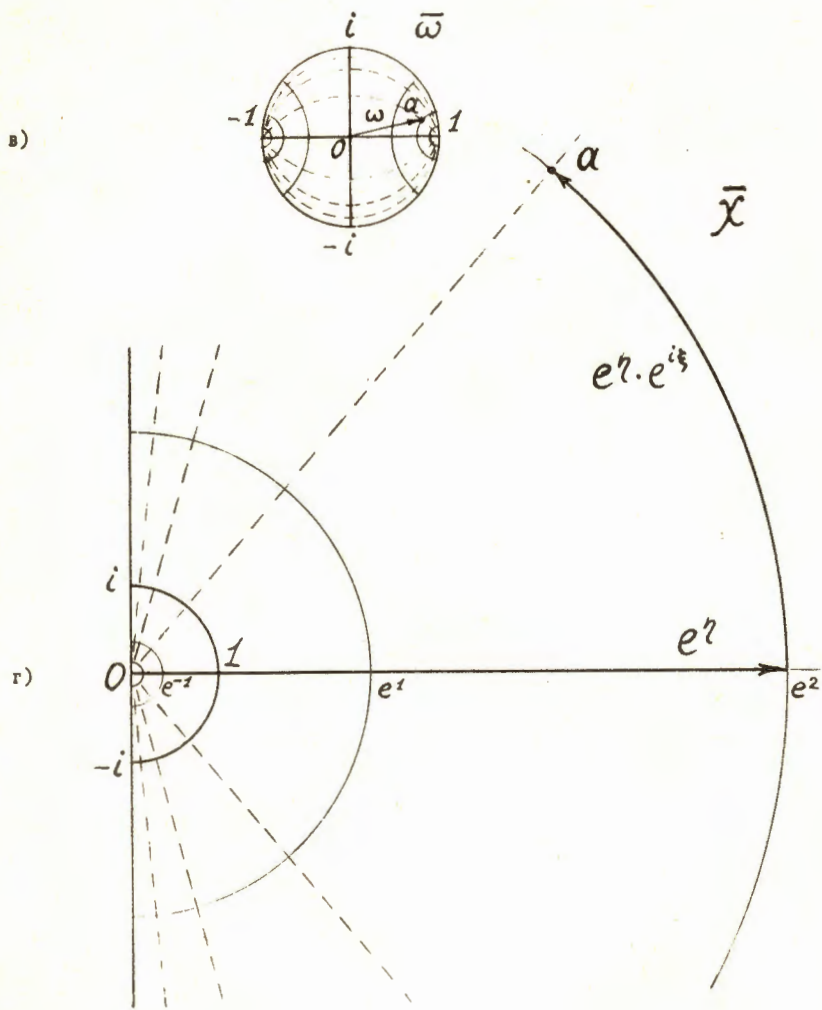


Рис.2. Конформные отображения плоскости Лобачевского на евклидовой плоскости:
 в) на единичный круг, г) на полуплоскость.

полупространство. Отображения Пуанкаре плоскости Лобачевского соответственно на евклидовы круг и полуплоскость связаны с отображением ее на евклидову полосу конформными преобразованиями, которые осуществляются известными аналитическими функциями комплексного переменного $\bar{z} = \eta + i\xi$, заданными на полосе /10/ (рис.2 б, в, г).

$$\bar{w} = th \frac{\bar{z}}{2} \quad - \text{ для отображения на круг и} \quad (5)$$

$$\bar{x} = e^{\bar{z}} \quad - \text{ для отображения на полуплоскость.}$$

Преобразование (3) переводит гиперболический пучок прямых на плоскости Лобачевского, перпендикулярных к базовой прямой, в отрезки параллельных прямых на евклидовой полосе, а семейство ортогональных к ним эквидистант к базовой прямой - в пучок параллельных ей евклидовых прямых. Отсюда следует замечательное свойство рассматриваемого отображения - инвариантность его относительно движений вдоль базовой прямой. Как известно, движения в пространстве Лобачевского изоморфны преобразованиям Лоренца. /11/ Таким образом, Лоренцовыми преобразованиями кинематических характеристик частицы при переходе от одной системы отсчета к другой, точки-скорости которых лежат на базовой прямой, соответствует перенос начала координат вдоль базовой прямой на евклидовой полосе. Это свойство существенно используется в дальнейшем.

Отметим, что верхняя и нижняя границы полосы и бесконечно удаленные концы базовой прямой являются евклидовым образом абсолюта азимутальной плоскости. Точки этого образа изображают скорости частиц с нулевой массой покоя.

§ 3. Диаграмма скоростей и координатная сетка

Скорости частиц, участвующих в реакции, изображаются на верхней половине евклидовой полосы совокупностью точек, которую назовем диаграммой скоростей для данной реакции (рис.4, стр.19). Диаграмма скоростей является евклидовым образом свернутого по азимутальному углу на полуплоскость распределения частиц в пространстве скоростей. Построение и анализ диаграммы скоростей, а также графическое решение некоторых задач релятивистской кинематики выполняются с помощью криволинейной координатной сетки, которая является евклидовым образом полярной координатной сетки на азимутальной полуплоскости с полюсом на базовой прямой.

Уравнения лучей и ортогональных к ним полуокружностей полярной сетки в координатах $\tau_{||}$ и τ_{\perp} вытекают из формул для прямоугольного треугольника Лобачевского /12/ :

$$th \frac{\tau_{\perp}}{c} / sh \frac{\tau_{||}}{c} = tg \theta = const \quad - \text{ для лучей,} \quad (6a)$$

$$ch \frac{z_1}{c} = ch \frac{z_2}{c} = ch \frac{z}{c} = const \quad - \text{ для полуокружностей. (6б)}$$

Конформное преобразование (3) переводит эту сетку в криволинейную ортогональную сетку с началом в точке на базовой прямой. Лучи переходят в изоклины $\theta = const$, описывающиеся в декартовых координатах η и ξ на полосе уравнением

$$sh \eta = ctg \theta \cdot \sin \xi = sh \eta_0 \cdot \sin \xi, \quad (7a)$$

где η_0 - абсцисса точки пересечения изоклины с верхней границей полосы. Полуокружности переходят в изобистроты $z = const$, описывающиеся уравнением

$$ch \eta = ch \frac{z}{c} \cdot \cos \xi = ch \eta_z \cdot \cos \xi, \quad (7б)$$

где η_z - абсцисса точки пересечения изобистроты с базовой прямой. Для удобства изоклины и изобистроты следует провести с равномерным по η_0 и η_z шагом (рис. 4а на стр. 19).

Изоклина - это геометрическое место точек на полосе, изображающих скорости частиц, которые характеризуются одинаковым углом между направлением их скорости и базовой прямой в системе отсчета, скорость которой изображается началом координатной сетки. Изобистрота - это геометрическое место точек на полосе, изображающих скорости частиц, которые в той же системе отсчета имеют одинаковую быстроту z или импульс p в единицах mc ($\frac{p}{mc} = sh \frac{z}{c}$).

Отметим, что при $\eta > 2,3$ уравнения (7) с точностью $\delta \eta \approx e^{-2\eta} < 0,01$ совпадают с уравнениями образов прямых азимутальной плоскости, параллельных базовой прямой, и ортогональных к ним кривых, которые называются орициклами:

$$|\eta_0 - \eta| \approx \Delta \eta = - \ln \sin \xi, \quad (8a)$$

$$|\eta_z - \eta| \approx \Delta \eta = - \ln \cos \xi = - \ln \sin \left(\frac{\pi}{2} - \xi \right). \quad (8б)$$

Отсюда видно, что отрезки изоклин и изобистрот в области $\eta > 2,3$ совпадают при параллельном переносе вдоль базовой прямой^{х)} и симметричны относительно средней линии на полосе $\xi = \frac{\pi}{4}$, $-\infty < \eta < \infty$. При вычерчивании их можно использовать шаблон, что существенно облегчает построение криволинейной координатной сетки.

х) Это свойство изоклин и изобистрот в области $\eta > 2,3$ обусловлено тем, что лучи и окружности полярной сетки на азимутальной плоскости в области, далекой от полюса, с указанной точностью совпадают с прямыми параболического пучка, сходящимися в бесконечно удаленной точке, и ортогональными к ним орициклами; эти орициклы конгруэнтны. /12/

Из уравнений (7) видно, что на верхней границе полосы $\xi = \frac{\pi}{2}$, $-\infty < \eta < \infty$ удобно расположить шкалу угла θ , которая задается функцией, обратной функции Лобачевского,

$$\eta_{\theta} = \Pi^{-1}(\theta) = gd^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^x \quad (9)$$

и шкалы тригонометрических функций угла, например,

$$\eta_{\cos\theta} = \text{Arth}(\cos\theta); \quad \eta_{\text{tg}\theta} = \text{Arsh}\left(\frac{1}{\text{tg}\theta}\right). \quad (9')$$

Вдоль базовой прямой $\xi = 0$, $-\infty < \eta < \infty$ удобно расположить шкалу быстроты γ

$\eta_{\gamma} = \frac{\gamma}{c} = \rho$, а также шкалы других связанных с нею кинематических характеристик — Лоренц-фактора частицы (или системы отсчета) γ :

$$\eta_{\gamma} = \text{Arch}\gamma \quad (10)$$

и импульса p частицы с массой покоя m :

$$\eta_p = \text{Arsh}\frac{p}{mc}. \quad (10')$$

Если одновременно рассматриваются частицы разных масс с импульсами, заданными в единицах Гэв/с, то необходимо иметь соответствующее число шкал импульса, которые можно расположить одну под другой.

Координатная сетка со шкалами используется при построении диаграммы скоростей по заданным в лабораторной системе импульсам и углам вылета частиц относительно выделенного направления. Эта процедура описана в приложении I.

§ 4. Графическое решение простейших задач релятивистской кинематики

А. ЛОРЕНЦОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УГЛА ВЫЛЕТА И ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ С МАССОЙ $m > 0$

Благодаря инвариантности диаграммы скоростей относительно параллельных переносов (см. § 2), Лоренцовы преобразования импульса (или энергии) и угла вылета частицы с массой $m > 0$ сводятся к переносу начала отсчета на диаграмме вдоль базовой прямой из одной точки в другую, которые изображают скорости обеих систем отсчета и отстоят друг от друга на расстоянии

х) Это обозначение обратной функции позаимствовано из таблиц /13/, где имеются таблицы гудерманиана, дополняющего до $\pi/2$ функций Лобачевского для угла параллельности θ
 $\theta = \Pi(\eta) = \frac{\pi}{2} - gd\eta$, и обратной ему функции $\eta = gd^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

$$\eta_{12} = \frac{v_{12}}{c} = \text{Arch } \gamma_{12} = \text{Arth } \frac{v_{12}}{c},$$

где γ_{12} и v_{12} - относительные Лоренц-фактор и скорость систем отсчета (рис.1). Нанесение точки-скорости a_m частицы с заданными в системе отсчета i импульсом и углом вылета относительно направления \vec{v}_{12} и определение импульса и угла вылета частицы в системе отсчета 2 производится с помощью координатной сетки, как указано в приложении П.А. Возле точки-скорости частицы на диаграмме скоростей можно указать окрестность, соответствующую ошибкам в измерении её импульса и угла вылета в лабораторной системе (ЛС). Это позволяет определить в другой системе отсчета верхний и нижний пределы для ее импульса и угла вылета, соответствующие ошибкам в ЛС.

Б. ЛОРЕНЦОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УГЛА ВЫЛЕТА И ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦЫ С МАССОЙ $m = 0$

Лоренцовы преобразования угла вылета фотона (или нейтрино) по отношению к направлению \vec{v}_{12} осуществляются аналогично случаю $m > 0$. Отличие состоит в том, что точка-скорость фотона (нейтрино) лежит на верхней границе диаграммы скоростей и для ее нанесения достаточно знать только угол вылета фотона (нейтрино) θ_1 в системе отсчета 1 (см.приложение П.А).

Аналитически преобразование угла вылета фотона (нейтрино) выражается простой формулой

$$\Pi^{-1}(\theta_1) - \Pi^{-1}(\theta_2) = \frac{v_{12}}{c}, \quad (\text{II})$$

вытекающей из рассмотрения вырожденного треугольника $a_1 a_2 a_3$ в пространстве скоростей, бесконечно удаленная вершина которого a_3 является точкой-скоростью фотона (нейтрино), и перпендикуляра к прямой $a_1 a_2$ параллельного сторонам треугольника $a_1 a_1'$ и $a_2 a_2'$ (рис.3); a_1 и a_2 - скорости систем отсчета 1 и 2, $\theta_1 = \Pi(\frac{a_1 b}{c})$, $\theta_2 = \Pi(\frac{a_2 b}{c})$; углы параллельности для отрезков $a_1 b$ и $a_2 b$.

Лоренцовы преобразования импульса фотона (нейтрино) можно записать с учетом (I') в виде:

$$p_2 = p_1 \left(\text{ch } \frac{v_{12}}{c} - \text{sh } \frac{v_{12}}{c} \cos \theta_1 \right), \quad (\text{I2})$$

где v_{12} - относительная быстрота систем отсчета 1 и 2 (см. также /8/, стр.50 и 59).

При фиксированных p_1 и p_2 : $p_2 = p_1$ и $p_2 \neq p_1$; формула (I2) совпадает с уравнениями орисфер в пространстве скоростей с осью $a_2 a_2'$, проходящих соответственно через точки a_1 и a_2 , в полярных координатах v_{12} , θ и φ ($\varphi = 0 \div 2\pi$).

Эти орисферы пересекают ось $a_1 a_1'$ в точках a_1 и a_2' так что

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-\frac{1}{c}(\vec{e} \cdot \vec{a}_1 \vec{a}_2')}, \quad (12')$$

где \vec{e} - единичный вектор с началом в точке a_1 , направленный по лучу $a_1 a_1'$. Лобачевский показал, что подобные дуги S_1 и S_2 на соосных орисферах связаны с расстоянием l_{12} между ними соотношением

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{-\frac{l_{12}}{c}}.$$

Отсюда следует полезное для приложений правило: значения импульсов фотона (нейтрино) в двух системах отсчета относятся как длины подобных дуг на орисферах с центром в точке - скорости фотона (нейтрино), проходящих через точки-скорости систем отсчета (рис.3).

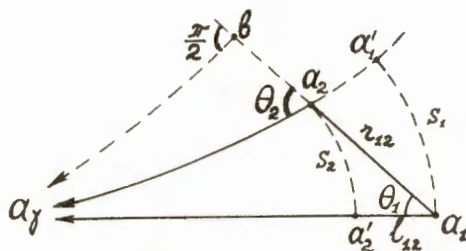


Рис. 3. Треугольник в пространстве скоростей для частицы с $m = 0$.

На диаграмме скоростей образы орициклов, по которым плоскость треугольника $a_1 a_2 a_1'$ пересекает указанные орисферы, совпадают с изобистротами координатной сетки в области $\eta > 2,3$, когда точки - скорости фотона (нейтрино) a_1 и системы отсчета a_2 , в которой задан импульс p_2 , лежат на базовой прямой, а начало координат направлено в сторону точки a_1 . Тогда расстояние l_{12} в единицах скорости света c равно отрезку базовой прямой между точкой a_1 и точкой a_2' пересечения её с изобистротой, проходящей через точку-скорость второй системы отсчета a_2 . Используя логарифмическую асимптотку шкалы импульсов,

$\eta_p \approx \ln 2 + \ln \frac{p}{mc}$ с точностью $\delta \eta = e^{-2\eta_p} < 0,01$ при $\eta_p > 2,3$ и зная расстояние l_{12} , нетрудно определить величину p_2 импульса фотона (нейтрино) во второй системе отсчета по величине его импульса p_1 в первой системе, так как

$$\ln p_1 - \ln p_2 = \frac{l_{12}}{c} \approx \eta_{p_1} - \eta_{p_2} \quad \text{при} \quad \eta_{p_{1,2}} > 2,3.$$

Выполняемые при этом построения на диаграмме скоростей подробно описаны в приложении п.Б.

В. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНОГО ИМПУЛЬСА ЧАСТИЦ

Поперечный импульс частицы с массой $m > 0$ по отношению к выделенному направлению, относительно которого определен ее угол вылета θ , согласно (1') и формуле для прямоугольного треугольника в пространстве скоростей равен

$$\frac{P_{\perp}}{mc} = \frac{P}{mc} \sin \theta = sh \frac{z}{c} \sin \theta = sh \frac{z_{\perp}}{c},$$

где z_{\perp} - катет, противолежащий углу θ . Если выделенное направление совмещено с базовой прямой, то $sh \frac{z_{\perp}}{c} = tg \xi$, где ξ - ордината точки-скорости частицы на диаграмме скоростей. Отсюда вытекает уравнение функциональной шкалы поперечных импульсов

$$\xi_{P_{\perp}} = \arctg \frac{P_{\perp}}{mc}$$

на изоклине $\theta = 90^{\circ}$ координатной сетки (рис. 4а). С помощью этой шкалы определяются поперечные импульсы частиц в единицах mc по ординатам их точек-скоростей на диаграмме (см. приложение II В).

Г. ПОСТРОЕНИЕ УГЛОВЫХ И ИМПУЛЬСНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ДВИЖУЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЁТА

Инвариантность диаграммы скоростей относительно параллельных переносов позволяет быстро строить гистограммы углового распределения любых частиц и импульсного распределения частиц с массой $m > 0$ в любой системе отсчета, точка-скорость которой лежит на базовой прямой. Для этого достаточно подсчитать число частиц, попадающих в равные интервалы $\cos \theta$ (или импульса) между изоклинами (изобистротами) гистограммной координатной сетки, когда её начало совмещено с точкой-скоростью интересующей нас системы отсчета на базовой прямой. Изоклины и изобистроты гистограммной сетки проводятся с равномерным по $\cos \theta$ и $\frac{P}{mc}$ (или по p в Гэв/с для определенного сорта частиц) шагом согласно параметрическим уравнениям в декартовых координатах η и ξ :

$$\begin{aligned} sh \eta &= sh (Arth \cos \theta) \cdot \sin \xi && \text{- для изоклин,} \\ ch \eta &= ch (Arsh \frac{P}{mc}) \cdot \cos \xi && \text{- для изобистрот.} \end{aligned} \quad (7')$$

С помощью обычной координатной сетки можно строить идеограммы угловых (и импульсных) распределений, определяя для каждой частицы величину угла (импульса) и ее разброс (см. пункта).

Д. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ПЕРЕДАННОГО 4- ИМПУЛЬСА

Зная положение на диаграмме точек-скоростей частицы a_{-1} и a_1 до и после её взаимодействия с другими частицами, участвующими в реакции, можно определить модуль 4-импульса, переданного частице в результате этого взаимодействия, $q = \sqrt{\Delta p^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \vec{p}}{c}\right)^2 - \left(\frac{\Delta E}{c^2}\right)^2}$.

Он равен изменению импульса частицы в системе отсчета 0 , где $\Delta E = 0$, а импульс частицы изменяет своё направление на противоположное. Если масса частицы не изменилась в результате взаимодействия $m_{-1} = m_1$, то скорость этой системы отсчета a_0 делит отрезок $a_{-1}a_1$ в пространстве скоростей пополам и инвариант q равен:

$$q = 2 \left(m_{-1} \operatorname{sh} \frac{\overline{a_{-1}a_1}}{2c} \right) = 2 p_{01} / c. \quad (13)$$

Если в результате взаимодействия частица перешла в возбужденное состояние с массой $m_1 > m_{-1}$, то скорость a_0 системы отсчета 0 делит отрезок $a_{-1}a_1$ так, что

$$m_{-1} \operatorname{ch} \frac{\overline{a_{-1}a_0}}{c} = m_1 \operatorname{ch} \frac{\overline{a_0a_1}}{c} \quad \text{и}$$

$$q = m_{-1} \operatorname{sh} \frac{\overline{a_{-1}a_0}}{c} + m_1 \operatorname{sh} \frac{\overline{a_0a_1}}{c} = (p_{0(-1)} + \frac{m_1}{m_{-1}} p_{01}) / c. \quad (14)$$

Положение точки a_0 и величина q определяются графически с помощью шкал Лоренц-фактора и импульса для частицы с массой m_{-1} (см. приложение II Д).

Е. ТОЧНОСТЬ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Используя вытекающее из (4) и (3) соотношение между дифференциалами длин дуг на азимутальной плоскости в пространстве скоростей dr и на евклидовой полосе $d\zeta$

$$M = \frac{dr}{d\zeta} = c \operatorname{ch} \frac{r_{\perp}}{c} = \frac{c}{\cos \xi}, \quad (15)$$

нетрудно получить выражение для относительной ошибки в импульсе $\delta_p^r = \frac{\Delta p}{p}$, обусловленной неточностью в определении положения точки-скорости частицы на изоклине $\Delta \zeta_p$,

$$\delta_p^r = \frac{d}{d\zeta_p} \ln \operatorname{sh} \frac{r(\zeta_p)}{c} \Delta \zeta_p = \frac{c}{v} \frac{\Delta \zeta_p}{\cos \xi}, \quad (16)$$

где v - относительная скорость частицы в системе отсчета, изображаемой началом координат, ξ - ордината точки-скорости частицы на диаграмме. Аналогичное выражение для относительной ошибки в угле $\delta_\theta = \frac{\Delta\theta}{\theta}$, обусловленное неточностью в определении положения точки-скорости частицы на изобистроте $-\Delta\zeta_\theta$, легко получить, используя выражение для длины дуги окружности радиуса ζ на азимутальной плоскости $\Delta\zeta = c \operatorname{sh} \frac{\zeta}{c} \Delta\theta = c \operatorname{sh} \frac{\zeta}{c} \frac{\Delta\theta}{\sin\theta}$:

$$\delta_\theta = \frac{\sin\theta}{\theta} \cdot \frac{\Delta\zeta_\theta}{\sin\xi} \quad (16')$$

Из (16) и (16') видно, что точность определения импульса резко ухудшается вблизи верхней границы диаграммы скоростей ($\xi \rightarrow \pi/2$), а точность определения угла - вблизи базовой прямой ($\xi \rightarrow 0$). Из приведенных на рис. 4 диаграмм скоростей частиц в струях видно, что большинство точек-скоростей располагается в области $0,3 \lesssim \xi \lesssim 1,3$, чему соответствует $1,2 \lesssim \frac{1}{\cos\xi}, \frac{1}{\sin\xi} \lesssim 4$. Оценим точность графического решения задачи δ , считая, что обычно $v \sim c$ и $\frac{\sin\theta}{\theta} \sim 1$. Она складывается из точности нанесения на диаграмму точки-скорости частицы, точности построений и точности считывания результата,

$$\delta \approx 3\delta_{p,\theta} \approx (3,6 \div 12) \Delta\zeta_{p,\theta} = (3,6 \div 12) \frac{\Delta l \text{ (мм)}}{L \text{ (мм)}},$$

где Δl - точность положения точки на диаграмме, а L - масштабная единица. Задаваясь $\Delta l = \pm 0,5$ мм (с учетом точности построения координатной сетки) при $L = 100$ мм, получим удовлетворительную точность $\delta \approx 2 \div 6\%$.

§ 5. Анализ кинематики множественного образования мезонов

Рассмотрим диаграмму скоростей струи частиц, образовавшихся при взаимодействии нуклонов высокой энергии. Точки, изображающие скорости мезонов, наносятся на нее по величине их углов вылета θ_i и импульсов p_i в лабораторной системе отсчета (ЛС), как указано в приложении I. Если угол вылета или импульс частицы измерен ненадежно, то её точку-скорость наносим с отрезком соответственно изобистроты или изоклины, который изображаем пунктиром (рис. 4 б, в). Скорости нуклонов до взаимодействия изображаются белыми кружками на базовой прямой: один - в начале отсчета, другой - справа от него на расстоянии $\eta_0 = \frac{v_0}{c} = A \operatorname{tch} \chi_0$, где χ_0 - относительный Лоренц-фактор нуклонов до взаимодействия. Точка-скорость системы центра масс сталкивающихся нуклонов C_N делит это расстояние пополам (рис. 4 б, в). Скорости нуклонов после взаимодействия изображаются на базовой прямой черными кружками с отрезками проходящих через них изобистрот с центрами в точках-скоростях ЛС и системы покоя налетающего нуклона $\tilde{ЛС}$, соответственно. Их положение задается изменением в результате взаимодействия продольной быстроты нуклонов в единицах $c \Delta\eta_{1,2} = \frac{\Delta v_{1,2}}{c}$, связанным с коэффи-

коэффициентом неупругости соответствующего нуклона в системе покоя другого нуклона $K_{1,2}$ ^{х)}
соотношением

$$\Delta \eta_{1,2} \approx -\ln(1 - K_{1,2}). \quad (17)$$

Это соотношение вытекает из формулы (12) и выполняется для нуклонов с точностью $\delta_{1,2} =$
 $= [2\gamma_0(1 - K_{1,2})]^{-2} \approx 0,01$ при $\gamma_0(1 - K_{1,2}) \approx 5$ (или $\eta_0 - \Delta\eta \approx 2,3$).

Диаграмма скоростей тесно связана с $\lg \operatorname{tg} \theta$ диаграммой, используемой для анализа струй частиц высокой энергии. Эта связь обусловлена логарифмической асимптотикой шкалы тангенсов углов, расположенной на верхней границе диаграммы скоростей:

$$\eta_\theta = \operatorname{Arsh}(\operatorname{tg} \theta) \approx \ln 2 - \ln \operatorname{tg} \theta \quad (\text{с ошибкой } \delta\eta = e^{-2\eta} \approx 0,01) \quad (18)$$

в области $\eta_\theta \approx 2,3$ (или $\theta \leq 12^\circ$). Таким образом, $\lg \operatorname{tg} \theta$ - диаграмма с точностью до масштабного множителя $\ln 10$ и аддитивной постоянной дает значения продольных быстрот в единицах скорости света c $\eta_\theta = \frac{v_i}{c}$ для частиц струи, вылетающих под углами $\theta \leq 12^\circ$, если считать, что их скорости в ЛС равны c . В реальном случае $v_i < c$ и продольная быстрота каждой частицы в единицах c определяется вытекающим из (7а), (3) и (1) соотношением

$$\eta = \operatorname{Arsh}\left(\frac{v_i}{c} \operatorname{tg} \theta\right), \quad (19)$$

где $v_i = c \sin \xi = c \operatorname{th} \frac{\eta_i}{c}$ есть поперечная скорость частицы относительно оси струи. Для $\theta < 12^\circ$ с точностью $\delta\eta = e^{-2\eta} \approx 0,01$

$$\eta \approx \ln 2 - \ln \operatorname{tg} \theta + \ln \frac{v_i}{c}. \quad (19')$$

Используя аддитивность быстроты и логарифмическую асимптотику шкалы Лоренц-факторов

$$\eta_\gamma = \operatorname{Arch} \gamma \approx \ln + \ln \gamma \quad \text{при } \gamma > 5 \quad (20)$$

$(\eta_\gamma > 2,3)$,

получаем известную формулу Кастаньоли для определения Лоренц-фактора γ_c системы центра масс (СЦМ) частиц струи

х) Коэффициент неупругости нуклона мишени определяется по формуле $K_2 = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i}{c} - p_i \cos \theta_i\right)^{1/7}$.

$$\ln \gamma_c = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \operatorname{tg} \theta_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{v_{\perp i}}{c}, \quad (21)$$

где усреднение проводится по всем частицам с $\theta_i < 12^\circ$. Эта формула справедлива в предположении симметрии распределения точек-скоростей на диаграмме относительно перпендикуляра к базовой прямой в точке-скорости СМ частиц. Из (21) видно, что поправка в формуле Кастаньоли, учитывающая угловое и энергетическое распределение частиц в СМ, $U = \exp \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln U(\theta_i, \beta_i)$ имеет смысл средне-геометрической поперечной скорости частиц в единицах c

$U = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{v_{\perp i}}{c} \right) = \frac{v_{\perp}^{\circ}}{c}$. Согласно [14], $U = 0,7$. Из (19) и левой части (20) нетрудно получить аналог формулы Кастаньоли для частиц с любыми углами вылета в ЛС, включая $\theta > 90^\circ$:

$$\operatorname{Arch} \gamma_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \eta_i^{\circ} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \operatorname{Arsh} \left(\frac{0,7}{\operatorname{tg} \theta_i} \right). \quad (21')$$

При этом считаем, что поперечные скорости частиц, вылетающих под углами $\theta > 12^\circ$, близки к средне-геометрической $v_{\perp}^{\circ} \approx 0,7c$. Формула (21') полезна при определении γ_c группы частиц с большими углами вылета, когда неизвестны их импульсы. В этом случае можно быстро определить γ_c с помощью диаграммы скоростей, усредняя абсциссы η_i° точек пересечения изоэлин, соответствующих углам вылета частиц, с прямой $-\infty < \eta < \infty$, $\xi = \arcsin \frac{v_{\perp}^{\circ}}{c} \approx \frac{\pi}{4}$, проходящей практически посередине диаграммы.

Диаграмма скоростей является наглядным образом распределения всех частиц струи, в том числе и нуклонов, в пространстве скоростей, свернутого вокруг оси струи на азимутальную полуплоскость. Она удобна для анализа кинематики струй частиц любой энергии. Масштаб диаграммы скоростей не зависит от продольной скорости $v_{\parallel} = c\eta$. Поэтому особенности структуры струй в пространстве скоростей, не зависящие от энергии, имеют на диаграмме сходный вид, что облегчает их выявление. Сильная зависимость масштаба диаграммы от поперечной скорости v_{\perp}

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{M} = \frac{1}{c \operatorname{ch} \frac{\eta}{c}} = \frac{\cos \xi}{c} \quad (15')$$

не создает при этом затруднений, поскольку средний поперечный импульс мезонов в струях невелик $\frac{P_{\perp}}{mc} = \operatorname{sh} \frac{\eta}{c} \approx 2,1^{1/4}$.

Рассмотрим известные из эксперимента характерные особенности кинематики множественного образования мезонов, которым соответствуют определенные особенности распределения на диаграмме точек, изображающих скорости мезонов и нуклонов струи.

1. Образование одного или двух ^{x)} возбужденных мезонных сгустков (fire balls), распадающихся изотропно в своей системе покоя на π - мезоны со средней энергией $\bar{\epsilon} \approx 0,5$ Гэв /15, 16, 17/. На диаграмме скоростей точки-скорости мезонов от распада такого сгустка обычно занимает серповидную область вблизи изобистроты $\bar{v} = c \operatorname{Arch} \frac{\epsilon}{mc^2} \approx 1,4c$ с центром в точке-скорости системы покоя сгустка C_{π} на базовой прямой, если поперечная скорость сгустка $v_{\perp c}$ близка к нулю (рис. 4 б, в). Характер углового распределения мезонов в C_{π} - системе в этом случае легко установить с помощью сетки изоклин, проведенных с равномерным по $\cos \theta$ шагом (см. § 4 Г). Если сгусток имел значительную поперечную скорость, то точки-скорости мезонов, на которые он распался, расположены более тесной группой и в среднем больше удалены от базовой прямой, чем в случае $v_{\perp c} = 0$ (см., например, правый сгусток на рис. 4б). При этом распределение точек-скоростей мезонов сгустка сохраняет симметрию в среднем относительно перпендикуляра к базовой прямой, проходящего через точку-скорость сгустка, а распределение мезонов сгустка по азимутальному углу должно быть анизотропным.

2. Выделенность нуклонов в процессе мезообразования /19, 16, 17/. На диаграмме скоростей это отражено тем, что точки-скорости нуклонов после взаимодействия значительно удалены от центров мезонных сгустков и мало удалены от их точек-скоростей до взаимодействия, особенно по сравнению с расстоянием между нуклонами до взаимодействия η_0 .

$$\Delta \eta_{1,2} \approx 1 \ll \eta_0 = 6 \div 9.$$

Это соответствует $K_{1,2} \approx 0,6$ и $\gamma_0 = (0,2 + 4,0) \cdot 10^3$ (рис. 4б, в).

3. Возбуждение в ряде случаев одного или обоих /17, 20, 21/ нуклонов, или образование нуклонных изобар. На диаграмме скоростей точки-скорости мезонов, испущенных возбужденным нуклоном, лежат ближе к точке-скорости нуклона, чем к центру ближайшего мезонного сгустка. Причем в системе покоя сгустка такие мезоны имеют аномально большие импульсы и малые углы вылета по отношению к оси струи. Это легко установить с помощью координатной сетки (см. приложение п. А).

Точки-скорости мезона и нуклона от распада изобары N_2 с нулевой поперечной скоростью лежат вблизи изобистрот $v_{\pi} = 1,28c$ и $v_N = 0,24c$ (соответствующих наименьшему значению её массы $M_2 = 1238$ Мэв) на изоклинах θ_1 и θ_2 ($\theta_1 + \theta_2 = \pi$), когда начало координатной сетки совпадает с точкой - скоростью изобары на базовой прямой (рис. 4а).

х) Два сгустка образуются, если импульсы, передаваемые нуклонами мезоногенерирующей системе, в ее системе покоя превышают некоторый критический импульс π - π взаимодействия $|\vec{q}_c| > q_{\text{крит}} \sim Mc$ /18/.

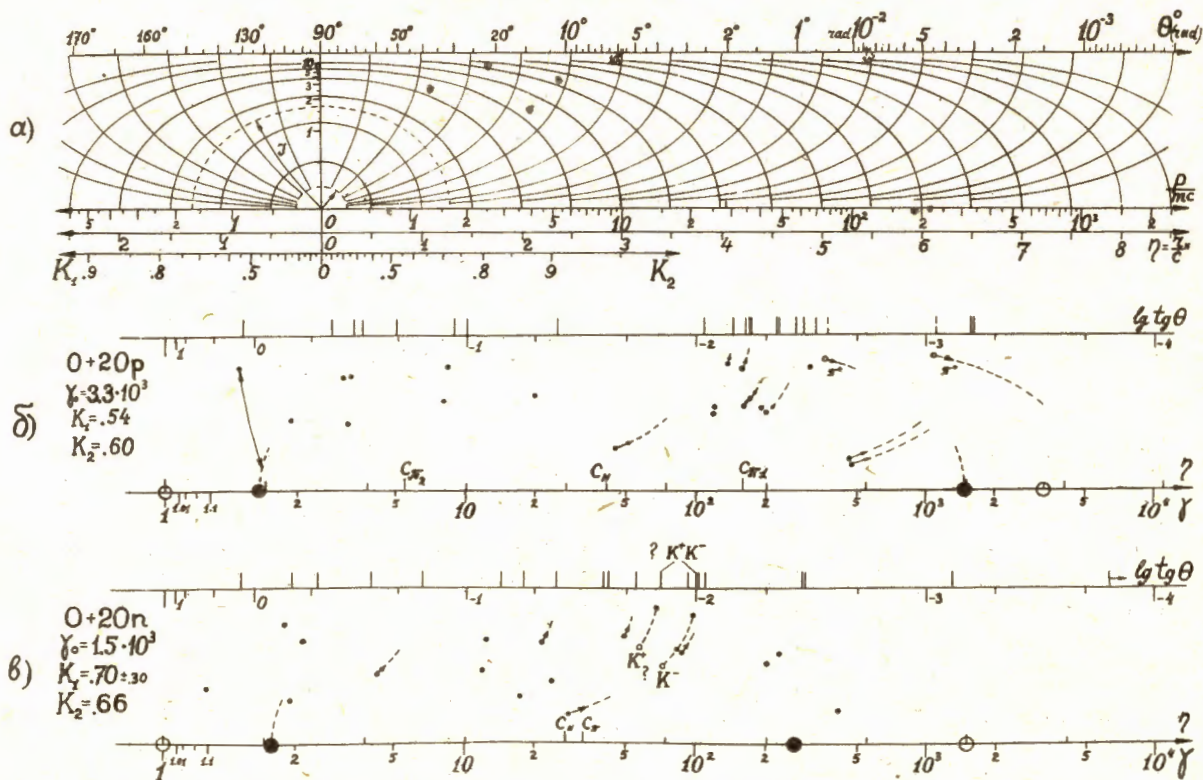


Рис. 4. а) координатная сетка; б), в) диаграммы скоростей для струй 0+20p и 0+20n.

Если изобара имела значительную поперечную скорость, точки-скорости мезона и нуклона в среднем лежат выше и ближе к проходящему через точку-скорость изобары перпендикуляру, чем в предыдущем случае. Аналогичным образом располагаются точки-скорости продуктов распада изобары N_2 с массой $M_2 = 1512$ Мэв; если она распадается по схеме $N_2 \rightarrow \pi + N_1 \rightarrow 2\pi + N_0$, поскольку разности масс $M_2 - M_1 = 274$ Мэв и $M_1 - M_0 = 300$ Мэв близки. Но в этом случае при определении положения точки-скорости изобары N_2 вместо правила $\theta_1 + \theta_2 = \mathcal{N}$ нужно использовать равенство нулю суммы продольных импульсов продуктов ее распада в системе покоя изобары.

Точки-скорости мезонов от распада сильно возбужденных изобар группируются аналогично случаю распада \mathcal{N} - мезонного сгустка (рис. 4 в), причем точка-скорость нуклона располагается вблизи точки-скорости СЦМ мезонов.

Рассмотренные выше особенности множественного образования мезонов хорошо видны на диаграммах скоростей для первичной $0+20p$ и вторичной $0+20n$ струй из работы /14/ (рис. 4 б, в). Анализ некоторых особенностей кинематики этих струй приведен в приложении II в качестве примеров.

В струе $0+20p$ образовались два мезонных сгустка, причем быстрый сгусток - со значительной поперечной скоростью. Нуклон мишени, по-видимому, слабо возбудился, испустив затем заряженный мезон, который вылетел в ЛС под наибольшим углом (см. пример в приложении II А). Налетевший нуклон возбудился гораздо сильнее, поскольку к продуктам распада быстрой изобары можно отнести два заряженных мезона, вылетевших под наименьшими углами в ЛС, и один или оба нейтральных мезона большой энергии. Причем быстрая изобара имеет, по-видимому, значительный поперечный импульс, близкий по величине, но направленный противоположно поперечному импульсу быстрого сгустка. Его можно определить, анализируя азимутальные углы мезонов, образовавшихся при распаде быстрой изобары и быстрого сгустка.

В струе $0+20n$ образовался один мезонный сгусток, точка-скорость которого близка к точке-скорости СЦМ столкнувшихся нуклонов. Оба нуклона сильно возбудились, превратившись в изобары, которые при распаде испустили быстрая три, а медленная пять заряженных \mathcal{N} - мезонов. Точки-скорости нуклонов после взаимодействия близки к точкам-скоростям СЦМ мезонов от распада соответствующих изобар. Массы изобар оценены с помощью координатной сетки только по заряженным продуктам их распада в предположении равенства нулю их поперечной скорости. Они равны $1,55^{+0.33}_{-0.13}$ Гэв/с² для быстрой и $2,26^{+0.15}_{-0.16}$ Гэв/с² для медленной изобар

(рис. 5 и Д, прилож. I и II). Эти значения близки к массам известных изобар $N_3(1,65 \text{ Гэв}/c^2)$

и $N_z (2,36 \text{ Гэв}/c^2) / 22/$. Суммарное угловое распределение мезонов в СЦМ сгустков, образовавшихся в струях $0+20p$ и $0+20n$, близко к изотропному (рис. Г 2, прилож. II).

Более глубокий анализ кинематики струй может быть проведен при учете нейтральных мезонов и азимутальных углов всех частиц.

Следует отметить, что два мезона из сгустка с наибольшими поперечными импульсами $P_{110} = 0,72 \text{ Гэв}/c$ и $P_{110} = 0,50 \text{ Гэв}/c$ и аномально большими энергиями в СЦМ сгустка $\approx 1,4 \text{ Гэв}$, возможно, являются парой K^+K^- мезонов, образовавшейся при распаде мезонного сгустка. Они оба взаимодействуют с ядрами эмульсии, образуя струи: первый - $I+7p$, второй - $I2+20p$, на расстоянии соответственно 7,4 и 4,3 см от точки образования струи $0+20n$. Если считать их K^- мезонами, то на диаграмме скоростей их точки-скорости перемещаются внутрь области, занимаемой точками-скоростями мезонов сгустка, а поперечные скорости оказываются близкими к средней поперечной скорости мезонов сгустка (см. рис.4 в и пример в прилож. II в).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.А.Черникову за многократные обсуждения и ценные советы и сердечно благодарит В.А.Белякова, Н.М.Вирясова и Э.С.Максимова за помощь в техническом оформлении координатной сетки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н.А.Черников . Научные доклады высшей школы, физ.-мат.науки, № 2, 158 (1958).
2. А.П.Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сб. „In memoriam N.I.Lobachevski“, т.2, Казань, 1927, стр. 37-66.
3. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, Москва, 1955 .
4. Н.А.Черников. Кандидатская диссертация, Дубна, 1957 .
5. Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ Р-723, Дубна, 1961 .
6. Е.В.Майков и Н.А.Черников. Научные доклады высшей школы. физ.-мат.науки, № 4, 129 (1958).
Препринт ОИЯИ Р-415, Дубна, 1959 .
7. A.A.Robb. Optical Geometry of Motion, a New View of the Theory of Relativity, Cambridge, 1911.
8. V.Varicak. Darstellung der Relativitätstheorie im dreidimensionalen Lobatschewskij-schen Raume, Zagreb, 1924.
9. А.П.Минахова, Б.А.Никольский. ЖЭТФ, 43, 1213 (1962).
S.Castagnoli, S.Lamborizio, J.Ortalli. Nuovo Cimento, 20, 416 (1961).
10. М.А.Лаврентьев и Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. ГИТТЛ, 1951 .
11. Ф.Клейн. О геометрических основаниях Лоренцовой группы. Сб. „Новые идеи в математике“, вып. 5, стр. 144-174, СПб, 1914.
12. Н.В.Вфимов. Высшая геометрия. ГИТТЛ, 1953 .
13. Л.М.Милл-Томсон и Л.Дж.Комри. Четырехзначные математические таблицы. Физматгиз, 1961 .
14. M.Shein, D.M.Naskin, E.Lohman, M.W.Teucher, Phys. Rev., 116, 1238 (1959).
15. P.Ciolek, T.Coghen, J.Gierula, R.Holynaki, A.Jurak, M.Miesowicz, T.Saniewska, O.Stanisiz, J.Pernegr. Nuov. Cim., 8, 166 , 1238 (1958); 10, 741 (1958).
16. G.Cocconi, Phys. Rev., 111, 1699 (1958).
17. Н.Л. Григоров, В.В.Гусева, Н.А.Добротин, А.М.Лебедев , К.А.Котельников, В.С.Мурзин, И.Д.Раппопорт, С.В.Рябиков, С.А.Славатинский. Труды Международной конференции по космическим лучам, т.1, 140. Изд. АН СССР, М., 1960.
18. Э.Г.Бубелев. Труды Международной конференции по космическим лучам, т.1, 284.
Изд. АН СССР, М., 1960.
19. С.Н.Вернов, Н.Л.Григоров, Г.Т.Зацепин, А.Е.Чудаков. Изв.АН СССР, сер.физ., 19, 493(1955).
20. Г.Т.Зацепин. Труды международной конференции по космическим лучам, т.1, 170.
Изд. АН СССР, М., 1960.
21. Дж.Ф.Фарли. Труды международной конференции по космическим лучам , т.1, 260.
Изд. АН СССР, М., 1960.
22. Т.Р.Кусиа, К.Р.Riley. Phys. Rev. Lett., 10, 266 (1963).

ПРИЛОЖЕНИЕ I. ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ СКОРОСТЕЙ

Построим диаграмму скоростей для данной реакции по заданным в лабораторной системе отсчета (ЛС) импульсам частиц, участвующих в реакции, и их углам вылета по отношению к выделенному направлению (обычно направлению скорости налетающей частицы в ЛС) ^{x)}.

Для этого вычерчиваем сначала на расстоянии $\pi/2$ друг от друга верхнюю границу и базовую прямую диаграммы, на которой отмечаем точку α_x , изображающую скорость лабораторной системы отсчета. Точку-скорость частицы с массой покоя m , имеющей в ЛС импульс p и угол вылета θ , наносим следующим образом.

1. Совмещаем базовую прямую диаграммы со шкалой импульсов для частиц массы m так, чтобы точка α_x совпала с началом шкалы. На ней против значения импульса p ставим отметку скорости частицы в ЛС (в единицах скорости света c) η_p , соответствующей ее импульсу.

2. Совмещаем диаграмму с координатной сеткой так, чтобы совпали их базовые прямые и верхние границы, а точка α_x совпала с началом координат. На верхней границе диаграммы отмечаем угол вылета частицы θ в ЛС относительно выделенного направления, которое изображается базовой прямой.

3. Находим ячейку координатной сетки, содержащую точку с координатами η_p и θ . При достаточно густой сетке, когда соседние ячейки почти не отличаются по размеру и форме, можно считать, что искомая точка делит расстояние между сторонами ячейки вдоль линий сетки (изоклин и изобистрот) в том же отношении, в каком отметки скорости и угла делят расстояние между концами ближайших к ним изобистрот и изоклин.

Если точка-скорость частицы оказалась в области $\eta > 2,3$, ее положение можно определить точнее. Для этого сдвигаем диаграмму вдоль базовой прямой до совпадения отметки угла θ , а затем скорости η_p соответственно с ближайшей изоклиной и изобистротой и отчеркиваем на диаграмме отрезки этих линий. Искомая точка лежит на их пересечении.

Скорость частицы (или движущейся в ЛС системы отсчета) с нулевым углом вылета по отношению к выделенному направлению изображается точкой базовой прямой, которая находится справа от точки α_x на расстоянии η_p (или η_γ), соответствующем импульсу частицы p (или Лоренц-фактору системы отсчета в ЛС γ). Скорость частицы с нулевой массой покоя (фотона или нейтрино) и углом вылета в ЛС $\theta > 0$ изображается точкой на верхней границе диаграммы, совпадающей с отметкой угла вылета ее в ЛС. Если $\theta = 0$, то скорость такой частицы изображается бесконечно удаленной вправо точкой базовой прямой.

x) Диаграмму скоростей нужно строить на полупрозрачной бумаге, чтобы при нанесении точек-скоростей частиц сквозь нее была видна координатная сетка.

На рис. 5 приведен пример нанесения на диаграмму точек-скоростей продуктов распада медленной изобары, образовавшейся в струе $0+20n$, с указанием ошибок в измерении импульсов. Этапы построения изображены стрелками с номерами в кружках: 1 - пунктирными, 2 и 3 - сплошными. Черный кружок — точка-скорость нуклона-мишени, нанесенная по его коэффициенту неупругости K_2 (см. § 5); a_2 — точка-скорость СЦМ заряженных продуктов распада изобары.

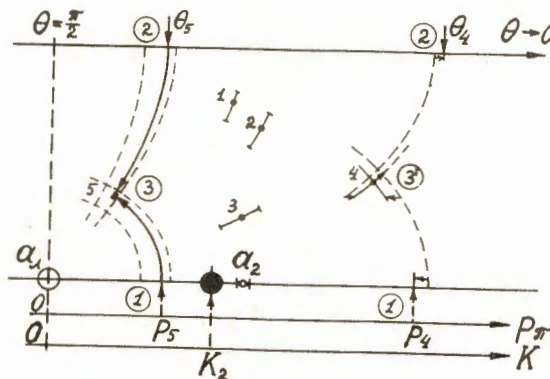


Рис. 5. Нанесение точек-скоростей частиц на диаграмму.

ПРИЛОЖЕНИЕ II. ЭТАПЫ ГРАФИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
КИНЕМАТИКИ.

А. Лоренцовы преобразования угла вылета частицы с массой $m \neq 0$
и импульса частицы с массой $m > 0$

Заданы: масса покоя частицы m , её импульс p_1 в системе отсчета I и угол вылета θ_1 относительно направления скорости \vec{v}_{12} системы отсчета 2, а также относительный Лоренц-фактор γ_{12} (или относительная скорость v_{12}) обеих систем отсчета.

Требуется определить импульс и угол вылета частицы в системе отсчета 2.

Этапы решения.

1. На диаграмме скоростей, наложенной на координатную сетку, в начале отсчета отмечаем точку-скорость a_1 системы отсчета I.

2. Справа от нее на базовой прямой по величине γ_{12} (или $\beta_{12} = \frac{v_{12}}{c}$) с помощью шкалы Лоренц-факторов (или шкалы скоростей $\eta_\beta = \text{Arth} \beta$, совпадающей со шкалой $\cos \theta: \eta = \text{Arth} \cos \theta$) наносим точку-скорость a_2 системы отсчета 2.

3. С помощью координатной сетки и её шкал по заданным p_1 и θ_1 наносим на диаграмму точку-скорость a_m частицы с массой m . Точку-скорость фотона (или нейтрино) a_γ наносим на верхнюю границу диаграммы по величине θ_1 с помощью шкалы углов (см. приложение I).

4. Параллельным переносом влево диаграммы скоростей относительно координатной сетки совмещаем точку-скорость a_2 системы отсчета 2 с началом сетки.

5. В этом положении посредством процедуры, обратной нанесению точки-скорости на диаграмму, определяются импульс p_2 частицы с массой m в системе отсчета 2 и ее угол вылета θ_2 относительно выделенного направления. Для фотона (или нейтрино) определяется угол θ_2 .

Отметим, что благодаря конформности используемого здесь отображения, угол α при вершине a_m криволинейного треугольника $a_1 a_m a_2$, образованного отрезками изоклин $a_1 a_m$, $a_2 a_m$ и отрезком базовой прямой $a_1 a_2$, равен углу между направлениями скоростей систем отсчета I и 2 в системе покоя частицы. Его можно определить с помощью транспортира по углу между касательными к изоклинам $a_1 a_m$ и $a_2 a_m$ в точке a_m (рис. А).

Пример.

1. На рис. А приведено решение задачи для π^- -мезона с $m_\pi = 0,1396 \frac{\text{ГэВ}}{c^2}$, $p_1 = 0,53 \text{ ГэВ}/c$, $\theta_1 = 49,5^\circ$ из струи $0+20p$ и фотона с $\theta_1 = 20^\circ$ при $\gamma_{12} = 5,14$.

Этапы решения показаны стрелками с порядковыми номерами в кружках:

1-3 - пунктирными, 4 и 5 - сплошными. Результат: для π мезона $\beta_2 = 1,02$ Гэв/с, $\theta_2 = 156^\circ$; для γ -кванта $\theta_2 = 121^\circ$.

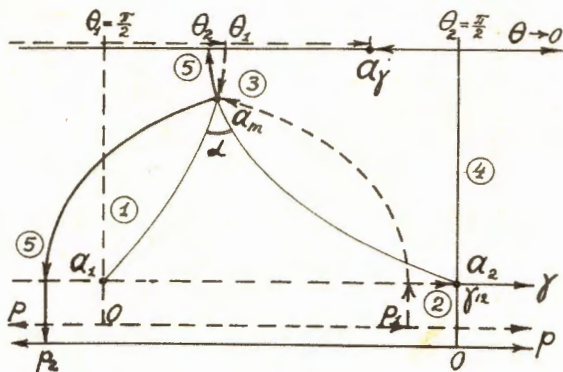


Рис. А. Лоренцовы преобразования угла и импульса для частицы с $m \geq 0$ и угла для частицы с $m = 0$.

Б. Лоренцовы преобразования импульса фотона и нейтрино

Заданы: импульс p_1 фотона (или нейтрино) в системе отсчета 1, относительный Лоренц-фактор γ_{12} (или относительная скорость v_{12}) систем отсчета и угол вылета фотона (нейтрино) θ_1 в системе отсчета 1 по отношению к направлению \vec{v}_{12} .

Требуется определить импульс фотона (нейтрино) p_2 в системе отсчета 2.

1. На диаграмме скоростей, наложенной на координатную сетку, в начале отсчета отмечаем точку-скорость a_1 системы отсчета 1.

Точку-скорость фотона (нейтрино) a_γ изображаем бесконечно удаленной вправо точкой базовой прямой диаграммы.

2. С помощью координатной сетки и её шкал по заданным θ_1 и γ_{12} (или v_{12}) наносим на диаграмму точку-скорость a_2 системы отсчета 2.

3. Переворачиваем диаграмму относительно перпендикуляра к базовой прямой и совмещаем ее с координатной сеткой так, чтобы точки a_2 и a'_2 попали в область сетки, где $\eta > 2,3$ ($\gamma > 5$), а точка a_2 совпала с одной из её изобистрот. Отмечаем точку пересечения этой изобистроты с базовой прямой a'_2 .

4. Не выводя точек a_2 и a'_2 из области $\eta > 2,3$, совмещаем базовую прямую диаграммы со шкалой Лоренц-фактора γ или любой из шкал импульса, так чтобы точка a_2 совпала с отметкой величины импульса P_1 на шкале (P_2 берется с точностью до порядка).

5. В этом положении диаграммы скоростей находим величину импульса фотона (нейтрино) в системе отсчета 2 — P_2 , которая (с точностью до порядка) определяется положением точки a'_2 на шкале γ ; $P_2 < P_1$, если точка a'_2 расположена слева от точки a_2 , и $P_2 > P_1$, если a'_2 — справа от a_2 . Разность порядков P_1 и P_2 определяем путем сравнения длины отрезка $a_2 a'_2$ с длиной отрезка между отметками γ и 10γ на шкале в области $\gamma > 5$.

Пример.

На рис.Б приведено решение задачи для фотона с $p_1 = 0,50$ Гэв/с и $\theta_1 = 20^\circ$ при $\gamma_{12} = 5,14$. Этапы решения показаны стрелками с порядковыми номерами в кружках: 1, 2 — пунктирными, 3—5 — сплошными.

Результат: $P_2 = 0,20$ Гэв/с.

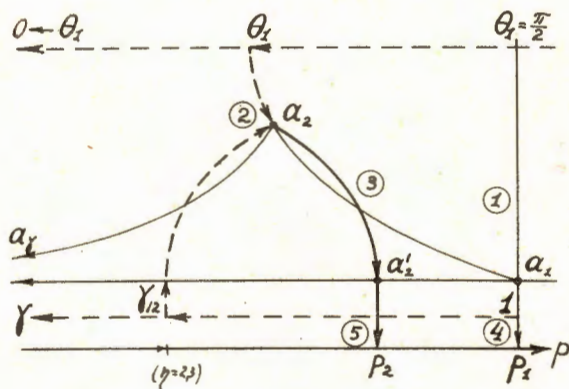


Рис. Б. Лоренцовы преобразования импульса для частицы с $m = 0$.

В. Определение поперечных импульсов частиц.

Заданы: массы частиц m_i , их импульсы в некоторой системе отсчета p_i и углы вылета относительно выделенного направления θ_i .

Требуется определить поперечные импульсы частиц $p_{\perp i}$ относительно этого направления. Этапы решения.

1. С помощью координатной сетки и ее шкал по заданным p_i, θ_i строим диаграмму скоростей рассматриваемых частиц (см. приложение I).

2. Параллельными переносами диаграммы совмещаем последовательно точки-скорости частиц a_i с вертикальной шкалой поперечных импульсов (в единицах mc).

3. Величины $p_{\perp i}$ (в единицах mc) определяем по этой шкале согласно положению на ней точек-скоростей частиц a_i .

Пример.

На рис. В приведено решение задачи для \mathcal{K} - мезонов от распада возбужденного сгустка в струе $0+20n$ (см. рис. 4 б). Параллельные переносы диаграммы скоростей показаны пунктирными стрелками.

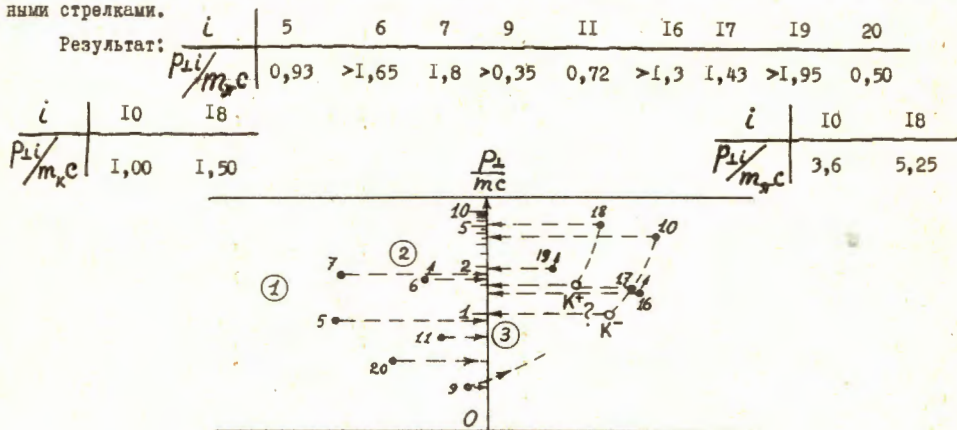


Рис. В. Определение поперечных импульсов частиц.

Если рассматриваются частицы разных масс и требуется определить их p_{\perp} в единицах Гэв/с, необходимо иметь соответствующее число шкал p_{\perp} , проградуированных в Гэв/с ($\int_{p_{\perp}}^j = \arctg [p_{\perp}(\Gamma_{rel}/c) / m_i c(\Gamma_{rel}/c)]$). Их можно расположить слева от координатной сетки, или выполнить на прозрачном материале и накладывать на диаграмму скоростей.

Г. Построение гистограмм угловых и импульсных распределений
в движущейся системе отсчета

Заданы: импульсы частиц известной массы в лабораторной системе отсчета p_i и их углы вылета θ_i относительно выделенного в ЛС направления. Требуется построить гистограмму углового (или импульсного) распределения частиц в системе отсчета C , движущейся в ЛС в выделенном направлении с Лоренц-фактором γ_C (или скоростью v_C).

Этапы построения.

1. С помощью координатной сетки и ее шкалы по заданным p_i, θ_i строим диаграмму скоростей рассматриваемых частиц (см. приложение I).

2. Справа от точки-скорости ЛС a_L на базовой прямой диаграммы с помощью шкалы γ (или шкалы β) по величине γ_C (или β_C) наносим точку-скорость a_C системы отсчета C .

3. Накладываем диаграмму скоростей на гистограммную координатную сетку для углов с $\Delta \cos \theta = const$ (или импульсов с $\Delta p = const$) так, чтобы границы диаграммы и сетки совместились, а точка a_C совпала с началом сетки.

4. В этом положении подсчитываем число точек-скоростей частиц, попадающих в тот или иной интервал между соседними изоκлинами (изобистротами), которые являются границами такого интервала на гистограммной сетке, и откладываем это число на гистограмме углового (импульсного) распределения.

Пример.

На рис.Г.1 показано построение гистограммы углового распределения группы мезонов, образовавшихся при распаде возбужденного мезонного сгустка в струе $0+20n$ (рис.4в) в СЦН сгустка, точка-скорость которого a_C определена из соображений симметрии этого распределения. Этапы I и 2 показаны пунктирными, а 3-и 4 - сплошными линиями.

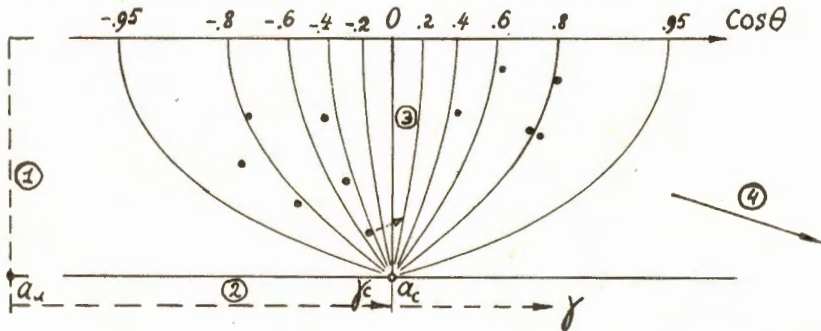


Рис.Г.1. Построение гистограммы углового распределения частиц в движущейся системе отсчета.

На рис. Г.2 приведена суммарная гистограмма углового распределения мезонов от распада возбужденных мезонных сгустков в струях $0+20p$ и $0+20n$ в СЦМ сгустков в предположении $v_{1c} = 0$. Распределение мезонов сгустка из струи $0+20n$ заштриховано.

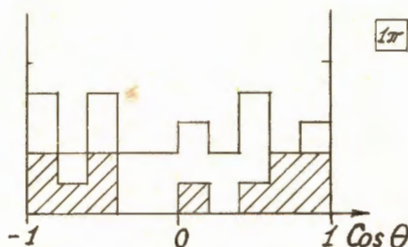


Рис.Г2. Гистограмма углового распределения мезонов в сгустках из струй $0+20p$ и $0+20n$.

Д. Определение модуля переданного 4-импульса

Заданы: точки-скорости a_{-1} и a_1 частицы на диаграмме скоростей и величина ее массы m_{-1} и m_1 до и после ее взаимодействия с другими частицами, участвующими в реакции; a_{-1} лежит на базовой прямой, а $m_1 \geq m_{-1}$.

Требуется определить модуль 4-импульса, переданного частице в результате взаимодействия.

Этапы решения.

1. Совмещаем точку-скорость частицы до взаимодействия a_{-1} с началом координатной сетки.

2. С помощью изобистрот сетки откладываем на базовой прямой отрезок $a_{-1}a'_1$, равный расстоянию между a_{-1} и a_1 в пространстве скоростей (в единицах c);

$$\overline{a_{-1}a'_1} = \overline{a_{-1}a_1} = \Delta r = c \cdot \Delta \eta.$$

3. Находим такое положение отрезка $a_{-1}a'_1$ на шкале Лоренц-фактора γ , при котором его концы совпадают с отметками γ_{-1} и γ_1 на левой и правой ветвях шкалы γ , причем

$$m_{-1}\gamma_{-1} = m_1\gamma_1.$$

В этом положении на отрезке $a_{-1}a'_1$ отмечаем точку a_0 , совпадающую с общим началом ветвей шкалы γ . Если $m_1 = m_{-1}$, точка a_0 делит отрезок $a_{-1}a'_1$ пополам.

4. Совмещаем базовую прямую диаграммы со шкалой импульса для частицы с массой m_{-1} , так чтобы точка α_0 совпала с общим началом ее левой и правой ветвей. При этом концы отрезка $\alpha_{-1}\alpha'_1$ укажут соответственно значения импульсов $P_{0(-1)}$ и P_{01} , через которые определяется искомая величина

$$q = (P_{0(-1)} + \frac{m_{-1}}{m_{-1}} P_{01}) / c.$$

Пример.

На рис. Д приведено определение q для нуклона, генерировавшего струю $0+20n$ (см. рис. 4в) в предположении, что после взаимодействия поперечная скорость возбужденного нуклона близка к нулю, а масса $m_{-1} = 1,6 \begin{smallmatrix} +0,3 \\ -0,2 \end{smallmatrix}$ Гэв/с² (см. § 5). Этапы 1 и 2 показаны пунктирными линиями, а 3 и 4 - сплошными.

Результат: $q = 2,3 \begin{smallmatrix} +0,8 \\ -0,3 \end{smallmatrix}$ Гэв/с².

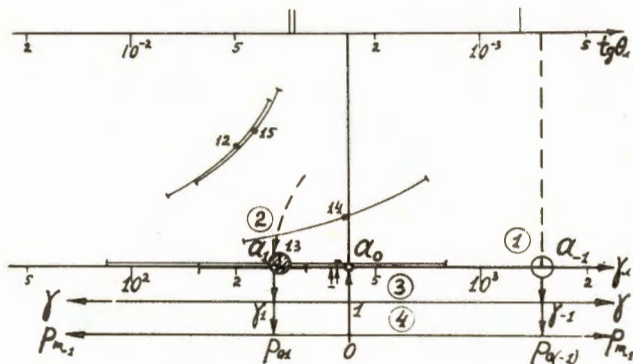


Рис. Д. Определение модуля переданного 4-импульса.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июня 1963 г.