1319

И-69

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Е.П. Жидков, В.П. Шириков

Р-1319

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЖВМ и МФ, 1964, т4, №5, с804-816.

Дубна 1963

Е.П. Жидков, В.П. Шириков

Р-1319

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Направлено в журнал "Вычислительная математика и математическая физика".

Дубна 1963

Исследование некоторых уравнений математической физики приводит к рассмотрению следующих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

1/ Найти решения $y = y(x)$ уравнения

$$y'' + \frac{2}{x} y' - y + y^n = 0, \quad n > 0, \quad x \geq 0, \tag{1.1}$$

удовлетворяющие условиям

$$y(0) = y_0 < \infty, \quad y'(0) = 0, \quad y(+\infty) = 0, \tag{1.2}$$

y_0 – неизвестный положительный параметр.

2/ Найти решения $\eta = \eta(x)$ уравнения

$$\eta'' = \eta - \frac{\eta^n}{x^{n-1}}, \quad n > 0, \quad x \geq 0, \tag{1.3}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = a < \infty, \quad \eta(\infty) = 0, \tag{1.4}$$

a – неизвестный положительный параметр.

Уравнение /1.3/ получается из уравнения /1.1/ заменой $\eta(x) = x \cdot y(x)$. Решения уравнения /1.1/ с начальными условиями $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$ соответствуют решениям уравнения /1.3/ с начальными условиями $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a = y_0$.

Задачи /1.1/-/1.2/, /1.3/-/1.4/ при $n = 2$ и $n = 3$ возникают в нелинейной полевой теории при изучении взаимодействия элементарных частиц. При $n = \frac{3}{2}$ уравнение /1.1/ представляет собой уравнение типа Томаса-Ферми, и соответствующая задача /1.1/-/1.2/ возникает в статистической теории ядра. Задача /1.3/-/1.4/ для $n = 3$ рассматривалась в работах *R.I.Finkelstein'а* и его сотрудников /см.[/1/,/3/]/, *N.Rosen'а* и *Rosenstock'а* [/2/], а также Гласко, Шушурина, Лерюста, Терлецкого[/4/]. В этих работах есть некоторые соображения относительно существования и свойств решения указанной краевой задачи и приведены результаты машинного счета. В работе[/4/] было найдено с определенной точностью пять значений начальной производной a, соответствующих пяти различным решениям задачи. В работе[/1/] указано, что профессором *F.Bohnenblust* проведено доказательство существования положительного решения задачи /1.3/-/1.4/ для $n = 3$ и исследование аналитических свойств этого решения в точке $x = 0$. Однако доказательство не приведено. Наконец, С.Ф. Шушуриным[/5/] в его диссертации задача /1.3/-/1.4/ была сведена к краевой задаче для линейного уравнения:

$$y'' = y - \frac{\epsilon^{n-1}}{x^{n-1}} y, \quad \epsilon > 0$$

посредством некоторого метода линеаризации нелинейных уравнений. Для этого линейного уравнения предложена без доказательств схема возможного поведения его решений.

К сожалению, обоснование метода линеаризации неудовлетворительно.

В настоящей работе исследуется вопрос о существовании положительных решений краевых задач /1.1/–/1.2/, /1.3/–/1.4/ для всех действительных n из некоторого интервала.

Раздел I данной работы посвящен доказательству почти очевидной теоремы 1 об отсутствии у задач /1.1/–/1.2/, /1.3/–/1.4/ положительных решений для случая $0<n\le 1$.

В разделе II задача /1.3/–/1.4/ для всех $n>1$ заменяется эквивалентной задачей /2.1/–/2.2/. Уравнение /2.1/ совпадает с уравнением /1.3/ в области $\eta\ge 0$. Для уравнения /2.1/ при любом действительном $n>1$ исследуются свойства решений задачи Коши. Лемма 1 устанавливает существование решения, определенного для всех $x>0$ и удовлетворяющего в точке $x=0$ заданным начальным условиям. Лемма 2 доказывает единственность такого решения. Лемма 3 устанавливает наличие непрерывной зависимости решений уравнения /2.1/ от изменения начальных производных в точке $x=0$.

В разделе III рассматриваются задачи /1.1/–/1.2/, /1.3/–/1.4/ для всех действительных n из интервала $1<n\le 3$. Теоремой 2 доказывается существование положительных решений указанных задач при любом $n\subset(1,3]$

I. Теорема 1. Задачи /1.1/–/1.2/, /1.3/–/1.4/ при $0<n\le 1$ не имеют положительных решений.

Покажем, прежде всего, что задача /1.3/–/1.4/ не имеет положительных решений для $0<n\le 1$. Случай $n=1$ тривиален, ибо задача /1.3/–/1.4/ вырождается в задачу

$$\eta''=0,\quad \eta(0)=0,\quad \eta(\infty)=0,$$

а задача /1.1/–/1.2/ – в задачу

$$y''+\frac{2}{x}y'=0,\quad y(0)=y_0,\quad y'(0)=0,\quad y(\infty)=0.$$

Эти задачи положительных решений не имеют.

При $0<n<1$ запишем уравнение /1.3/ в виде:

$$\eta''=\eta\left(1-\frac{x^{1-n}}{\eta^{1-n}}\right)\qquad\text{или}\qquad \eta''+\eta\left(\frac{x^{1-n}}{\eta^{1-n}}-1\right)=0.$$

Прямая $\eta=x$ является таким решением уравнения, на котором $\eta''=0$; при $\eta>x$ $\eta''>0$, а при $0\le\eta<x$ $\eta''<0$. Если существуют решения задачи Коши для данного уравнения при начальных условиях $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=a>0$ / a – параметр/, то в окрестности $x=0$ их поведение описывается рис. 1.

Очевидно, решений краевой задачи /1.3/–/1.4/ при $a\ge 1$ не существует. Допустим, что такое решение существует при $a=\bar a<1$. Обозначим его через $\bar\eta(x)$. $\bar\eta(x)<\bar a x$ в силу того, что $\bar\eta(x)>0$ и $\bar\eta''(x)<0$. Сравним два уравнения:

$$\bar\eta''+\bar\eta\left(\frac{x^{1-n}}{(\bar\eta)^{1-n}}-1\right)=0,$$

$$z''+z\left(\frac{1}{(\bar a)^{1-n}}-1\right)=0.$$

....

Решение последнего уравнения с начальным условием $z(0)=0$ обращается в нуль в точке $x=\frac{\pi}{\sqrt{(\bar a)^{n-1}-1}}$. Очевидно, что $\frac{x^{1-n}}{(\bar\eta)^{1-n}}-1\ge\frac{1}{(\bar a)^{1-n}}-1$ для всех $x>0$. Применяя теорему сравнения для полуоткрытых отрезков в форме Сеге /см. /6/ /, получаем, что $\bar\eta(x)$ имеет, по меньшей мере, один нуль внутри $\left(0,\frac{\pi}{\sqrt{(\bar a)^{n-1}-1}}\right)$.

Итак, предположение о существовании положительного решения задачи /1.3/–/1.4/ привело к противоречию. Легко видеть, что задача /1.1/–/1.2/ также не имеет положительных решений. Решения задачи Коши с начальными условиями $y(0)=y_0<1$, $y'(0)=0$ для уравнения /1.1/ имеют нули в тех же точках, что и соответствующие им решения уравнения /1.3/, удовлетворяющие условиям $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=a=y_0<1$.

Решения с начальными условиями $y(0)=y_0>1$, $y'(0)=0$ не могут асимптотически приближаться к оси x, так как соответствующие им решения $\eta(x)$ уравнения /1.3/ лежат выше прямой $\eta=x$, и, следовательно, $y(x)=\frac{\eta(x)}{x}>1$ для всех $x>0$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

II. Перейдем к рассмотрению задачи /1.3/–/1.4/ для $1<n\le 3$. Искомые решения этой задачи находятся в классе всех решений задачи Коши с начальными условиями $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=a>0$ для уравнения /1.3/.

В случае $n=\frac{2p+1}{2q}$ любое решение $\eta=\eta(x)$ задачи Коши, $\eta(0)=0$ и $\eta'(0)=a>0$, имеет не более двух нулей в интервале $0\le x<\infty$ и непродолжимо за второй нуль. Для удобства в дальнейшем мы будем рассматривать вместо задачи /1.3/–/1.4/ следующую эквивалентную краевую задачу.

Найти положительные решения уравнения

$$\eta''=\begin{cases}\eta-\dfrac{\eta^n}{x^{n-1}}, & \eta\ge 0\\ 0, & \eta<0\end{cases},\qquad /2.1/$$

удовлетворяющие условиям

$$\eta(0)=0,\quad \eta'(0)=a>0,\quad \eta(\infty)=0,\qquad /2.2/$$

a –искомый параметр.

Лемма 1. Для любого $a>0$ и любого $n>1$ существует решение задачи Коши для уравнения /2.1/ при начальных условиях $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=a$, определенное для всех $x>0$. Для доказательства обратимся снова к уравнению /1.3/ и преобразуем его к виду нормальной системы двух уравнений первого порядка, положив $\eta=\eta_1$, $\eta'=\eta_2$:

$$\begin{aligned}\eta_1'&=\eta_2=f_1(x,\eta_1,\eta_2),\\ \eta_2'&=\eta_1-\frac{\eta_1^n}{x^{n-1}}=f_2(x,\eta_1,\eta_2).\end{aligned}\qquad /2.3/$$

Уравнение /2.1/ можно рассматривать как систему

$$\begin{aligned}\eta_1'&=\eta_2,\\ \eta_2'&=\begin{cases}\eta_1-\dfrac{\eta_1^n}{x^{n-1}}, & \eta_1>0\\ 0, & \eta_1\le 0\end{cases}\end{aligned}\qquad /2.4/$$

Правая часть системы /2.3/ непрерывна при $x>0$, функция $f_2(x,\eta_1,\eta_2)$ в точке $x=0$ разрывна.

Применим к системе /2.3/ локальную теорему существования решений с заданными начальными условиями, доказанную В. Чечиком [8] для сингулярных систем

$$y'_k = y_k(x, y_1, \dots y_n), \qquad (k=1,2,\dots,n).$$

Согласно этой теореме, для любых фиксированных $a>0$ и $n>1$ справедливо следующее утверждение: найдется такое $a>0$ и такие функции $\eta_1=\eta_1(x)$, $\eta_2=\eta_2(x)$, определенные на интервале $0\le x\le a$, что

$$a x - x < \eta_1(x) < a x + x, \qquad a-1<\eta_2(x)<a+1$$

для всех $x\subset[0,a]$; функция $\eta_1(x)$ непрерывна на интервале $[0,a]$ и непрерывно дифференцируема на $[0,a]$, так что $\eta_1(x)$ и $\eta_1'(x)=\eta_2(x)$ удовлетворяют системе /2.3/ для $x\subset(0,a]$ и условиям $\eta_1(0)=0$, $\eta_2(0)=a$ в точке $x=0$. Область существования решения, полученную в результате использования теоремы Чечика, обозначим через D; ее можно определить неравенствами

$$\begin{cases} 0<x\le a \\ (a-1)\,x<\eta_1<(a+1)\,x \\ a-1<\eta_2<a+1 . \end{cases}$$

В силу непрерывности функции $\eta_1(x)$ на интервале $[0,a]$ и положительности $\eta_1'(0)=\eta_2(0)=a$ можно указать такое $a_1\leqslant a$, что $\eta_1(x)>0$ для всех $x\subset(0,a_1]$. Вследствие ограниченности $\eta_1(a_1)$ и $\eta_2(a_1)$ можно продолжить это решение на некоторый интервал изменения x , так как за пределами указанной окрестности точки $x=0$ функции правой части системы непрерывны. Покажем, что такое продолжение можно сделать для всех $x>0$ в случае системы /2.4/.

На основании сказанного выше можно утверждать, что для задачи /1.1/ существует решение задачи Коши в некоторой окрестности $x=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=y_0=a>0$, $y'(0)=0$.

Уравнение /1.1/ можно представить в виде нормальной системы:

$$\begin{cases} y'=p \\ p'=y-y^n-\dfrac{2}{x}p . \end{cases} \qquad /2.5/$$

Рассмотрим вместо системы /2.5/ автономную систему

$$\begin{cases} y'=p \\ p'=y-y^n \end{cases} \qquad /2.6/$$

В конечной части плоскости / y , p / система /2.6/ имеет только две особые точки: /0.0/ и /1.0/. Характер этих особых точек легко установить. Уравнение второго порядка, соответствующее системе /2.6/, имеет вид: $y''-y+y^n=0$; умножая это уравнение на $2y'$ и интегрируя по x в пределах от 0 до x , получаем:

$$y'^2-y^2+\frac{2}{n+1}y^{n+1}=C, \qquad C=-y^2(0)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}(0) , \qquad /2.7/$$

$$y'=p=\pm\sqrt{C+y^2-\frac{2}{n+1}y^{n+1}} .$$

Траектории системы /2.6/ на фазовой плоскости / y , p / симметричны относительно оси $p=0$. В точках пересечения с этой осью $(y')'_y=\infty$; $\max\limits_{0\le y\le y_0} y'=y'|_{y=1}$.

Для $C=0$ имеем $y'=0$ при $y=0$ и $y=y_0=(\frac{n+1}{2})^{\frac{1}{n-1}}$. При $C>0$ траектории пересекают ось $y=0$, причем $(y')'_y=0$. Кроме того, при $C=0$ $(y')'_y=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{y-y^n}{\sqrt{y^2-\frac{2}{n+1}y^{n+1}}}=1$.

Движение совершается согласно рис. 2.

Любая траектория, выпущенная с оси $p=0$ при $y(0)=y_0$, не выходит затем /пока $y>0$ / из области P: $y<y_0$, $p<\sqrt{-\frac{2}{n+1}y_0^{n+1}-y_0^2+1-\frac{2}{n+1}}$.

Граница для p получается из равенства:

$$\max_{0\le y\le y_0} p(y)=p(1)=\sqrt{C+1-\frac{2}{n+1}} .$$

Умножая уравнение /1.1/ на $2y'$ и интегрируя по x в пределах от 0 до x, получаем:

$$y'^2(x)-y^2(x)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}(x)=C-4\int_0^x\frac{y'^2(t)}{t}\,dt, \qquad /2.8/$$

где $C=-y^2(0)+\frac{2}{n+1}y^{n+1}(0)$.

Представляя /2.7/ в виде $F(y,y')=C$, убеждаемся, что движение, начатое для системы /2.5/ при некотором $y(0)$, определяющем C , в силу положительности функции $4\int_0^x\frac{y'^2(t)}{t}\,dt$ остается в области P , определенной для системы /2.6/.

Предположим, что в области $\eta_1>0$ решение системы /2.4/ продолжаемо лишь до $x=x_0$, x_0 конечно. Соответствующее решение системы /2.5/ также продолжаемо лишь до $x=x_0$, $y>0$. Однако точка $(y(x_0), y'(x_0))\subset P$ и, следовательно, $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ конечны, что позволяет продолжить решение вправо от точки $x=x_0$. Следовательно, решение можно продолжить либо до точки $x=x_0$ (x_0 конечно, $\eta_1=0$), либо для любых x , если $\eta_1(x)$ остается положительным. Любое решение $\eta_1=\eta_1(x)$, $\eta_2=\eta_2(x)$ системы /2.4/ такое, что $\eta_1(\bar x)=0$, $\eta_1'(\bar x)=k$ продолжаемо для любых $x>\bar x$ и имеет вид $\eta_1(x)=k(x-\bar x)$, $\eta_2(x)=k$. Лемма 1 доказана.

<u>Лемма 2</u>. Решение $\eta=\eta(x)$ уравнения /2.1/ при начальных условиях $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=a>0$ и любом $n>1$ единственно.

Уравнение /2.1/ удовлетворяет условиям классических теорем единственности решения задачи Коши для всех $x\ge\delta$ при произвольном $\delta>0$, поэтому достаточно доказать лемму 2 для некоторого промежутка $[0,\delta]$, в котором решения задачи Коши неотрицательны при заданном $a>0$ и $n>1$.

Предположим, что одновременно

$$\eta_1'' = \eta_1 - \frac{\eta_1^n}{x^{n-1}}, \quad \eta_1(0)=0, \quad \eta_1'(0)=a;$$

$$\eta_2'' = \eta_2 - \frac{\eta_2^n}{x^{n-1}}, \quad \eta_2(0)=0, \quad \eta_2'(0)=a, \quad \eta_1(x)\neq\eta_2(x).$$

Тогда $\quad (\eta_1-\eta_2)'' = (\eta_1-\eta_2)\left[1-\dfrac{\eta_1^n(x)-\eta_2^n(x)}{x^{n-1}(\eta_1(x)-\eta_2(x))}\right];$

$$\eta_1(0)-\eta_2(0)=0, \quad \eta_1'(0)-\eta_2'(0)=0.$$

Полагая

$$\eta_1-\eta_2 = z, \quad 1-\frac{\eta_1^n(x)-\eta_2^n(x)}{x^{n-1}(\eta_1(x)-\eta_2(x))} = P(x),$$

получаем для разности двух решений $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ в промежутке $[0,\delta]$ задачу

$$z'' = P(x)\,z, \quad z(0)=0, \quad z'(0)=0.$$

В точках x_i отрезка $[0,\delta]$, где $\eta_1(x_i)=\eta_2(x_i)$, функция $P(x)$ может быть доопределена как $\lim\limits_{x\to x_i} P(x)=P(x_i)$. Покажем, например, что при $x\to 0$ функция $P(x)$ имеет конечный предел.

Используя тождество $\quad \eta_1^n(x)=[\eta_2(x)+(\eta_1(x)-\eta_2(x))]^n = \eta_2^n(x)\left[1+\dfrac{\eta_1(x)-\eta_2(x)}{\eta_2(x)}\right]^n,$

получаем:

$$P(x) = 1-\frac{\eta_2^n(x)\left[1+\frac{\eta_1(x)-\eta_2(x)}{\eta_2(x)}\right]^n-\eta_2^n(x)}{x^{n-1}\,\eta_2(x)\cdot\frac{\eta_1(x)-\eta_2(x)}{\eta_2(x)}} = 1-\left(\frac{\eta_2(x)}{x}\right)^{n-1}\cdot\frac{\left(1+\frac{\eta_1(x)-\eta_2(x)}{\eta_2(x)}\right)^n-1}{\frac{\eta_1(x)-\eta_2(x)}{\eta_2(x)}}.$$

Полагая $\dfrac{\eta_1(x)-\eta_2(x)}{\eta_2(x)}=\phi(x)$, имеем очевидные пределы

$$\lim_{x\to 0}\phi(x)=0, \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta_2(x)}{x}\right)^{n-1}=a^{n-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+\phi(x))^n-1}{\phi(x)}=n.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} P(x)$ конечен. При непрерывной на интервале $[0,\delta]$ функции $P(x)$ линейное уравнение $z''=P(x)\,z$ имеет на интервале $[0,\delta]$ решение $z(x)=\eta_1(x)-\eta_2(x)$, такое, что $z(0)=0$, $z'(0)=0$, $z(x)\not\equiv 0$.

Это уравнение имеет также решение $z(x)\equiv 0$, $z(0)=0$, $z'(0)=0$. Полученное противоречие с утверждением известной теоремы о единственности решений линейных уравнений доказывает лемму 2.

<u>Лемма 3.</u> Пусть начальным условиям $\eta_1(0)=0$, $\eta_2(0)=a_0>0$ удовлетворяет решение $\eta_1=\eta_1^\circ(x)$, $\eta_2=\eta_2^\circ(x)$ системы /2.4/. Тогда для любого $T>0$ и любого $\epsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, $\delta=\delta(\epsilon,T)$, что $|\bar\eta_1(x)-\eta_1^\circ(x)|<\epsilon$, $|\bar\eta_2(x)-\eta_2^\circ(x)|<\epsilon$ для любого x, $0\le x\le T$, где $\bar\eta_1(x)$, $\bar\eta_2(x)$ – решения системы /2.4/, такие, что $\bar\eta_1(0)=0$, $|\bar\eta_2(0)-a_0|<\delta$.

При доказательстве леммы 1 указывалось, что решение задачи Коши системы /2.4/, удовлетворяющее начальным условиям $\eta_1(0)=0$, $\eta_2(0)=a$, остается в некоторой области D, определенной для заданных начальных условий. Пусть при $a=a_0$ область D, заключающая функции $\eta_1=\eta_1^\circ(x)$, $\eta_2=\eta_2^\circ(x)$, определена неравенствами, указанными при доказательстве леммы 1.

Рассмотрим произвольное $\omega>0$, $\omega\ll a_0$, и такие $\bar\eta_2(0)$, что $|\bar\eta_2(0)-a_0|\le\omega$. Для всех таких $\bar\eta_2(0)$ можно построить решения $\vec{\bar\eta}(x)=(\bar\eta_1(x),\bar\eta_2(x))$ задачи Коши системы /2.4/ при условии $\bar\eta_1(0)=0$, $\bar\eta_2(0)$ – начальные производные функции $\eta_1=\bar\eta_1(x)$.

Согласно теореме Чечика, примененной выше, можно указать такое $b\le a$, что при всех $0<x\le b$ решения $\eta_1=\eta_1^\circ(x)$, $\eta_2=\eta_2^\circ(x)$, $\eta_1=\bar\eta_1(x)$, $\eta_2=\bar\eta_2(x)$ при выбранных $\bar\eta_2(0)$, остаются в области

$$D^*:\ \begin{cases} 0<x\le b \\ (a_0-1-\omega)\,x<\eta_1<(a_0+1+\omega)\,x \\ a_0-1-\omega<\eta_2<a_0+1+\omega. \end{cases}$$

Относительно величины a см. в определении области D. Кроме того, эти решения удовлетворяют в D^* системе интегральных уравнений

$$\eta_k^\circ(x)=\eta_k^\circ(0)+\int_0^x f_k(t,\eta_1^\circ(t),\eta_2^\circ(t))\,dt \qquad (k=1,2), \qquad /2.9/$$

$$\bar\eta_k(x)=\bar\eta_k(0)+\int_0^x f_k(t,\bar\eta_1(t),\bar\eta_2(t))\,dt \qquad (k=1,2).$$

Здесь f_k функции в правой части системы /2.3/. Предполагается, что $\eta_1^\circ(x)$ и $\bar\eta_1(x)$ положительны при $0<x\le b$. Такое предположение можно сделать, ибо в противном случае в силу того, что в области D^* вторая производная от $\eta_1(x)$ ограничена:

$$|\eta_1''(x)|=\left|\eta_1-\frac{\eta_1^n}{x^{n-1}}\right|\le x\,[(a_0+1+\omega)+(a_0+1+\omega)^n]$$

– вместо области D^* можно было бы рассмотреть некоторую $D^{**}\subset D^*$, такую, что $\eta_1^\circ(x)$ и $\bar\eta_1(x)$ положительны в ней.

Покажем, что функции $\vec{\bar\eta}(x)=(\bar\eta_1(x),\bar\eta_2(x))$ образуют в области D^* компактное множество. Согласно системе /2.9/,

$$|\bar\eta_k(x)|\leqslant|\bar\eta_k(0)|+\int_0^x|f_k(t,\bar\eta_1(t),\bar\eta_2(t))|\,dt< \qquad /2.10/$$

$$<|\bar\eta_k(0)|+\int_0^b|f_k(t,\bar\eta_1(t),\bar\eta_2(t))|\,dt.$$

В силу определения области D^*

$$|f_1(t,\bar\eta_1,\bar\eta_2)|<a_0+1+\omega=\psi_1(t),$$

$$|f_2(t,\bar\eta_1,\bar\eta_2)|<t\,[(a_0+1+\omega)+(a_0+1+\omega)^n]=\psi_2(t),$$

$$\bar\eta_1(0)=0, \quad \bar\eta_2(0)<a_0+1+\omega.$$

Из последних неравенств и неравенства /2.10/ следует, что множество $\{\bar\eta_k(x)\}$ равномерно ограничено.

Для любых x_1, x_2 из отрезка $[0,b]$, $x_2 > x_1$, имеем, согласно системе /2.9/:

$$|\bar\eta_k(x_2) - \bar\eta_k(x_1)| \le \int_{x_1}^{x_2} |f_k(t,\eta_1,\eta_2)|\,dt < \int_{x_1}^{x_2} \psi_k(t)\,dt \quad (k=1,2).$$

Суммируемые функции $\psi_k(t)$ $(k=1,2)$ определены выше.

Интеграл от суммируемой функции есть функция абсолютно непрерывная, и из последнего неравенства следует равностепенная непрерывность $\{\bar\eta_k(x)\}$.

Следовательно, множество $\{\vec{\bar\eta}(x)\}$ компактно.

Допустим, что непрерывной зависимости решений системы /2.4/ от начальных производных в области D^* нет. Это значит, что найдется такое $\epsilon_0 > 0$, такие точки x_i и такая последовательность $\{\bar\eta_2^i(0)\}$, что хотя бы для одного k $|\bar\eta_k^i(x_i) - \eta_k^\circ(x_i)| \ge \epsilon_0$, хотя $\bar\eta_2^i(0) \to a_0$ при $i \to \infty$.

Здесь $\bar\eta_k^i(x)$ –решения системы /2.4/, соответствующие производным $\bar\eta^i(0)$.

Возьмем эту последовательность $\bar\eta_2^i(0)$ и рассмотрим множество $\{\vec{\bar\eta}^i(x)\}$. Это множество компактно в области D^*. Выделим из него сходящуюся подпоследовательность. Пусть для простоты это само множество $\{\vec{\bar\eta}^i(x)\}$. Пусть $\vec{\bar\eta}^i(x) \to \vec z(x)$. Так как $\bar\eta_2^i(0) \to a_0$ при $i \to \infty$, то $z_2(0) = a_0$, $z_1(0) = 0$. Покажем, что функции $z_k(x)$ $(k=1,2)$ удовлетворяют в области D^* системе уравнений

$$z_k(x) = z_k(0) + \int_0^x f_k(t, z_1(t), z_2(t))\,dt. \qquad /2.11/$$

Положим $z_k(x) - \bar\eta_k^i(x) = R_k^i(x)$. Функции $\bar\eta_k^i(x)$ удовлетворяют системе /2.9/. Следовательно, справедливо равенство

$$z_k(x) - z_k(0) - \int_0^x f_k(t, z_1, z_2)\,dt =$$

$$= R_k^i + \bar\eta_k^i(0) - z_k(0) + \int_0^x f_k(t, z_1 - R_1^i, z_2 - R_2^i)\,dt - \int_0^x f_k(t, z_1(t), z_2(t))\,dt.$$

Оценим прежде всего производные $\frac{\partial f_k(t,\eta_1,\eta_2)}{\partial \eta_j}$ $(k, j = 1,2)$ в области D^*. Очевидно,

$$\frac{\partial f_1}{\partial \eta_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \eta_2} = 1, \quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial \eta_1}\right| = \left|1 - n\frac{\eta_1^{n-1}}{x^{n-1}}\right| < 1 + n(a_0 + 1 + \omega)^{n-1}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \eta_2} = 0.$$

Положим $A = \max\{1, 1 + n(a_0 + 1 + \omega)^{n-1}\}$. Для произвольно малого $\epsilon_1 > 0$ выберем такое $i = i_0$, что при всех $i > i_0$ $|R_k^i(x)| < \epsilon_1$ для всех $x \in [0,b]$. Это можно сделать в силу равномерной сходимости $\bar\eta_k^i(x) \to z_k(x)$ на указанном интервале. Для всех $i > i_0$ имеем:

$$|f_k(t, z_1(t) - R_1^i(t), z_2(t) - R_2^i(t)) - f_k(t, z_1(t), z_2(t))| \le$$

$$< A\,[|R_1^i(t)| + |R_2^i(t)|] < 2A\epsilon_1.$$

Следовательно,

$$\left| z_k(x) - z_k(0) - \int_0^x f_k(t, z_1(t), z_2(t))\,dt \right| < |R_k^i(x)| + |\bar\eta_k^i(0) - z_k(0)| +$$
$$+ 2A\epsilon_1 \int_0^x dt < (2 + 2Ab)\,\epsilon_1.$$

В силу произвольной малости ϵ_1 левая часть неравенства равна 0. Это означает,

что равенство /2.11/ справедливо. Следовательно, $z_k(x)$ $(k=1,2)$ есть решение системы /2.4/ в области D^*, такое, что $z_1(0) = 0$, $z_2(0) = a_0$. Однако $\eta_k^\circ(x)$ $(k=1,2)$ есть единственное решение системы /2.4/, такое, что $\eta_1^\circ(0) = 0$, $\eta_2^\circ(0) = a_0$. Следовательно, $\vec\eta^\circ(x) \equiv \vec z(x)$ для всех $0 < x \le b$.

Факт равномерной сходимости множества $\{\vec{\bar\eta}^i(x)\}$ к $\vec\eta^\circ(x)$ противоречит предположению, сделанному выше: $|\bar\eta_k^i(x_i) - \eta_k^\circ(x_i)| > \epsilon_0$.

Итак, произвольное множество $\{\vec{\bar\eta}(x)\}$ решений задачи Коши системы /2.4/ с начальными условиями $\bar\eta_1(0) = 0$, $\bar\eta_2(0) = \bar\eta_1'(0)$, такими, что последовательность $\{\bar\eta_1'(0)\}$ сходится к a_0, равномерно сходится в интервале $0 \le x \le b$ к функции $\vec\eta^\circ(x)$. В частности, $\{\vec{\bar\eta}(b)\} \to \vec\eta^\circ(b)$.

Рассмотрим функции $\vec\eta^\circ(x)$, $\vec{\bar\eta}(x)$ на интервале $[b,T]$ как продолжения соответствующих решений системы /2.4/ из области D^*. T – произвольное число, определенное в формулировке леммы 3; $T > b$. В полуплоскости $x \ge b > 0$ для системы /2.4/ выполняются условия классических теорем о непрерывной зависимости решений от начальных условий.

Из непрерывной зависимости решений системы /2.4/ от начальных условий на отрезках $[0,b]$ и $[b,T]$ следует непрерывная зависимость от начальных условий на всем отрезке $[0,T]$. Лемма 3 доказана.

III. Теорема 2. Задачи /1.1/-/1.2/,/1.3/-/1.4/ имеют по крайней мере одно положительное решение при $1<n\le3$.

Рассмотрим решения задачи Коши для уравнений /1.1/ и /1.3/, установив следующее взаимно-однозначное соответствие начальных условий:

$$y(0) = y_0 > 0, \quad y'(0) = 0; \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = a = y_0.$$

Положим $y'^2 - y^2 + \frac{2}{n+1}y^{n+1} = F(y, y') = C$, $C = -y_0^2 + \frac{2}{n+1}y_0^{n+1}$.

Для решений уравнения /1.1/ с начальным условием $y(0) = y_0$ имеем:

$$y'^2 - y^2 + \frac{2}{n+1}y^{n+1} = C - 4\int_0^x \frac{y'^2}{t}\,dt.$$

Движение совершается в направлении убывания функции $F(y, y')$, линии уровня которой изображены на рис. 2. Следовательно, при $y_0 < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ траектория, представляющая на плоскости / y, y' / решение уравнения /1.1/, пройдет правее точки $y = 0$ и останется в области, где $F(y, y') < 0$. Все такие решения остаются положительными при всех $x > 0$. Соответствующие $\eta = \eta(x)$ обладают тем же свойством /легко показать, что это колеблющиеся вокруг прямой $\eta = x$ кривые/. На рис. 2. такая кривая изображена линией L. Множество решений, не пересекающих ось x при $x > 0$, обозначим через L_1, а соответствующее множество значений начальных производных a –через L_1^a. Очевидно, что если определить аналогичные множества для совокупности решений уравнения /2.1/, то они совпадут с множествами L_1 и L_1^a.

Множество L_1^a –не пусто. Покажем, что оно ограничено сверху. Для этого достаточно показать, что найдется такое $a = a_0$, что для всех $a = \eta'(0) > a_0$ $\eta(x)$ пересекает ось x. Очевидно, $a_0 > \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}} > 1$. Рассмотрим решения $\eta = \eta(x)$ при условии $\eta'(0) = a_* > 1$. В области $\eta > x$ имеем $\eta'' < 0$. Сделаем в уравнении /1.3/ замену переменных: $z = \eta(x) - x$. Уравнения для $z(x)$ запишем в виде:

$$z'' + \{(z+x)\,[\,(\frac{z+x}{x})^{n-1} - 1\,]\,\} = 0,$$

$$z'' + z\,\{(1+\frac{x}{z})\,[\,(\frac{z}{x}+1)^{n-1} - 1\,]\,\} = 0. \qquad /3.1/$$

Обозначим $\frac{z}{x} = t$, $(1+\frac{1}{t})\,[\,(t+1)^{n-1} - 1\,] = R(t)$; $R(t) = \frac{(t+1)^n - (t+1)}{t} = \frac{P(t)}{t}$.

Пока $\eta = \eta(x)$ остается выше прямой $\eta = x$, т.е. пока $z(x) \geq 0$ функция $t = \frac{z}{x}$ меняется монотонно в пределах $a - 1 \geq \frac{z(x)}{x} \geq 0$. На отрезке $[0, a-1]$ имеем: $P'_t(0) = n - 1$,

$$P''_{tt}(t) = n(n-1)(t+1)^{n-2} > 0 \qquad \text{при } n > 1.$$

Следовательно, $P(t) \geq (n-1)t$; тогда $R(t) \geq n - 1$.

Сравнивая теперь уравнение /3.1/ с уравнением $y'' + y(n-1) = 0$, получаем следующий результат: $z(x)$ обращается в нуль в интервале $(0, \frac{\pi}{\sqrt{n-1}})$. Следовательно, любое решение уравнения /1.3/ при $\eta'(0) = a > 1$, выйдя из нуля при $x = 0$, пересекает затем прямую $\eta = x$ в точке $x = x_0 < \frac{\pi}{\sqrt{n-1}}$.

Допустим, что при всех $a > 1$ решение $\eta = \eta(x)$ приходит на прямую $\eta = x$, монотонно возрастая. Запишем уравнение /1.3/ в виде:

$$\eta'' = A(x)\eta, \quad \text{где} \quad A(x) = 1 - \frac{\eta^{n-1}(x)}{x^{n-1}} < 0 \qquad \text{при } \eta(x) > x.$$

Умножая обе части уравнения на $2\eta'$ и интегрируя в пределах от 0 до $x = x_0$, получаем:

$$\eta'^2(x_0) = a^2 - \int_0^{x_0} |A(x)|\, d\eta^2;$$

$$|A(x)| = \frac{\eta^{n-1}(x)}{x^{n-1}} - 1 < a^{n-1} - 1, \quad \eta(x_0) < \frac{\pi}{\sqrt{n-1}}, \text{ поэтому}$$

$$\eta'^2(x_0) > a^2 - (a^{n-1} - 1)(\frac{\pi}{\sqrt{n-1}})^2 > 1 \text{ при } n < 3$$

и достаточно больших a. Согласно сделанному допущению о монотонности $\eta(x)$, при $0 \leq x \leq x_0$ $1 > \eta'(x_0) \geq 0$.

Полученное противоречие позволяет сделать вывод, что при достаточно больших a в интервале $[0, x_0]$ решение проходит через максимум. Пусть этот максимум достигается при $x = x_{max}$. Умножая обе части уравнения $\eta''(x) = A(x)\,\eta$ на $2\eta'$ и интегрируя в пределах от 0 до $x = x_{max}$, получаем:

$$-a^2 = \int_0^{x_{max}} A(x)\, d\eta^2 = A(\xi)\,\eta^2(x_{max}), \quad 0 < \xi < x_{max}.$$

Отсюда
$$\eta^2(x_{max}) = \frac{a^2}{|A(\xi)|} > \frac{a^2}{\max\limits_{0 \leq x \leq x_{max}} |A(x)|} = \frac{a^2}{a^{n-1} - 1} \to +\infty$$
при $a \to +\infty$ и фиксированном $n < 3$.

Рассмотрим интегральную кривую $\eta = \eta(x)$, $\eta'(0) > 1$, достигающую прямой $\eta = x$ в точке $x = x_0$. Так как $\eta''(x) > 0$ при $0 < \eta < x$, то для $\eta = \eta(x)$ возможен минимум при $x > x_0$ в области $0 \leq \eta \leq x$. Допустим, что минимум есть и достигается при $x = x_{min}$, так что $\eta'(x_{min}) = 0$, причем $\eta'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_{min}$ /мы ограничимся решениями с достаточно большими значениями $\eta'(0)$, такие решения, как было показано, имеют $\eta'(x_0) < 0$ /. Очевидно, $\eta(x_{min}) > 0$ в силу единственности решения $\eta(x) = 0$. Интегрируя уравнение /1.3/, умноженное на $2\eta'$, в интервале $[x_0, x_{min}]$, получаем:

$$\eta'^2(x_{min}) - \eta^2(x_{min}) = \eta'^2(x_0) - \eta^2(x_0) - 2\int_{x_0}^{x_{min}} \frac{\eta^n \eta'}{x^{n-1}}\, dx, \qquad /3.2/$$

$$-\eta^2(x_{min}) = \eta'^2(x_0) - \eta^2(x_0) - 2\int_{x_0}^{x_{min}} \frac{\eta^n \eta'}{x^{n-1}}\, dx, \qquad /3.3/$$

$\frac{\eta^n \eta'}{x^{n-1}} < 0$ при $x \in [x_0, x_{min}]$, поэтому $-2\int_{x_0}^{x_{min}} \frac{\eta^n(x)\,\eta'(x)}{x^{n-1}}\, dx > 0$.

Если $\eta'^2(x_0) - \eta^2(x_0) > 0$, то правая часть равенства /3.3/ положительна, левая – отрицательна, и равенство /3.3/ невозможно. Следовательно, решение $\eta = \eta(x)$ не имеет минимума, когда $x > x_0$, если $\eta'^2(x_0) > \eta^2(x_0) = x_0^2$. Оно не может также иметь какую-либо прямую $\eta = C\ (C \geq 0)$ асимптотой.

Действительно, в таком случае равенство /3.2/, переписанное для любого x, имеет вид $(x > x_0)$:

$$\eta'^2(x) - \eta^2(x) = \eta'^2(x_0) - \eta^2(x_0) - 2\int_{x_0}^{x} \frac{\eta^n \eta'}{x^{n-1}}\, dx; \qquad /3.4/$$

при $x > x_0$, $-2\int_{x_0}^{x} \frac{\eta^n \eta'}{x^{n-1}}\, dx > 0$, при $x \to \infty$ имеем: $\eta'^2(x) \to 0$, $\eta^2(x) \to C^2\ (C^2 \geq 0)$; $\eta'(x) < 0$ и равенство /3.4/ противоречиво. Следовательно, интегральная кривая $\eta = \eta(x)$ достигает при некотором $x = \bar{x}$ оси x, если $\eta'^2(x_0) > \eta^2(x_0)$, $\eta(x_0) = x_0$. Покажем, что это имеет место для всех решений $\eta = \eta(x)$, $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a > 1$ уравнения /1.3/ при достаточно больших a и $1 < n < 3$. Выберем такое $a = a_0$, что при $a > a_0$ кривая $\eta = \eta(x)$ проходит через максимум: $\eta'(x_{max}) = 0$, $0 < x_{max} < x_0$. Из доказанного выше следует, что это можно сделать. Отметим, что $\eta(x_{max}) \to +\infty$ при $a \to \infty$, $\eta(x_0) < \frac{\pi}{\sqrt{n-1}}$ и $\eta''(x) < 0$ при $\eta > x$.

Отсюда следует: можно выбрать такое $a_1 > a_0$, что при всех $a > a_1$ условие $\eta'^2(x_0) - \eta^2(x_0) > 0$ выполнено. Кривые $\eta = \eta(x)$ пересекают ось x при $x > x_0$ для таких a.

Покажем, что в случае $n = 3$ интегральные кривые уравнения /1.3/ также достигают оси x при $x > 0$, если $\eta'(0) = a > 1$ достаточно велико. Уравнение /1.3/ при $n = 3$ имеет вид:

$$\eta'' = \eta\,(1 - \frac{\eta^2(x)}{x^2}). \qquad /3.5/$$

Рассмотрим произвольное решение $\eta = \eta(x)$ уравнения /3.5/, такое, что $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a > 1$. Рассмотрим также уравнение

$$z'' = z\,(1 - a^2) \qquad /3.6/$$

и его решение $z = z(x)$, такое, что $z(0) = 0$, $z'(0) = \eta'(0) = a$. Очевидно, $z(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \sin\sqrt{a^2-1}\cdot x$, $z(\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}) = 0$, $z(x) > 0$ при $0 < x < \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. В области $\eta > 0$ имеем $\frac{\eta^2(x)}{x^2} - 1 < a^2 - 1$ для рассматриваемого решения уравнения /3.5/. Применяя к уравнениям /3.5/ и /3.6/ теорему о численном сравнении /см. [9] /, получаем неравенство $\eta(x) > \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \sin\sqrt{a^2-1}\cdot x$ на интервале $0 < x < \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

В частности, $\eta(\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}) > \frac{a}{\sqrt{a^2-1}} > 1$ при рассматриваемых a.

Функция $\frac{a}{\sqrt{a^2-1}} \sin\sqrt{a^2-1}\cdot x$ есть нижнее приближение к решению $\eta = \eta(x)$, $\eta(0) = 0$, $\eta'(0) = a$ на интервале $[0, \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}]$. Подстановка $\eta = ax$ в правую часть уравнения /3,5/ дает уравнение

$$\eta_-'' = a\, x(1-a^4) \qquad /3.7/$$

Его решение $\eta_-(x) = ax + \frac{a(1-a^2)}{6}x^3$, $\eta_-(0)=0$, $\eta_-'(0)=a$ также, очевидно, является нижним приближением к решению $\eta=\eta(x)$, по крайней мере, пока $\eta(x)$ и $\eta_-(x)$ остаются в области $\eta \geq x$. В этой области

$$\eta'' = f(x) < 0,$$

$$\eta_-'' = g(x) < 0, \quad \eta(0)=\eta_-(0)=0, \quad \eta'(0)=\eta_-'(0)=a,$$

причем $|\eta''(x)| = |f(x)| < |g(x)| = |\eta_-''(x)|$ в силу уравнения /3.7/.

Пусть $x=\bar{x}$ —точка пересечения кубической параболы $\eta_-(x)$ с прямой $\eta=x$, причем $\eta_-(x) > x$ при $0<x<\bar{x}$. Очевидно, $\eta(x)-\eta_-(x) = \int_0^x (x-t)\,(f(t)-g(t))\,dt > 0$,

$$\eta'(x)-\eta_-'(x) = \int_0^x (f(t)-g(t))\,dt > 0 \qquad (x \leq \bar{x}). \qquad /3.8/$$

Если теперь подставить $\eta=\eta_-(x)$ в правую часть уравнения /3.5/, получится уравнение

$$\eta_+''(x) = \eta_-\left(1-\frac{\eta_-^2}{x^2}\right) \qquad /3.9/$$

Применяя рассуждения, аналогичные сделанным выше для $\eta_-(x)$, убеждаемся, что $\eta_+(x)$ есть верхнее приближение к решениию на интервале $[0,\bar{x}]$, причем

$$\eta_+'(x) \geqslant \eta'(x), \qquad x \subset [0,\bar{x}]. \qquad /3.10/$$

Интегрируя уравнение /3.9/, получаем:

$$\eta_+'(x) = a + \frac{a(1-a^2)}{2}x^2 + \frac{a(1-a^2)(1-3a^2)}{24}x^4 - \frac{a^3(1-a^2)^2}{72}x^6 - \frac{a^3(1-a^2)^3}{8.6^3}x^8, \qquad /3.11/$$

$$\eta_+(x) = ax + \frac{a(1-a^2)}{6}x^3 + \frac{a(1-a^2)(1-3a^2)}{120}x^5 - \frac{a^3(1-a^2)^2}{504}x^7 - \frac{a^3(1-a^2)^3}{72\cdot 6^3}x^9, \qquad /3.12/$$

$$\eta_+(0)=0, \quad \eta_+'(0)=a, \quad x \subset [0,\bar{x}].$$

Нетрудно видеть, что точка $x = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}$ при всех достаточно больших a попадает в интервал $[0,\bar{x}]$. Действительно, $x=\bar{x}$ есть корень уравнения

$$\eta_-(x) = x.$$

Отсюда $\bar{x} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{a(a+1)}}$. Неравенство $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{a(a+1)}} > \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}$ справедливо при всех $a > \frac{6}{6-\frac{\pi^2}{4}}$. Выясним, наконец, вопрос о величине производной, с которой решение $\eta=\eta(x)$ приходит на прямую $\eta=x$, если $\eta'(0)=a\to+\infty$. Обозначим точку $x=\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}$ через x_0 и выпустим из точки $(x_0,\eta)=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}},\,1\right)$ пучок прямых $\eta=kx+A$, $k<0$.

Фиксируем k и делаем подстановку $\eta=kx+A$ в правую часть уравнения /3.5/; получим некоторое уравнение $z''=f(x,a,k)$; его интеграл

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(t,a,k)\,dt + z_0'\cdot(x-x_0)+z_0, \qquad /3.13/$$

где $z_0 = z(x_0)$, $z_0' = z'(x_0)$, $z_0 > \eta(x_0)$, $z_0' > \eta'(x_0)$,

обладает следующим свойством. Пусть прямая $\eta=kx+A$ пересекает прямую $\eta=x$ в точке $x=x_1$. Допустим, что решение уравнения /3.5/ при выбранном a пересекает прямую $\eta=x$ в точке $x_2>x_1$. Тогда в силу заданного соотношения начальных условий для $z(x)$ и $\eta(x)$ в точке $x=x_0$ и неравенства $|\eta''(x)|>|z''(x)|$ при всех $x\subset[x_0,x_1]$, $(\eta''(x)<0)$

функция $z(x)$ является верхним приближением к решению $\eta=\eta(x)$ на интервале $[x_0,x_1]$.

В уравнении прямой $\eta=kx+A$ имеем $A = 1-\frac{k\pi}{2\sqrt{a^2-1}}$; $x_1 = \frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}}$.

Уравнение для $z(x)$ таково:

$$z'' = (kx+A) - \frac{1}{x^2}(kx+A)^3 = f(x,a,k).$$

В силу равенства /3.13/ вточке $x=x_1$ имеем:

$$z(x_1) = \frac{k(1-k^2)}{6}\left[\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}}\right]^3 - \frac{k(1-k^2)}{6}\,\frac{\pi^3}{8(a^2-1)^{3/2}} +$$

$$+\frac{A(1-3k^2)}{2}\left[\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}}\right]^2 - \frac{A(1-3k^2)}{2}\,\frac{\pi^2}{4(a^2-1)} -$$

$$-3kA^2\cdot\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}}\,\ln\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} + 3kA^2\,\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}\,\ln\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} +$$

$$+3kA^2\cdot\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} - 3kA^2\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} + A^2\ln\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} - A^3\ln\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} -$$

$$-\frac{k(1-k^2)\pi^2}{8(a^2-1)}\,\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} - \frac{A\pi(1-3k^2)}{2(1-k)}\,\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)(a^2-1)}(1-k) + \qquad /3.14/$$

$$+3A^2k\cdot\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}}\,\ln\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} - \frac{2A^3\sqrt{a^2-1}}{\pi}\cdot\frac{2[\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} +$$

$$+z_0'\cdot\frac{2\sqrt{a^2-1}-k\pi}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} + \frac{k(1-k^2)\pi^2}{8(a^2-1)}\,\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} + \frac{A\pi(1-3k^2)}{2\sqrt{a^2-1}}\,\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} -$$

$$-3kA^2\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} + A^3 - z_0'\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} + z_0.$$

Делая a достаточно большим, $a\to+\infty$, при фиксированном k получаем $A = 1 + o\left(\frac{1}{a}\right)$; в силу /3.14/ имеем:

$$z(x_1) = \frac{k(1+k)}{6(1-k)^2} + \frac{A(1-3k^2)}{2(1-k)^2} - \frac{3A^2k}{1-k}\ln\frac{1}{1-k} + \frac{3A^2k}{1-k} + A^3\ln\frac{1}{1-k} -$$

$$-A^3\ln\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} + \frac{3A^2k}{1-k}\ln\frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}} - \frac{2A^3\sqrt{a^2-1}}{\pi(1-k)} + \frac{A^3k}{1-k} + \frac{z_0'}{1-k} - \qquad /3.15/$$

$$-\frac{k\pi z_0'}{2(1-k)\sqrt{a^2-1}} + A^3 - \frac{\pi}{2\sqrt{a^2-1}}z_0' + z_0 + O\left(\frac{1}{a}\right).$$

Выберем в качестве значений z_0 и z_0' верхние границы значений $\eta_+(x_0)$ и $\eta_+'(x_0)$. Так как $x_0 \subset [0,\bar{x}]$ при $a > \frac{6}{6-\frac{\pi^2}{4}}$, то

$$\eta_+(x_0) \geqslant \eta(x_0), \quad \eta_+'(x_0) \geqslant \eta'(x_0).$$

В силу равенства /3.12/

$$\eta_+(x_0) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{504}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \frac{1}{72.6^3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9 + O\left(\frac{1}{a}\right) < C = 3$$

при достаточно больших a.

В силу равенства /3.11/

$$\eta_+'(x_\bullet)=a\left[1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{72}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6+\frac{1}{2^6\,3^3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4-\frac{1}{72}\left(\frac{\pi}{2}\right)^6+\frac{1}{2^6\cdot 3^3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^8\right]\cdot\frac{a}{(\sqrt{a}-1)^2}=P\,a+Q\,\frac{a}{a^2-1}\,.$$

При $a>\frac{6}{6-\frac{\pi^2}{4}}$ справедливо неравенство $\eta_+'(x_0)<Pa+Q$. Очевидно, $P<0.35$; $Q<0.35$. При достаточно больших значениях a имеем: $\eta_+'(x_0)<0.4\,a$.

Завершим оценку для $z(x_1)$, исходя из формулы /3.15/:

$$z(x_1)=-\left(\frac{2}{\pi}-0,4\right)\frac{1}{1-k}\,a-\left(1-\frac{3k}{1-k}\right)\ln\frac{1}{a}+C_k+O\left(\frac{1}{a}\right), \qquad /3.16/$$

C_k -константа, соответствующая данному k; $1-k>0$ по предположению о знаке k; $\frac{2}{\pi}-0.4>0$. Очевидно тогда, что при достаточно большом a имеем:

$$z(x_1)<0, \quad \left(\lim_{a\to\infty} z(x_1)=-\infty\right).$$

Следовательно, предположение о том, что можно задать такое конечное k, при котором все интегральные кривые уравнения /3.5/ с производными $\eta'(0)=a>1$ пересекут прямую $\eta=x$ правее прямой $\eta=kx+A$, неверно.

Можно теперь утверждать: для любого сколь угодно большого по модулю /но фиксированного/ k, $k<0$, найдется такое a_0, что все решения уравнения /3.5/ с начальными производными $a>a_0$ пересекают при $x>0$ прямую $\eta=x$, имея отрицательную производную, по модулю не меньшую, чем $|k|$.

Это равносильно утверждению:
все решения при $a>a_0$ пересекают ось x правее $x=0$. Согласно доказанному ранее, достаточно взять $|k|>\frac{\pi}{\sqrt{n-1}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ в случае уравнения /3.5/.

Доказательство ограниченности сверху множества L_1^a, которое будет рассматриваться далее определенным для уравнения /2.1/, закончено.

Пусть $L_1^a=\{\eta_0'\}$, $\eta_0'=\eta'(0)>0$.

Положим $\sup\{\eta_\bullet'\}=\bar\eta_0'$ и рассмотрим решение $\eta=\bar\eta(x)$ уравнения /2.1/, такое, что $\bar\eta(0)=0$, $\bar\eta'(0)=\bar\eta_0'$. Кривая $\bar\eta(x)$ пересечет в точке $x=x_0$ прямую $\eta=x$. Допустим, что при $x_1>x_\bullet$ $\bar\eta(x_1)=0$; очевидно, $\bar\eta'(x_1)<0$. Так как $\eta''<0$ при $\eta<0$, то $\bar\eta'(x_1)\cdot x-x_1\cdot\bar\eta'(x_1)=\bar\eta(x)$ при $x\geq x_1$. Возьмем некоторое $\epsilon>0$; в точке $x=x_1+\epsilon_0$ имеем:

$$|\bar\eta(x_1+\epsilon_0)|=|\bar\eta'(x_1)|\,\epsilon_0\,.$$

Выберем $\epsilon<\frac{|\bar\eta'(x_1)|\epsilon_0}{2}$. Согласно лемме 3, можно указать такое $\delta=\delta(\epsilon, x_1+\epsilon_0)$, что при всех $x\subset[0, x_1+\epsilon_0]$ $|\eta(x)-\bar\eta(x)|<\epsilon$, $|\eta'(x)-\bar\eta'(x)|<\epsilon$, где $\eta(x)$ -решения уравнения /2.1/ такие, что $\eta(0)=0$ и $|\eta'(0)-\bar\eta'(0)|<\delta$. Все такие решения пересекают ось x, ибо $\eta(x_1+\epsilon_0)<-|\eta'(x_1)|\cdot\epsilon_0$

Это противоречит определению $\bar\eta_0'=\sup\{\eta_0'\}$ в множестве L_1^a, и, следовательно, кривая $\bar\eta(x)$ не пересекает оси x при $x>0$. Допустим, что $\bar\eta(x)$ при $x>x_0$, не достигнув оси x, начинает возрастать.

Пусть x_1 и x_2 -две такие точки, что $x_1>\bar\eta(x_1)=\epsilon_1$, $x_2>x_1$, $x_2>\bar\eta(x_2)$ и $\bar\eta'(x)>0$ при $x\subset(x_1,x_2]$.

Возьмем $\epsilon<\min\left(\frac{\bar\eta(x_2)-\epsilon_1}{2}, \frac{\epsilon_1}{2}, \frac{x_2-\bar\eta(x_2)}{2}\right)$. Согласно лемме 3, найдется такое $\delta=\delta(\epsilon,x_2)>0$, что при всех $x\subset[0,x_2]$ $|\eta(x)-\bar\eta(x)|<\epsilon$, где $\eta(x)$ -решения уравнения /2.1/ такие, что $\eta(0)=0$, $|\eta'(0)-\bar\eta'(0)|<\delta$. В силу выбора ϵ любая такая кривая $\eta=\eta(x)$ пересекает в некоторой точке $x=\bar x_0$ прямую $\eta=x$, имеет $\eta'(x_2)>0$ и $\eta'(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=x_2$. При $\eta<x$ $\eta''(x)>0$. Легко видеть, что рассматриваемая кривая $\eta=\eta(x)$ при некотором $x_3>x_2$ в области $\eta>0$ вновь пересечет прямую $\eta=x$.

Для соответствующего решения $y=y(x)$, $y(0)=y_0=\eta'(0)$, $y'(0)=0$ уравнения /1.1/ это означает, что $y(\bar x_0)=1$, $y(x_3)=1$ в области $y>0$. Следовательно, траектория, изображающая движение $y=y(x)$, $y(0)=\eta'(0)$, $y'(0)=0$ на фазовой плоскости (y,y') проходит в полуплоскости $y>0$ через точки $/1,-|y'(\bar x_0)|)$, $(1,|y'(x_3)|)$; Это означает, что в некоторый момент $x=\bar x$ $(\bar x_0<\bar x<x_3)$ траектория проходит через точку / $y(\bar x), 0$ / и остается затем в области $y>y(\bar x)$ для всех $x>\bar x$ /см. рис. 2 и доказательство леммы 1/.

Тогда для решений $\eta=\eta(x)$ уравнения /1.3/, проходящих на интервале $[0,x_2]$ в ϵ - окрестности решения $\bar\eta(x)$, получается неравенство: $\eta(x)>\frac{\eta(\bar x)}{\bar x}\,x$, при $x_2<x<\infty$ такие решения никогда не пересекут ось x. Этот результат также противоречит определению $\bar\eta_\bullet'$.

Кривая $\eta=\bar\eta(x)$ не может также приближаться асимптотически к какой-либо прямой $\eta=C\neq0$. Действительно, в противном случае в силу уравнения /1.3/ $\frac{\bar\eta^2}{x^2}\to0$ при $x\to\infty$, $\bar\eta''\to\bar\eta$, т.е. $\bar\eta''\to C\neq0$, следовательно, $\bar\eta'(x)\not\to0$, и $\bar\eta(x)\to+\infty$ при $x\to\infty$.

Итак, $\eta=\bar\eta(x)$ есть положительное решение задачи /2.1/-/2.2/ и, следовательно, задачи /1.3/-/1.4/.

Проведение необходимых доказательств существования положительного решения задачи /1.1/-/1.2/ после приведенных рассуждений не представляет труда.

Теорема 2 доказана.

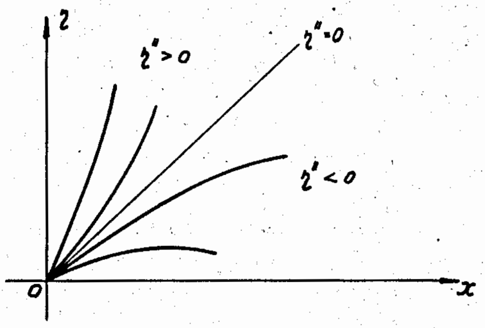
Литература

1. R.J.Finkelstein, R.Lelevier, M.Ruderman. Phys. Rev., 83, 326 (1951).
2. Rosen, Rosenstock. Phys. Rev., 85, 257 (1952).
3. R.J.Finkelstein, C.Fronsdal, P.Kaus Phys. Rev., 103, 1571 (1956).
4. В.Б. Гласко, Ф. Лерюст, Я.П. Терлецкий, С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейного уравнения скалярного поля. ЖЭТФ, т. 35, вып.2/8/, /1958/.
5. С.Ф. Шушурин. Исследование частицеподобных решений нелинейных уравнений поля. Диссертация, МОПИ, 1961.
6. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. I, ИЛ 1953.
7. Дж. Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II., ИЛ, 1954.

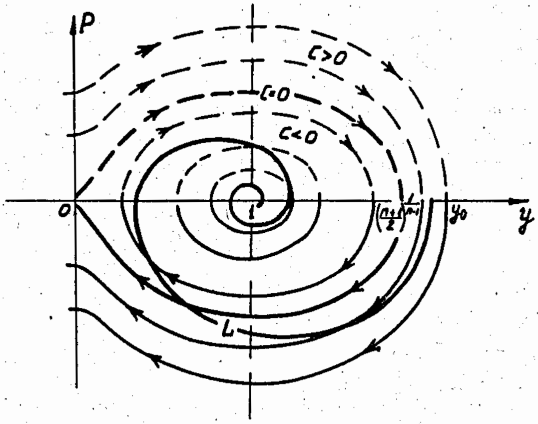
8. В.А. Чечик. Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с с гулярностью. Диссертация, Воронеж, 1956.

9. Ф. Трикоми. Дифференциальные уравнения. ИЛ, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июня 1963 г.



Р и с. 1. Интегральные кривые уравнения /1.3/ при $0 < n < 1$.



Р и с. 2. Траектории систем /2.6/ и /2.5/ на плоскости / y , p / при $n > 1$.