

1318



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталеv

P-1318

МЕТОД ФРЕДГОЛЬМА
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ

Дубна 1963

Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталеv

P-1318

МЕТОД ФРЕДГОЛЬМА
В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ

Дубна 1963

I. Введение

Настоящая работа посвящена изучению аналитических свойств и асимптотики амплитуды упругого рассеяния двух частиц. В нерелятивистской теории с потенциалом вида

$$V(r) = \int_{\rho^2}^{\infty} d\nu U(\nu) \frac{e^{-\nu r}}{r} \quad (\text{I.1})$$

удалось получить / при весьма общих предположениях относительно $U(\nu)$ / представление Мандельштама^{/1/} и с помощью преобразования Ватсона-Зоммерфельда найти асимптотику амплитуды рассеяния при больших значениях косинуса угла рассеяния^{/2/}. В квантовой теории поля информацию об асимптотике амплитуды рассеяния обычно извлекают из соотношений унитарности и представления Мандельштама, справедливость которого до сих пор не доказана. Представление Мандельштама используется при этом для доказательства аналитичности парциальной амплитуды рассеяния в некоторой части ℓ -плоскости и для установления связи между особенностями в ℓ -плоскости и асимптотикой амплитуды рассеяния при больших энергиях^{/3/}. Для получения этого результата не обязательно, однако, пользоваться представлением Мандельштама. Может случиться так, что представления Мандельштама нет, но тем не менее в некоторой части ℓ -плоскости парциальная амплитуда аналитична, и асимптотика амплитуды рассеяния по $\cos \delta$ (δ - угол рассеяния в системе центра инерции) определяется особенностями парциальной амплитуды по ℓ . В связи с этим целесообразно разработать метод, позволяющий изучать аналитические свойства парциальной амплитуды и асимптотики амплитуды рассеяния по $\cos \delta$ непосредственно, без использования гипотезы о представлении Мандельштама.

Для этой цели весьма удобен метод описания амплитуды рассеяния и связанных состояний двух частиц с помощью уравнения типа Шредингера с обобщенным комплексным потенциалом^{/4/}. В случае рассеяния бесспиновых частиц с равными массами такое уравнение имеет вид^{/4/}:

$$\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} (\vec{k}^2 - \vec{p}^2) \psi(\vec{p}) = \int d^3q V(\vec{p}, \vec{q}; k^2) \psi(\vec{q}), \quad (\text{I.2})$$

где \vec{k}^2 - импульс частиц в системе центра инерции, связанный с квадратом полной энергии $s = 4E^2$ соотношением

$$s = 4(\vec{k}^2 + m^2). \quad (\text{I.3})$$

Инвариантную амплитуду рассеяния $T(\vec{p}, \vec{k})$ удобно ввести с помощью соотношения (см. приложение)

$$\psi(\vec{p}) = \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{T(\vec{p}, \vec{k})}{(\vec{k}^2 - \vec{p}^2 + i0)\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} \quad (\text{I.4})$$

Подставляя (I.4) в (I.2), находим уравнение для амплитуды рассеяния:

$$T(\vec{p}, \vec{E}) = V(\vec{p}, \vec{E}, E^2) + \int \frac{d^3q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \frac{V(\vec{p}, \vec{q}, k^2) T(\vec{q}, E)}{k^2 - q^2 + i0} \quad (I.5)$$

В общем случае $V(\vec{p}, \vec{q}, k^2)$ — весьма сложная функция от p^2 , q^2 , $\vec{p}\vec{q}$ и k^2 . В работе [5] показано, однако, что можно построить потенциалы более простого вида, которые приводят к тем же самым значениям амплитуды рассеяния $T(\vec{p}, \vec{E})$ "на энергетической поверхности", т.е. при $\vec{p}^2 = E^2 = E^2 - m^2$. Учитывая результаты этой работы, мы предположим, что четные и нечетные проекции амплитуды T^{\pm} удовлетворяют уравнениям

$$T^{\pm}(\vec{p}, \vec{E}) = V^{\pm}(\vec{p}, E^2; k^2) + \int \frac{d^3q}{\sqrt{q^2 + m^2}} \frac{V^{\pm}(\vec{p}, \vec{q}; k^2) T^{\pm}(\vec{q}, E)}{k^2 - q^2} \quad (I.6)$$

где потенциалы V^{\pm} представимы в виде:

$$V^{\pm}(\vec{p}, \vec{q}; k^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu \frac{U^{\pm}(\nu, k^2)}{\nu + i(\vec{p} - \vec{q})^2} \quad (I.7)$$

причем^{x)}

$$\int_{\mu^2}^{\infty} d\nu U^{\pm}(\nu, k^2) < \infty \quad (I.8)$$

Мы предполагаем далее: (а) что функции $U^{\pm}(\nu, k^2)$, определенные для $\mu^2 \leq \nu < \infty$ в некоторой области \mathcal{K} комплексной k^2 -плоскости, аналитичны в этой области, за исключением, может быть, точек ветвления, расположенных на вещественной оси; заметим, что, кроме точек ветвления, соответствующих порогам различных неупругих процессов, спектральные функции $U^{\pm}(\nu, k^2)$ могут иметь некоторые дополнительные точки ветвления, происхождение которых связано с наличием $\sqrt{q^2 + m^2}$ в уравнении (I.6); более подробное обсуждение этих точек ветвления будет проведено ниже.

Мы предполагаем: (б) что спектральные функции вещественны на некотором интервале I с \mathcal{K} действительной оси k^2 , содержащем точку $k^2 = 0$ (разумеется, на этом интервале функции $U^{\pm}(\nu, k^2)$ не имеют точек ветвления); это предположение обеспечивает вещественность потенциалов в области, соответствующей упругому рассеянию и связанным состояниям.

В настоящей работе изучаются аналитические свойства и асимптотика амплитуд T^{\pm} , удовлетворяющих уравнению (I.6) с потенциалами V^{\pm} , для которых выполнены условия (I.7), (I.8)

x) Условия (I.7) и (I.8) означают, что потенциал в τ -пространстве $V^{\pm}(\nu, k^2)$, связанный с $U^{\pm}(\nu, k^2)$ формулой (I.1) с точностью до численного множителя, представим в виде суперпозиции обобщенных потенциалов Юкава и при $\tau \rightarrow 0$ возрастает не быстрее $1/\tau$.

и предположения (а) и (б). С этой целью мы исследуем решения уравнений для амплитуд парциальных волн, полученные методом Фредгольма (см., например, /6/), а затем применим к ним преобразование Ватсона-Зоммерфельда.

§ 2. Решение уравнений для парциальных амплитуд. Мероморфность в ℓ -плоскости

Разложим проекции амплитуды и потенциалы по парциальным волнам^x

$$T^{\pm}(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{1}{2pp'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_{\ell}^{\pm}(p, p') Q_{\ell}\left(\frac{\vec{p}\vec{p}'}{pp'}\right), \quad (2.1)$$

$$V^{\pm}(\vec{p}, \vec{p}', k) = \frac{1}{2pp'} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) F_{\ell}^{\pm}(p, p', k^2) Q_{\ell}\left(\frac{\vec{p}\vec{p}'}{pp'}\right) \quad (2.2)$$

и, воспользовавшись соотношением

$$\int d\Omega_{\vec{q}} Q_{\ell}\left(\frac{\vec{p}\vec{q}}{pq}\right) Q_{\ell}\left(\frac{\vec{q}\vec{p}'}{qp'}\right) = \delta_{\ell\ell'} \frac{4\pi}{2\ell+1} Q_{\ell}\left(\frac{\vec{p}\vec{p}'}{pp'}\right), \quad (2.3)$$

легко найти уравнения для парциальных амплитуд:

$$f_{\ell}^{\pm}(p, p') = F_{\ell}^{\pm}(p, p', k^2) + \int_0^{\infty} dq \frac{2\pi F_{\ell}^{\pm}(p, q, k^2) f_{\ell}^{\pm}(q, p')}{\sqrt{q^2 - m^2} (k^2 - q^2)} \quad (2.4)$$

Из известного разложения

$$\frac{1}{v + (\vec{p} - \vec{q})^2} = \frac{1}{2pq} \frac{1}{\frac{p^2 + q^2 + v}{2pq} - \frac{\vec{p}\vec{q}}{pq}} = \frac{1}{2pq} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) Q_{\ell}\left(\frac{p^2 + q^2 + v}{2pq}\right) Q_{\ell}\left(\frac{\vec{p}\vec{q}}{pq}\right) \quad (2.5)$$

и формул (1.7) и (2.2) получаем для F_{ℓ}^{\pm} представление

$$F_{\ell}^{\pm}(p, q, k^2) = \int_{\vec{p}^{\pm}}^{\infty} d\nu V^{\pm}(\nu, k^2) Q_{\ell}\left(\frac{p^2 + q^2 + \nu}{2pq}\right). \quad (2.6)$$

Для решения уравнения (2.4) положим (в дальнейшем мы опускаем значки \pm)

$$R_{\ell}(p, p') = \Psi(p) f_{\ell}(p, p') \Psi(p'), \quad (2.7)$$

^x Заметим, что импульсы \vec{p} и \vec{p}' не лежат на энергетической поверхности, т.е. никак не связаны с E . Переход на энергетическую поверхность можно выполнить, положив $|\vec{p}| = |\vec{p}'| = |\vec{k}|$,

где

$$\varphi(\rho) = \left[\frac{2s}{\sqrt{\rho^2 + m^2}(k^2 - \rho^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

Функция R_ℓ удовлетворяет уравнению

$$R_\ell(\rho, \rho') = X_\ell(\rho, \rho'; k^2) + \int_0^\infty dq X_\ell(\rho, q; k^2) R_\ell(q, \rho') \quad (2.9)$$

где

$$X_\ell(\rho, \rho'; k^2) = \varphi(\rho) X_\ell(\rho, \rho'; k^2) \varphi(\rho') \quad (2.10)$$

Таким образом, функция R_ℓ есть резольвента ядра X_ℓ , и ее можно представить в виде отношения двух рядов Фредгольма^{/6/}:

$$R_\ell(\rho, \rho') = \frac{Q_\ell(\rho, \rho'; k^2)}{D_\ell(k^2)} \quad (2.11)$$

Здесь

$$D_\ell(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{i_1}^{\infty} \dots \int_{i_n}^{\infty} dq_1 \dots dq_n X_n(q_1, \dots, q_n) \quad (2.12)$$

$$Q_\ell(\rho, \rho'; k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{i_1}^{\infty} \dots \int_{i_n}^{\infty} dq_1 \dots dq_n X_{n+1}(\rho, q_1, \dots, q_n, \rho') \quad (2.13)$$

$$X_n = 1, \quad X_n(q_1, \dots, q_n) = \det \| X_\ell(q_i, q_j; k^2) \|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Ряды (2.12) и (2.13) сходятся, если^{/7/}

$$\int_0^\infty dq_1 \dots dq_n |X_\ell(q_1, q_n; k^2)|^2 < \infty \quad (2.15)$$

Вспользовавшись условием (1.8) и асимптотической формулой для функций Лежандра

$$Q_\ell(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\ell+1}} \frac{\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(\ell+1/2)} z^{-\ell-1} \quad (2.16)$$

нетрудно установить, что интеграл (2.15) ограничен при $\text{Re} \ell > -1$, если k^2 принадлежит области \mathcal{K}' , полученной из \mathcal{K} выбрасыванием разреза $k^2 \geq 0$. Так как Q_ℓ - аналитическая функция от ℓ при $\ell \neq -1, -2, \dots$ (в этих точках она имеет простые полюсы), то в силу сходимости рядов (2.12) и (2.13) функции $D_\ell(k^2)$ и $Q_\ell(\rho, \rho'; k^2)$ аналитичны в полуплоскости $\text{Re} \ell > -1$ (за исключением полюса при $\ell = -1$), если при этом $k^2 \in \mathcal{K}'$. В этой полуплоскости R_ℓ - мероморфная функция от ℓ и может иметь полюсы только в нулях функции $D_\ell(k^2)$. Как функция двух комплексных переменных ℓ и k^2 , $D_\ell(k^2)$ аналитич-

на в топологическом произведении областей $Rel > -1$ и \mathcal{K}' .

§ 3. Структура парциальной амплитуды. Спектральное представление для $\mathcal{D}_e(k^2)$

Здесь мы покажем, что метод Фредгольма автоматически приводит к \mathcal{N}/\mathcal{D} -структуре (см., например, /8/) парциальной амплитуды f_e , и найдем выражение f_e через $\mathcal{D}_e(k^2)$. Из формул (2.7), (2.8) и (2.10)–(2.14) следует, что

$$f_e(p, p') = \varphi^{-1}(p) R_e(p, p') \varphi^{-1}(p') = \frac{\mathcal{N}_e(p, p', k^2)}{\mathcal{D}_e(k^2)}, \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{N}_e(p, p', k^2) = \varphi^{-1}(p) \mathcal{D}_e(p, p', k^2) \varphi^{-1}(p') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n dq_i \frac{z^n}{\sqrt{q_i^2 + m^2}(k^2 - q_i^2)} \mathcal{F}_n(p, q_1, \dots, q_n), \quad (3.2)$$

$$\mathcal{D}_e(k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n dq_i \frac{z^n}{\sqrt{q_i^2 + m^2}(k^2 - q_i^2)} \mathcal{F}_n(q_1, \dots, q_n), \quad (3.3)$$

$$\mathcal{F}_0 = 1, \quad \mathcal{F}_n(q_1, \dots, q_n) = \det_{(i,j)} \|\mathcal{F}_e(q_i, q_j; k^2)\|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

Очевидное тождество

$$\prod_i \frac{1}{q_i^2 - q^2} = \sum_i \frac{1}{q_i^2 - q^2} \prod_{j \neq i} \frac{1}{q_j^2 - q^2} \quad (3.5)$$

позволяет без труда получить соотношение между (3.2) и (3.3):

$$\mathcal{D}_e(k^2) = 1 - \int_0^{\infty} dq \frac{z}{\sqrt{q^2 + m^2}(k^2 - q^2)} \tilde{\mathcal{N}}_e(q, q, q^2, k^2), \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{\mathcal{N}}_e(q, q, q^2, k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n dq_i \frac{z^n}{\sqrt{q_i^2 + m^2}(q^2 - q_i^2)} \mathcal{F}_{n+1}(q, q, \dots, q_n). \quad (3.7)$$

Отметим, что формула (3.6) получается в результате чисто алгебраических преобразований, и для ее справедливости достаточно сходимости рядов Фредгольма. Эта формула аналогична соответствующему соотношению обычного \mathcal{N}/\mathcal{D} -метода.

Рассмотрим $Q_p(k^2)$ в k^2 -плоскости. На отрезке I, где потенциал не имеет точек ветвления, из (3.6) при $k^2 > 0$ обозначим пересечение отрезка I и полупрямой $k^2 = 0$ через $(0, k_i^2)$ / следует соотношение

$$Q_p(k^2 - i0) - Q_p(k^2 + i0) = 2\pi^2 i \frac{1}{k\sqrt{k^2 - m^2}} N_p(k^2), \quad 0 \leq k^2 \leq k_i^2, \quad (3.8)$$

где

$$N_p(k^2) = N_p(k, k; k^2) = \tilde{N}_p(k, k; k^2, k^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dq_1 \dots dq_n \frac{2\pi}{\sqrt{q^2 - m^2}(k^2 - q_i^2)} \mathcal{F}_{n+1}(k, q_1, \dots, q_n). \quad (3.9)$$

Функция $N_p(k^2)$ не имеет особенностей на отрезке $0 \leq k^2 \leq k_i^2$, так как при $k = q_i$ определитель $\mathcal{F}_{n+1}(k, q_1, \dots, q_n)$ в формуле (3.7) обращается в нуль.

На энергетической поверхности амплитуда f_p имеет вид:

$$f_p(k^2) = f_p(k, k) = \frac{N_p(k^2)}{Q_p(k^2)}. \quad (3.10)$$

При $0 \leq k^2 \leq k_i^2$ она определяется отношением граничных значений $Q_p(k^2)$:

$$f_p(k^2 + i0) = \frac{N_p(k^2)}{Q_p(k^2 + i0)} = i \frac{k\sqrt{k^2 - m^2}}{2\pi^2} \left[\frac{Q_p(k^2 - i0)}{Q_p(k^2 + i0)} - 1 \right]. \quad (3.11)$$

Отсюда находим соотношение унитарности на отрезке $0 \leq k^2 < k_i^2$:

$$\frac{f_p(k^2) - f_{p^*}^*(k^2)}{2i} = -\pi^2 \frac{1}{k\sqrt{k^2 - m^2}} f_p(k^2) f_{p^*}^*(k^2). \quad (3.12)$$

§ 4. Аналитические свойства N_p в k -плоскости.

В предыдущем разделе мы уже отметили, что обращение в нуль знаменателей в формуле (3.9) не приводит к появлению точек ветвления в $N_p(k^2)$. Поэтому $N_p(k^2)$ не имеет особенностей, если $0 \leq k^2 < k_i^2$. Рассматривая N_p как функцию от k / обозначим ее в этом случае $N_p(k)$ / находим, что она не имеет особенностей, если k принадлежит отрезку $-k_i < k < k_i$. Из формул (3.9), (3.4) и (2.6) видно теперь, что при аналитическом продолжении вдоль какой-либо кривой особенности в $N_p(k)$ могут появляться лишь по двум причинам: 1) если мы наталкиваемся на особенность в $U(r, \lambda)$, 2) если в одной из функций $Q_p\left(\frac{k^2 + q^2 + \nu}{2kq}\right)$ появляется особая точка, которую нельзя устранить деформацией контуров интегрирования ("совпадающие" особенности или же "граничная" особенность).

Рассмотрим второй случай. $Q_p(k^2)$ имеет особые точки $z = \infty$, $z = +I$, $z = -I$. С по-

мощью (2.16) легко выделить первую особую точку. Разделив $Q_e \left(\frac{k^2 + q^2 + \nu}{2kq} \right)$ на $(qk)^{e-1}$, мы тем самым добьемся, что особенности при $k = 0$ не будут. Ограничимся поэтому изучением особенностей при $z = \pm 1$. Уравнение для особенностей в q -плоскости

$$\frac{k^2 + q_{i,2}^2 + \nu}{2kq_{i,2}} = \pm 1 \quad (4.1)$$

имеет решение

$$q_{i,2} = \pm k \pm i\sqrt{\nu} \quad (4.2)$$

Здесь выбор знака перед $i\sqrt{\nu}$ не связан с выбором знака в (4.1).

Пусть k движется от нуля по лучу, лежащему в первом квадранте k -плоскости (см. рис. I). Если повернуть контуры интегрирования по $q_{i,2}$ на угол φ , то линия особенностей (4.2) не будет пересекать эти контуры. Повернем на угол φ контуры интегрирования по остальным q , тогда аргументы соответствующих функций Лежандра будут равны

$$\frac{q_i^2 + q_j^2 + \nu e^{-2i\varphi}}{2q_i q_j} \quad (4.3)$$

так что при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ функции Лежандра будут регулярными. Функция $\sqrt{\sqrt{q^2 + m^2}}$ имеет особые точки только на мнимой оси ($q = \pm im$), т.е. при $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ мы не попадаем на ее особенность. Возможность поворота контуров интегрирования следует из того, что интеграл по дугам, соединяющим новый контур интегрирования с первоначальным, равен нулю. Прделав такую же процедуру для k , двигающегося по лучам в остальных квадрантах, мы выполним аналитическое продолжение $\mathcal{N}_e(k)$ на всю комплексную k -плоскость, исключая разрезы по мнимой оси и разрезы потенциала^{x)}.

Точки ветвления на мнимой оси возникают потому, что при движении k по мнимой оси линия особенностей упирается в границу контура интегрирования ("граничная" особенность). "Совпадающие" особенности в рассматриваемом нами случае не появляются. Ближайшие точки ветвления на мнимой оси $\pm i\frac{m}{2}$ возникают из-за членов, содержащих $Q_e \left(1 + \frac{2\nu}{2k} \right)$. Следующие точки ветвления $\pm i\mu$ появляются благодаря членам, содержащим $Q_e \left(\frac{k^2 + q^2 + \nu}{2kq} \right) Q_e \left(\frac{k^2 + q^2 + \nu}{2kq} \right)$, и т.д. Заметим, что наличие множителя $\sqrt{\sqrt{q^2 + m^2}}$ в рассматриваемых интегралах приводит к дополнительным точкам ветвления на мнимой оси. Например, выражение, содержащее

$$Q_e \left(\frac{k^2 + q^2 + \nu}{2kq} \right) Q_e \left(\frac{k^2 + q^2 + \nu}{2kq} \right)$$

x) Если потенциал определен в конечной части плоскости, то мы сможем выполнить аналитическое продолжение на эту часть.

и равное второму приближению Борна для амплитуды f_ℓ , имеет дополнительные точки ветвления $\pm i(m+\mu)$ и др.^{x)}. В этом проше всего убедиться, применив описанную процедуру в случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 2). Обходя точку $k=0$ и двигаясь дальше по мнимой оси, мы упираемся в особую точку подинтегрального выражения $i m$. Эти дополнительные особенности не имеют физического смысла и не должны содержаться в амплитуде f_ℓ . По-видимому, они компенсируются соответствующими особенностями в потенциале / см. § I, предположение (а) / Компенсация может происходить автоматически при построении потенциала вида (I.7) по заданной амплитуде на массовой поверхности^{15/}. Перейдем к построению представления для $M_\ell(k^2)$, удобного для исследования асимптотики по ℓ .

Заметим, что в k^2 -плоскости функция $M_\ell(k^2) = \frac{M_\ell(k^2)}{k^{2\ell+1}}$ не имеет точки ветвления при $k^2=0$. Действительно, особенность при $k^2=0$, содержащаяся в функциях Q_ℓ , явно выделена множителем $k^{2(\ell+1)}$, появление же точки ветвления корневого типа при переходе от k -плоскости к k^2 -плоскости предотвращается инвариантностью функции $\frac{M_\ell(k)}{k^{2\ell+1}}$ при замене k на $-k$.

§ 5. Аналитические свойства Q_ℓ в k -плоскости. Функции Нюста

Заметим, что знаменатель Q_ℓ можно представить в виде:

$$Q_\ell(k^2) = \frac{2x^2 i (k^2)^\ell}{1 + e^{2x i \ell}} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 - m^2}} M_\ell(k^2) + \Phi_\ell(k^2), \quad (5.1)$$

где $\Phi_\ell(k^2)$ не имеет точки ветвления при $k^2=0$, но имеет левый разрез $(-\infty, -\frac{k^2}{m^2})$, так что скачок $\Phi_\ell(k^2)$ на этом разрезе компенсирует скачок $M_\ell(k^2)$, и в $Q_\ell(k^2)$ этого разреза нет. Для доказательства представления (5.1) определим в k^2 -плоскости функцию $\sqrt{\frac{k^2}{k^2+m^2}}$ так, что она принимает положительные значения на верхних берегах разрезов $(-\infty, -m^2)$ и $(0, +\infty)$ и отрицательные значения на нижних берегах этих разрезов, и выберем ту ветвь функции $(k^2)^\ell$, для которой $\arg k^2 = 0$ при $k^2 \geq 0$. Тогда приращение функции $Q_\ell(k^2)$ при обходе точки $k^2=0$ в положительном направлении совпадает со скачком $Q_\ell(k^2)$, вычисленным по формуле (3.8).

Для определения функции $Q_\ell(k^2)$ в k -плоскости / обозначим ее в этом случае $Q_\ell(k)$ / склеим два экземпляра k^2 -плоскости с разрезом на отрезке $0 \leq k^2 < k_1^2$, причем на втором листе выберем такую ветвь $Q_\ell(k^2)$, чтобы значение $Q_\ell(k^2)$ на верхнем берегу разреза совпадало со значением $Q_\ell(k^2)$ на нижнем берегу разреза первого листа, которое равно

x) Эти особенности рассматривались О.И.Завьяловым и М.К.Поливановым.

$$\mathcal{D}_\rho(k^2 e^{2i\ell}) = -\frac{2i^2(k^2)^\ell}{1 + e^{2i\ell}} \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + m^2}} M_\rho(k^2) e^{2i\ell} + \mathcal{D}_\rho(k^2) = \mathcal{D}_\rho(k^2) - 2i^2 i (k^2)^\ell M_\rho(k^2), \quad 0 \leq k^2 < k_i^2. \quad (5.2)$$

Поэтому на втором листе мы должны определить

$$\mathcal{D}_\rho^{(2)}(k^2) = \mathcal{D}_\rho(k^2) - 2i^2 i (k^2)^\ell \sqrt{\frac{k^2}{k^2 + m^2}} M_\rho(k^2). \quad (5.3)$$

При использованной нами процедуре склеивания плоскостей k^2 значения $\mathcal{D}_\rho(k^2)$ на первом листе k^2 определяют значения $\mathcal{D}_\rho(k)$ в верхней полуплоскости k , а значения $\mathcal{D}_\rho(k^2)$ на втором листе — значения $\mathcal{D}_\rho(k)$ в нижней полуплоскости k . Из (5.3) следует, что $\mathcal{D}_\rho^{(2)}(k^2)$ имеет дополнительный разрез $(-\infty, -\frac{k_i^2}{2})$, так как в $\mathcal{D}_\rho^{(2)}$ скачок M_ρ на этом разрезе ничем не компенсируется. Таким образом, $\mathcal{D}_\rho(k)$ имеет соответствующий разрез $(-\infty, -\frac{k_i}{2})$.

Из формул (5.1) и (5.3) получим:

$$\mathcal{D}_\rho(k e^{2i\ell}) - \mathcal{D}_\rho(k) = \mathcal{D}_\rho^{(2)}(k^2 e^{2i\ell}) - \mathcal{D}_\rho(k^2) = 2i^2 i \frac{k^{2\ell+1}}{\sqrt{k^2 + m^2}} (e^{2i\ell} - 1) M_\rho(k), \quad 0 \leq k < k_i. \quad (5.4)$$

Отсюда следует, что при нецелых ℓ точка $k = 0$ есть точка ветвления функции $\mathcal{D}_\rho(k)$ и нужно сделать разрез на отрезке $0 \leq k < k_i$. Из формулы (5.4) видно, что этот дополнительный разрез имеет чисто кинематическую природу, поскольку особенность при $k = 0$ выделена явно.

В k -плоскости равенство (5.3) дает соотношение

$$\mathcal{D}_\rho(k e^{i\ell}) - \mathcal{D}_\rho(k) = -2i^2 i \frac{k^{2\ell+1}}{\sqrt{k^2 + m^2}} M_\rho(k). \quad (5.5)$$

Поэтому амплитуду $f_\rho(k)$ в k -плоскости можно представить в виде / ср. с (3.11) / :

$$f_\rho(k) = \frac{N_\rho(k)}{D_\rho(k)} = i \frac{k \sqrt{k^2 + m^2}}{2i^2} \left[\frac{\mathcal{D}_\rho(k e^{i\ell})}{\mathcal{D}_\rho(k)} - 1 \right]. \quad (5.6)$$

Из формулы (5.6) следует, что функции $\mathcal{D}_\rho(k)$, $\mathcal{D}_\rho(k e^{i\ell})$ представляют собой обобщение известных функций Йоста¹⁰⁾. Через эти функции S -матрица выражается соотношением

$$S_\rho(k) = \frac{\mathcal{D}_\rho(k e^{i\ell})}{\mathcal{D}_\rho(k)}. \quad (5.7)$$

§ 6. Асимптотика амплитуды рассеяния при $\ell \rightarrow \infty$

Для определения асимптотики амплитуды рассеяния f_ℓ при $|\ell| \rightarrow \infty$ удобно предварительно преобразовать выражение (3.10) для N_ℓ так, чтобы зависимость от ℓ входила возможно более просто. Для этого воспользуемся соотношением^[9]

$$Q_\ell(z_1) Q_\ell(z_2) = \int_{z^*}^{\infty} dz \frac{Q_\ell(z)}{\sqrt{K(z, z_1, z_2)}}, \quad (6.1)$$

где

$$z^* = z_1 z_2 + \sqrt{z_1^2 - 1} \sqrt{z_2^2 - 1},$$

$$K(z_1, z_2, z) = z^2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 z - 1.$$

Применяя последовательно формулу (6.1), можно преобразовать произведение любого числа функций Лежандра в интеграл от одной функции Лежандра, однако получающиеся выражения довольно громоздки, и мы не будем их здесь приводить. Согласно формуле (3.10),

$$N_\ell(k^2) = f_\ell(k^2) Q_\ell(k^2), \quad (6.2)$$

где $Q_\ell(k^2)$ при $k^2 < 0$ имеет точки ветвления только в том случае, если потенциал имеет в этой области особые точки. Преобразуя определители в формуле (3.10) или же просто итерируя уравнение (2.9), можно найти борновское разложение для f_ℓ :

$$f_\ell(k^2) = \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu U(\nu, k^2) Q_\ell\left(1 + \frac{\nu}{2k^2}\right) +$$

$$+ \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu_1 \int_{\mu^2}^{\infty} d\nu_2 U(\nu_1, k^2) U(\nu_2, k^2) \int_0^{\infty} d\eta \frac{d\xi}{\sqrt{q^2 m^2 (k^2 - q^2)}} Q_\ell\left(\frac{k^2 + q^2 + \nu_1}{2kq}\right) Q_\ell\left(\frac{q^2 + k^2 + \nu_2}{2kq}\right) + \dots \quad (6.3)$$

Для упрощения записи рассмотрим случай $U(\nu, k^2) = U(k^2) \delta(\nu - \mu^2)$. Преобразуем второй интеграл в формуле (6.3) с помощью соотношения (6.1):

$$\left[Q_\ell\left(\frac{k^2 + q^2 + \mu^2}{2kq}\right) \right]^2 = \int_{z^*}^{\infty} dz \frac{Q_\ell(z)}{\sqrt{K(z, z_1, z_2)}},$$

где

$$z_1 = \frac{k^2 + q^2 + \mu^2}{2kq}, \quad z_2 = \frac{(k^2 + q^2 + \mu^2)^2}{4k^2 q^2} - 1. \quad (6.4)$$

Выполнив замену переменной $z = 1 + \frac{\nu}{2k^2}$ и переставив порядок интегрирования по q и ν , найдем после несложных преобразований

$$f_c(k^2) = U(k^2) Q_c \left(1 + \frac{\rho^2}{2k^2}\right) + \pm U(k^2) \int_{\frac{\rho^2}{4k^2}}^{\infty} \frac{d\nu}{\sqrt{\nu}} Q_c \left(1 + \frac{\nu}{2k^2}\right) \int_{q_2^{(2\nu)}} \frac{dq^2}{k^2 - q^2} \frac{1}{\sqrt{(q^2 - m^2)(q^2 - q_1^2)(q^2 - q_2^2)}}, \quad (6.5)$$

где $q_2^{(2\nu)}$ определяются из уравнения

$$\nu = \frac{(k^2 + q_2^2 - \rho^2)^2}{q_2^4} - 4k^2, \quad q_2^2 > q^2. \quad (6.6)$$

Интеграл по q^2 в (6.5) можно выразить через эллиптические функции. Мы, однако, не будем заниматься детальными исследованиями борновского ряда, а сформулируем общий результат. Можно показать, что функция $N_c(k^2)$ представима в виде:

$$N_c(k^2) = \int_{\rho^2}^{\infty} d\nu Q_c \left(1 + \frac{\nu}{2k^2}\right) f_c(k^2, \nu) \mathcal{D}_c(k^2), \quad (6.7)$$

где

$$f_c(k^2) = U(\nu, k^2) + \theta(\nu - 4\rho^2) f_1(\nu, k^2) + \theta(\nu - 9\rho^2) f_2(\nu, k^2) + \dots \quad (6.8)$$

Заметим, что сходимость ряда в формуле (6.7) обеспечивается множителем $\mathcal{D}_c(k^2)$, который обращается в нуль в тех точках, где амплитуда $f_c(k^2)$ имеет полюсы и где ее борновское разложение (6.3) расходится.

Из представления (6.7) видно, что асимптотика N_c определяется поведением Q_c и \mathcal{D}_c . Асимптотика Q_c имеет вид (см., например, /II/):

$$Q_c(ch\alpha) \underset{|l| \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\pi}{\sqrt{2(l + \frac{1}{2})} \text{th}\alpha} e^{-\alpha(l + \frac{1}{2})}, \quad (6.9)$$

$$|\arg(ch\alpha - 1)| < \pi, \quad |\arg(l + \frac{1}{2})| < \pi - \delta.$$

Из формул (3.3), (3.4), (2.6) и (6.8), используя предположение (I.8), находим следующую асимптотическую оценку для \mathcal{D}_c (справедливую при $Re l > -1/2$):

$$\mathcal{D}_c(k^2) \underset{|l| \rightarrow \infty}{\approx} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \frac{C^n}{(l + \frac{1}{2})^{3n/2}} \int_{i=1}^n \prod_{i=1}^n \frac{q_i^2 d q_i}{\sqrt{q_i^2 m^2 (k^2 - q_i^2)}} K \left(\frac{q_1 \dots q_n}{q_1 \dots q_n} \right), \quad (6.10)$$

где

$$K \left(\frac{q_1 \dots q_n}{q_1 \dots q_n} \right) = \det \| \sqrt{\text{th}\alpha_{ik}} e^{-\alpha_{ik}(l + \frac{1}{2})} \|, \quad (6.11)$$

$$\text{th}\alpha_{ik} = \frac{q_i^2 + q_k^2 + \rho^2}{2q_i q_k} \quad (6.12)$$

и C — некоторая постоянная. Для вывода (6.10) достаточно в выражение для \mathcal{Q}_2 подставить асимптотическую формулу (6.9) и, перейдя от переменных ν к переменным α , выполнить одно интегрирование по частям. Сходимость интегралов по q в (6.10) проверяется без труда.

Из асимптотической оценки (6.10) следует, что

$$\mathcal{Q}_2(k^2) \rightarrow 1, \quad \text{Re} \lambda > -\frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

Исследуем теперь асимптотику $f_f(k^2)$ при различных значениях k^2 . Из (6.12) следует, что эта асимптотика определяется поведением \mathcal{N}_2 . Для определения асимптотики \mathcal{N}_2 при $|l| \rightarrow \infty$ подставим в формулу (6.7) асимптотическую оценку (6.9) и выполним одно интегрирование по частям, перейдя предварительно от переменной интегрирования ν к переменной α . В результате находим, что

$$\mathcal{N}_2(k^2) \approx C(k^2) \cdot \frac{e^{-\alpha \lambda}}{\lambda^{1/2}}, \quad (6.14)$$

где

$$\text{ch} \alpha = 1 + \frac{\mu^2}{2k^2}, \quad \lambda = l + \frac{1}{2}. \quad (6.15)$$

Положим

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = |\lambda| e^{i\psi}, \quad -\pi < \psi < \pi \quad (6.17)$$

и

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \alpha_1 > 0, \quad -\pi < \alpha_2 < \pi. \quad (6.18)$$

С помощью тождества

$$\text{ch} \alpha = \text{ch} \alpha_1 \cos \alpha_2 + i \text{sh} \alpha_1 \sin \alpha_2 = 1 + \frac{\mu^2}{2k^2} \cos \text{arg} k^2 - i \frac{\mu^2}{2k^2} \sin \text{arg} k^2 \quad (6.19)$$

нетрудно найти, что:

$$\text{если } 0 < k^2 < +\infty, \text{ то } \alpha_2 = 0, \quad 0 < \alpha_1 < +\infty, \quad (6.20a)$$

$$\text{если } \text{Im} k^2 > 0, \quad 0, \text{ то } -\pi < \alpha_2 < 0, \quad (6.20б)$$

$$\text{если } \text{Im} k^2 < 0, \quad 0, \text{ то } 0 < \alpha_2 < \pi, \quad \alpha_1 > 0, \quad (6.20в)$$

$$\text{если } -\frac{\mu^2}{q} < k^2 < 0 \text{ и } k^2 \text{ лежит на верхнем берегу разреза } (-\infty, 0), \quad (6.20г)$$

$$\text{то } \alpha_2 = -\pi, \quad \alpha_1 > 0,$$

$$\text{если } k^2 \text{ — на нижнем берегу, то } \alpha_2 = \pi, \quad \alpha_1 > 0,$$

если $-\infty < k^2 < -\frac{\pi^2}{4}$, а k^2 лежит на верхнем берегу разреза $(-\infty, 0)$, то
 $-\bar{x} < \alpha_2 < 0$, $\alpha_1 = 0$, если k^2 - на нижнем берегу, то
 $0 < \alpha_2 < \bar{x}$, $\alpha_1 = 0$.

(6.20д)

Подставляя (6.17) и (6.18) в (6.14), найдем асимптотику $N_\ell(k^2)$ / и, следовательно, $f_\ell(k^2)$ / при $|\ell| \rightarrow \infty$ в различных областях изменения k^2 :

$$f_\ell(k^2) \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-\frac{3}{2}} e^{-|\ell|(\alpha_1 \cos \psi)} \quad \text{при } k^2 > 0, \quad (6.21a)$$

$$f_\ell(k^2) \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-\frac{3}{2}} e^{|\ell|(-\alpha_1 \cos \psi + \alpha_2 \sin \psi)} \quad \text{при } \operatorname{Im} k^2 \geq 0, \quad (6.21б,в)$$

$$f_\ell(k^2) \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-\frac{3}{2}} e^{|\ell|(-\alpha_1 \cos \psi + \bar{x} \sin \psi)} \quad \text{при } -\frac{\pi^2}{4} < k^2 < 0, \quad (6.21г)$$

$$f_\ell(k^2) \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-\frac{3}{2}} e^{|\ell|\alpha_2 \sin \psi} \quad \text{при } -\infty < k^2 < -\frac{\pi^2}{4}. \quad (6.21д)$$

Отметим, что области экспоненциального убывания и экспоненциального возрастания амплитуд f_ℓ в ℓ -плоскости отделяются друг от друга прямой $\arg \psi = \frac{\pi}{2}$. На вещественной оси f_ℓ убывает, как $\ell^{-\frac{3}{2}} e^{-\ell \alpha_1}$, если только k^2 не лежит на разрезе $(-\infty, -\frac{\pi^2}{4})$. В последнем случае f_ℓ на вещественной оси осциллирует, а в верхней полуплоскости убывает, если k^2 находится на верхнем берегу разреза, и возрастает, если k^2 - на нижнем берегу разреза. При любых k^2 амплитуда $f_\ell(k^2)$ не может возрастать на мнимой оси ℓ быстрее, чем $\ell^{-\frac{3}{2}} e^{\pi |\operatorname{Im} \ell|}$.

§ 7. Преобразование Ватсона-Зоммерфельда. Аналитичность и асимптотика амплитуды рассеяния по переданному импульсу

Для работы с преобразованием Ватсона-Зоммерфельда нам понадобятся некоторые асимптотические оценки функции $\frac{P_\ell(z)}{\sin \pi \ell}$ при $|\ell| \rightarrow \infty$. Полагая

$$z = \sigma h \zeta, \quad \zeta = \zeta_1 + i \zeta_2, \quad \zeta_1 > 0, \quad -\bar{x} < \zeta_2 < x, \quad (7.1)$$

мы воспользуемся известной асимптотической оценкой (см., например, /II/)

$$\frac{P_\ell(\sigma h \zeta)}{\sin \pi \ell} \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{|\ell|(\zeta_1 \cos \psi - \zeta_2 \sin \psi - \pi/2 \sin \psi)} + e^{i \frac{\pi}{2}} e^{|\ell|(-\zeta_1 \cos \psi + \zeta_2 \sin \psi - \pi/2 \sin \psi)} \right\}, \quad (7.2)$$

где $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$.

Из этой общей формулы нетрудно найти, что:

если $-1 < z < 1$, то $\zeta_2 = 0$ и

$$\frac{P_\ell(z)}{\sin \pi \ell} \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-1/2} e^{-i\ell(\pi \mp \arccos z)}. \quad (7.3a)$$

Если $1 < |z| < \infty$, то $\zeta_2 = 0$ и на мнимой оси λ ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{P_\ell(z)}{\sin \pi \ell} \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-1/2} e^{-i\ell \pi}. \quad (7.3б)$$

Если $-\infty < z < -1$, то $\zeta_2 = \pi$ и $\frac{P_\ell(z)}{\sin \pi \ell}$ на мнимой оси осциллирует при $|\ell| \rightarrow \infty$. (7.3в)

Если z не принадлежит разрезу $(-\infty, -1)$, то на мнимой оси λ

$$\frac{P_\ell(z)}{\sin \pi \ell} \underset{|\ell| \rightarrow \infty}{\sim} \ell^{-1/2} e^{-i\ell(\pi - \arccos z)}. \quad (7.3г)$$

Перейдем теперь от ряда (2.1) к интегралу Ватсона-Зоммерфельда по контуру C_2 , охватывающему положительную полуось ℓ -плоскости (см. рис. 3):

$$T(k^2, \cos \beta) = \frac{1}{4ik^2} \int_{C_1} d\ell (2\ell + 1) f_\ell(k^2) \frac{P_\ell(-\cos \beta)}{\sin \pi \ell}. \quad (7.4)$$

При $-1 < \cos \beta < 1$ и $k^2 > 0$ сходимость этого интеграла следует из (6.21а) и (7.3а).

Пользуясь доказанной в § 2 мероморфностью амплитуды f_ℓ в ℓ -плоскости, можно, далее, деформировать контур C_1 и контур C_2 вдоль линии $\operatorname{Re} \ell = -1/2$ (см. рис. 3):

$$T(k^2, \cos \beta) = \frac{1}{4ik^2} \int_{-1/2 + i\infty}^{-1/2 + i\epsilon} d\ell (2\ell + 1) f_\ell(k^2) \frac{P_\ell(-\cos \beta)}{\sin \pi \ell} + \sum_i b_i(k^2) \frac{P_{\alpha_i(k^2)}(-\cos \beta)}{\sin \pi \alpha_i(k^2)}, \quad (7.5)$$

где $\alpha_i(k^2)$ — положение полюсов f_ℓ внутри контура C_2 . Из формул (6.21а) и (7.3а) при $-1 < \cos \beta < 1$, $k^2 > 0$ следует, что интеграл по бесконечно большой полуокружности равен нулю.

Представление (7.4) позволяет выполнить аналитическое продолжение амплитуды на комплексные значения $\cos \beta$. Поскольку $P_\ell(-\cos \beta)$ — аналитическая функция в комплексной плоскости $\cos \beta$ с разрезом $(1, +\infty)$ и при $k^2 > 0$ интеграл в (7.5) сходится в силу (6.21а) и (7.3г), то формула (7.2) показывает, что при $k^2 > 0$ амплитуда $T(k^2, \cos \beta)$ аналитична в комплексной плоскости $\cos \beta$ с разрезом $1 < \cos \beta < \infty$.

Можно показать, что разрез в плоскости $\cos \beta$ в действительности начинается не от 1, а от $1 + \frac{\mu^2}{2k^2}$ ($k^2 > 0$). Чтобы убедиться в этом, заметим, что асимптотическая оценка (6.21а) обеспечивает сходимость ряда (2.1) в эллипсе с полуосями $1 + \frac{\mu^2}{2k^2}$ и $\sqrt{(1 + \frac{\mu^2}{2k^2})^2 - 1}$, причем большая полуось $1 + \frac{\mu^2}{2k^2}$ расположена на вещественной оси плоскости $\cos \beta$.

Таким образом, при $k^2 > 0$ ряд (2.1) определяет аналитическую в указанном эллипсе функцию. Так как на вещественной оси амплитуда f_ρ убывает, как $e^{-\frac{1}{2}k^2} e^{-k^2}$, (см. конец предыдущего раздела), то при любом k^2 , не принадлежащем разрезу $(-\infty, -\frac{k^2}{4})$, существует эллипс в плоскости $\cos \beta$, содержащий отрезок $-1 < \cos \beta < 1$, такой, что ряд (2.1) сходится, если $\cos \beta$ принадлежит этому эллипсу.

Рассмотрим представление (7.5) при $-1 < \cos \beta < \infty$. Согласно (7.3б) и (6.21), интеграл в (7.5) сходится при любых k^2 , так что этим представлением удобно воспользоваться для определения асимптотики амплитуды $T(k^2, \cos \beta)$ при $\cos \beta \rightarrow -\infty$. Для исследования асимптотики при $\cos \beta \rightarrow -\infty$ представление (7.5) непригодно, так как в интервале $-\infty < \cos \beta < -1$ интеграл в (7.5) расходится при всех k^2 (за исключением, может быть, $k^2 = 0$), и мы поэтому рассмотрим модифицированное представление Ватсона-Зоммерфельда^[2]

$$T(k^2, \cos \beta) = \frac{1}{4k^2} \int_{C_1} dl (2l+1) \frac{P_l(\cos \beta)}{-2\sin l} e^{-iil} f_\rho(k^2). \quad (7.6)$$

Интеграл (7.6) сходится по тем же причинам, что и интеграл (7.4). Однако теперь нельзя деформировать контур интегрирования C_1 в контур C_2 при $k^2 > 0$, $-1 < \cos \beta < 1$, так как этому мешает экспоненциальный рост e^{-iil} в верхней полуплоскости l . Как следует из (7.3а) и (6.20а), можно деформировать контур C_1 в контур C_3 , состоящий из двух лучей: $\psi = \psi_0$ и $\psi = \psi_0 + \frac{1}{2}$, где $\psi_0 = \frac{\arcsin \frac{\cos \beta}{1.5k^2}}$ (см. рис. 3).

Пусть теперь $-\frac{k^2}{4} < k^2 < 0$ ($\text{Im } k^2 = 0$) и $-1 < \cos \beta < 1$. Тогда, согласно (6.21а) и (7.3а), контур интегрирования C_1 можно деформировать в C_2 , получив представление

$$T(k^2, \cos \beta) = \frac{1}{4k^2} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} dl (2l+1) f_\rho(k^2) e^{-iil} \frac{P_l(\cos \beta)}{2\sin l} + \sum_l b_l(k^2) e^{-i\alpha_l} \frac{P_{\alpha_l}(\cos \beta)}{\sin \pi \alpha_l(k^2)}. \quad (7.7)$$

Из (6.20), (6.21) и (7.3б) следует, что при $-1 < \cos \beta < \infty$ интеграл в формуле (7.7) сходится, если $\text{Im } k^2 \geq 0$.

Известные рассуждения^[2] позволяют найти асимптотику амплитуд $T(k^2, \cos \beta)$ при $\cos \beta \rightarrow -\infty$ и $\cos \beta \rightarrow +\infty$ напомним, что все проведенное выше рассмотрение относилось к четным и нечетным проекциям амплитуды рассеяния T :

$$T^{\pm}(k^2, \cos \beta) \approx b_{\pm}^{\pm}(k^2) \frac{2^{-\alpha_m} \Gamma(\alpha_m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha_m + 1)} \frac{(-\cos \beta)^{\alpha_m(k^2)}}{\sin \pi \alpha_m(k^2)},$$

$$T^{\pm}(k^2, \cos \beta) \approx b_{\pm}^{\pm}(k^2) \frac{2^{-\alpha_m} \Gamma(\alpha_m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha_m + 1)} e^{-i\alpha_m} \frac{(\cos \beta)^{\alpha_m(k^2)}}{\sin \pi \alpha_m(k^2)}. \quad (7.9)$$

*) В случае $\text{Im } k^2 < 0$ можно получить аналогичные результаты. Однако для получения физических следствий достаточно рассмотреть значения k^2 в верхней полуплоскости.

Здесь $\alpha_m^{\pm}(k^2)$ - положение крайних правых полюсов соответствующих амплитуд f_0^{\pm} в k^2 -плоскости.

Учитывая, что полная амплитуда T связана с амплитудами T^{\pm} соотношением^{/13/}

$$T(k^2, \cos \vartheta) = \frac{1}{2} [T^+(k^2, \cos \vartheta) + T^-(k^2, \cos \vartheta) + T^+(k^2, -\cos \vartheta) - T^-(k^2, -\cos \vartheta)], \quad (7.10)$$

найдем из (7.8) и (7.9) асимптотику

$$T(k^2, \cos \vartheta) \approx \int_{\cos \vartheta \rightarrow -1}^{\infty} b_m^+(k^2) \frac{2^{\alpha_m^+} \Gamma(\alpha_m^+ + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha_m^+ + 1)} \cdot \frac{1 + e^{-i\alpha_m^+}}{\sin \alpha_m^+} (\pm \cos \vartheta)^{\alpha_m^+} + \int_{\cos \vartheta \rightarrow 1}^{\infty} b_m^-(k^2) \frac{2^{\alpha_m^-} \Gamma(\alpha_m^- + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\alpha_m^- + 1)} \cdot \frac{1 - e^{-i\alpha_m^-}}{\sin \alpha_m^-} (\pm \cos \vartheta)^{\alpha_m^-}. \quad (7.11)$$

Рассматривая амплитуду T как функцию от

$$t = -2k^2(1 - \cos \vartheta) \quad (7.12)$$

или от

$$u = -2k^2(1 + \cos \vartheta), \quad (7.13)$$

мы можем найти ее асимптотику при $t \rightarrow \infty$ или $u \rightarrow \infty$, т.е. при больших энергиях в t -канале и u -канале реакции соответственно (см. также^{/14/}):

$$T(k^2, \cos \vartheta) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1 + e^{-i\alpha}}{\sin \alpha} t^{\alpha}, \quad (7.14)$$

$$T(k^2, \cos \vartheta) \underset{u \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1 + e^{-i\alpha}}{\sin \alpha} u^{\alpha}. \quad (7.15)$$

Подчеркнем, что для вывода выражений (7.14) и (7.15) достаточно, чтобы: (1) потенциалы V^{\pm} , представимые в виде (1.7), существовали только в некоторой области \mathcal{X} , содержащей отрезок I вещественной оси k^2 -плоскости, и чтобы (2) для спектральных функций U^{\pm} выполнялось условие (1.8). Как показано в работе^{/5/}, представление (1.7) при малых k^2 можно доказать с помощью теории возмущений в квантовой теории поля. Сходимость интеграла (1.7) и условие (1.8) являются, однако, дополнительными предположениями, и если эти предположения не выполняются, то асимптотика амплитуды при $t \rightarrow \infty$ или $u \rightarrow \infty$ может иметь вид, отличающийся от (7.8) и (7.12).

§ 8. Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в настоящей работе.

Во-первых, показана мероморфность амплитуды рассеяния в ℓ -плоскости. Если потенциалы удовлетворяют условию (I.8), то удастся показать мероморфность в области $\text{Re} \ell > -1$. В случае, если потенциал не удовлетворяет условию (I.8), то амплитуда может иметь в ℓ -плоскости точки ветвления (см. § I5/).

Во-вторых, детально изучены аналитические свойства парциальных волн в k^2 -плоскости и в k -плоскости. При этом было получено обобщение уравнений \mathcal{H}_0 -метода, и были исследованы аналитические свойства \mathcal{N} и \mathcal{D} . Используемый выше метод имеет перед обычным \mathcal{H}_0 -методом то дополнительное преимущество, что нам не нужно добавлять специальное граничное условие для исключения произвольных R -функций в знаменателе. Очевидно, что это преимущество связано с линейностью рассматриваемых нами уравнений. Попутно была выяснена структура римановой поверхности парциальной амплитуды рассеяния вблизи точки ветвления $k^2 = 0$ при произвольных ℓ . Как известно [16], в случае целого ℓ эта поверхность двулистка. При нецелом ℓ она, однако, имеет бесконечно много листов, как это следует из формулы (5.1), дающей полное решение вопроса и демонстрирующей "кинематический" характер ветвления при $k^2 = 0$. Мы показали также, что \mathcal{D}_ℓ -функции представляют собой обобщение известных функций Йоста, и установили их аналитичность в k -плоскости с разрезами. Отметим специально, что при исследовании свойств парциальных амплитуд в k^2 и k -плоскости мы нигде не уточняли вид области \mathcal{K} , определенной в § I. В частности, если область \mathcal{K} совпадает со всей плоскостью, то из наших рассуждений следует аналитичность парциальных амплитуд в k^2 -плоскости и в k -плоскости, причем можно найти положение всех особых точек (полюсов, которые являются нулями функции \mathcal{D}_ℓ , и точек ветвления, которые, за исключением "кинематической" точки ветвления $k^2 = 0$, все содержатся в функции \mathcal{N}_ℓ).

В-третьих, исследована асимптотика парциальной амплитуды при $|\ell| \rightarrow \infty$, что позволило перейти к изучению полной амплитуды с помощью преобразования Ватсона-Зоммерфельда. Доказана аналитичность полной амплитуды как функции переданных импульсов t и u (при $k^2 > 0$), найдена асимптотика при $t \rightarrow \infty$ или $u \rightarrow \infty$, которая совпадает с асимптотикой Редже [4], если выполнены условия (I.7), (I.8) и если в полуплоскости $\text{Re} \ell > -1/2$ имеется хотя бы один полюс. Если же условия (I.7), (I.8) не выполнены, то асимптотика может определяться не полюсом, а точками ветвления в ℓ -плоскости. Такая ситуация, по-видимому, имеет место в электродинамике (см. § I5, I7/и), возможно, в мезодинамике. Поэтому исследование этого вопроса весьма интересно для сопоставления выводов теории с экспериментальными данными. Заметим, что развитый в настоящей работе метод представляется удобным средством для решения задачи о влиянии точек

ветвления в ℓ -плоскости на асимптотику амплитуды рассеяния, поскольку он допускает простое сопоставление с результатами решения этой задачи в модели потенциального рассеяния^{/15/}.

В заключение укажем на некоторые результаты, которые без труда могут быть получены из данной работы. Хотя в целом рассматриваемый здесь метод наиболее эффективен при изучении парциальных волн и зависимости полной амплитуды от переменных ℓ и u , он позволяет изучить также зависимость ее от s (или k^2), если имеется достаточно полная информация о свойствах обобщенного потенциала как функции $k^2 x$. Если потенциал — аналитическая функция от k^2 с точками ветвления (на вещественной оси), соответствующими порогами неупругих процессов, то, пользуясь результатами № 6 и № 7, можно доказать, что амплитуда рассеяния при $t < 0$ — аналитическая функция от $s = 4(k^2 + m^2)$ с разрезами на действительной оси. При этом, однако, мы сталкиваемся с вопросом о дополнительных особенностях (см. § I и § 4), так что проблема справедливости представления Мандельштама в рамках рассматриваемого подхода нуждается в дальнейшем исследовании. Подчеркнем еще раз, что указанное осложнение связано с наличием в уравнении (I.5) релятивистского множителя $\sqrt{q^2 + m^2}$. Если этого множителя нет, то уравнение превращается в обычное уравнение нерелятивистской теории рассеяния на комплексном, зависящем от энергии потенциале. Если этот потенциал представим в виде (I.7), удовлетворяет условию (I.8), аналитичен в k^2 -плоскости с разрезом на положительной вещественной оси, начинающимся от порога неупругих процессов, и если на разрезе выполнено условие поглощения (см. приложение), то проведенные в работе рассуждения позволят без труда получить представление Мандельштама для амплитуды рассеяния (см.^{/19/}). Отметим, наконец, что уравнение $\mathcal{N}_\ell(t^2) = 0$ является, по-видимому, наиболее удобным средством исследования траекторий Редже. В частности, поведение траекторий при $k^2 \rightarrow \infty$ и $k^2 \rightarrow 0$ в первом приближении получается весьма элементарно.

Авторы искренне благодарны акад. Н.Н.Боголюбову, а также О.И.Завьялову и М.К.Поливанову за ценные и стимулирующие обсуждения.

x) С другой стороны, для исследования аналитичности и асимптотики амплитуды по переменной s мы можем просто поменять роли s и t в основных уравнениях, получив уравнение с некоторым новым потенциалом, определенным в ограниченной области t , но при любых s . Очевидна аналогия такого подхода с "полюсовым приближением" Чу и Фрауччи^{/18/}.

Установим связь между волновой функцией и амплитудой рассеяния. Волновые функции $u_k^{\pm}(\vec{r})$ в координатном представлении имеет асимптотику вида / см. (I.4) / :

$$u_k^{\pm}(\vec{r}) = \int d^3p e^{i\vec{p}\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim e^{i\vec{k}\vec{r}} + \mathcal{F}_k^{\pm}(\vec{r}), \quad (\text{A.1})$$

где

$$\mathcal{F}_k^{\pm}(\vec{r}) = \int d^3p e^{i\vec{p}\vec{r}} \frac{T_k^{\pm}(\vec{p})}{\sqrt{\beta^2 m^2 (k^2 - p^2)}}. \quad (\text{A.2})$$

Несложное видоизменение вычисления, проведенного в /20/ для обычного уравнения Шредингера, приводит к результату:

$$\mathcal{F}_k^{\pm}(\vec{r}) \sim_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} -2ik^2 \frac{T^{\pm}(\frac{\vec{r}}{k^2})}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (\text{A.3})$$

Нетрудно найти, что волновые функции $u_k^{\pm}(\vec{r})$ удовлетворяют уравнению

$$(\Delta + k^2) u_k^{\pm}(\vec{r}) = (m^2 - \Delta)^{-1/2} V^{\pm}(\vec{r}, k^2) u_k^{\pm}(\vec{r}), \quad (\text{A.4})$$

где

$$V^{\pm}(\vec{r}, k^2) = \int d^3p e^{i\vec{p}\vec{r}} V^{\pm}(\vec{p}, k^2), \quad (\text{A.5})$$

а выражение $(m^2 - \Delta)^{-1/2}$ можно понимать как интегральный оператор. Амплитуды T^{\pm} связаны с волновой функцией соотношением

$$T_k^{\pm}(\vec{p}) = \frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{-i\vec{p}\vec{q}} (m^2 - \Delta)^{-1/2} V^{\pm}(\vec{q}, k^2) u_k^{\pm}(\vec{q}). \quad (\text{A.6})$$

Используя теорему Грина для оператора Лапласа, можно из (A.4), (A.6), (A.I) и (A.3) найти соотношение унитарности для амплитуды рассеяния :

$$\text{Im} T_k^{\pm}(\vec{p}) = -\frac{\pi}{2} \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \int d\Omega_q T_p^{\pm}(\vec{q}) T_k^{\pm}(\vec{q}) + \frac{\pi}{2} \int d^3q \tilde{u}_p^{\pm}(\vec{q}) \text{Im} V^{\pm}(\vec{q}, k^2) u_k^{\pm}(\vec{q}), \quad q^2 = p^2 = k^2. \quad (\text{A.7})$$

Отметим две особенности написанного соотношения. Во-первых, наличие релятивистского кинематического множителя перед первым членом в правой части и, во-вторых, наличие второго слагаемого, описывающего неупругие процессы. При $k^2 > 0$ мы должны потребовать, чтобы выполнялось условие поглощения

$$\text{Im} V^\pm(z, k^2) < 0. \quad (\text{A.8})$$

Для доказательства этого утверждения перейдем в уравнении (A.7) к парциальным волнам, согласно (2.1) и определению

$$u_{\ell}^{\pm}(\tau) = \frac{1}{2k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) u_{\ell}^{\pm}(\tau) \varphi_{\ell} \left(\frac{\tau^2}{k^2} \right). \quad (\text{A.9})$$

Тогда с помощью (2.3) найдем, что

$$\text{Im} f_{\ell}^{\pm}(k^2) = -\pi^2 \frac{1}{\sqrt{k^2 - m^2}} |f_{\ell}^{\pm}(k^2)|^2 + 2\pi^2 \int_0^{\infty} \tau^2 d\tau |u_{\ell}^{\pm}(\tau)|^2 \text{Im} V^{\pm}(\tau, k^2). \quad (\text{A.10})$$

Полная парциальная амплитуда f_{ℓ} выражается через проекции f_{ℓ}^{\pm} соотношением

$$f_{\ell} = \frac{1}{2} [f_{\ell}^{+} + f_{\ell}^{-} + (-1)^{\ell} f_{\ell}^{+} - (-1)^{\ell} f_{\ell}^{-}] = \begin{cases} f_{\ell}^{+} & \text{при } \ell = 2n \\ f_{\ell}^{-} & \text{при } \ell = 2n+1, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

которое непосредственно следует из (7.10) и (2.1). Полагая в соответствии с (5.6) и (5.7)

$$f_{\ell}^{\pm} = i \frac{k \sqrt{k^2 - m^2}}{2k^2} (S_{\ell}^{\pm} - 1), \quad (\text{A.12})$$

найдем следующие выражения для полного эффективного сечения σ и эффективного сечения неупругих процессов σ_2 :

$$\sigma = \frac{\pi}{k^2} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) |S_{\ell}^{-} - 1|^2 + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) |S_{\ell}^{-} - 1|^2 \right\}, \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma_2 = \frac{\pi}{k^2} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (1 - |S_{\ell}^{+}|^2) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (2\ell+1) (1 - |S_{\ell}^{-}|^2) \right\}. \quad (\text{A.14})$$

Так как $\sigma_2 \geq 0$, то мы должны потребовать, чтобы

$$|S_{\ell}^{\pm}|^2 \leq 1. \quad (\text{A.15})$$

Подставляя (A.12) в (A.10), находим

$$|S_e^{\pm}|^2 = 1 + \frac{\pi(2\pi)^3}{k\sqrt{k^2+m^2}} \int_0^{\infty} e^{\pm ikr} |U_{ke}^{\pm}(r)|^2 J_m V^{\pm}(r, k^2) dr, \quad (\text{A.16})$$

и (A.15) приводит, таким образом, к условию поглощения (A.8)^{х)}.

Заметим, что соотношение унитарности и условие поглощения можно было бы получить и не переходя к координатному представлению.

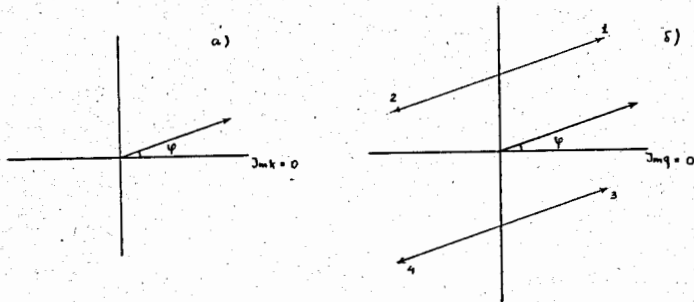


Рис. 1.

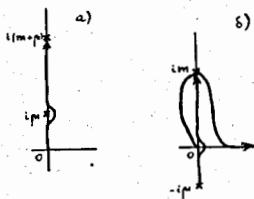


Рис. 2.

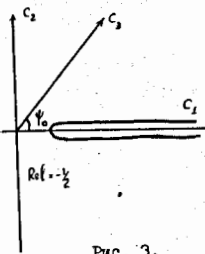


Рис. 3.

х) Это условие было получено в работе^{4/4} из общих принципов квантовой теории поля.

Литература

1. R.Blankenbecler, M.L.Goldberger, N.N.Khuri, S.V.Treiman. Ann.Phys.(N.Y.) 10, 62 (1960).
2. A.Bottino, A.M.Longoni, T.Regge. Nuovo Cim., 23, 954 (1962).
3. S.Mandelstam. Ann.Phys. (N.Y.), 21, 302 (1963).
4. A.A.Логунов, А.Н.Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Е-1145; Дубна, Nuovo Cim. (в печати)
5. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, О.А.Хрусталев, Препринт ОИЯИ Д-1191, Дубна, 1963
Nuovo Cim. (в печати).
6. Ф.Трикоми. Интегральные уравнения, ИЛ, Москва, 1960.
7. С.Г.Михлин. ДАН СССР, 42, 373-376 (1944).
8. G.F.Chew, S.Mandelstam. Phys.Rev., 112, 1344 (1959).
9. M.Froissart. Nuovo Cim. , 22, 395 (1961); Р.М.Мурадян. ДАН СССР, 149, № I (1963).
10. R.Jost. Helv.Phys.Acta 20, 256 (1947).
11. O.A.Barut, F.Calogero. Phys.Rev., 128, 1383 (1962).
12. Е.Т.Уиттекер и Г.Н.Ватсон. Курс современного анализа, т.П, ГИИТЛ, Ленинград-Москва, 1934.
13. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. Препринт ОИЯИ Р-1195, 1963 .
14. Б.А.Арбузов, А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов, А.Т.Филиппов. ЖЭТФ, 44, § 4 (1963).
15. Б.А.Арбузов, Б.М.Барбашов, А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н.Тавхелидзе, Р.Н.Фаустов,
А.Т.Филиппов. препринт ОИЯИ Е-1095, Дубна, 1962; Phys.Letters, 4, 272 (1963).
16. R.Oehme. Phys.Rev., 121, 1840 (1961).
17. А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. Препринт ОИЯИ Е-1194 (1963);
Nucl.Phys. (в печати).
18. G.F.Chew, S.C.Frautschi. Phys.Rev., 123, 1478 (1961).
19. J.M.Cornwall, M.A.Ruderman. Phys.Rev., 128, 1474 (1963).
20. Г.Бете, Э.Солпитер. Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, § 9.
ГИФМЛ, Москва, 1960.