ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

А.А. Корнейчук

Р-1317

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Дубна 1963

А.А. Корнейчук

Р-1317

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Направлено в журнал "Вычислительная математика и математическая физика"

Дубна 1963

Введение

В настоящей работе рассматриваются сингулярные интегралы

$$I_1 f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, ctg\, \frac{x-y}{2}\, dx \; ; \tag{0.1}$$

$$I_2 f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} f(x)\, \frac{d\alpha(x)}{x-y} \; . \tag{0.2}$$

Они понимаются в смысле главного значения по Коши; $\alpha(x)$ в (2) – неубывающая функция, отличная от константы. Интегралы (1), (2) существенно используются, например, при решении граничных задач теории аналитических функций и тесно связанных с этими задачами сингулярных интегральных уравнений /1/, /2/.

Приближенному вычислению интеграла (1) посвящены работы /3/–/6/. Б.А.Вертгейм /6/ преобразовал его к виду:

$$I_1 f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [\, f(y+x) - f(y-x)\,]\, ctg\, \frac{x}{2}\, dx \tag{0.3}$$

и применил затем формулу прямоугольников:

$$I_1 f(y) \approx \sum_{m=0}^{n-1} [\, f(\frac{k+2m+1}{2n}\pi) - f(\frac{k-2m-1}{2n}\pi)]\, ctg\, \frac{(2m+1)\pi}{4n} \; ; \tag{0.4}$$

$$k = 0, 1, \ldots, 4n-1 \, .$$

Он же оценил ошибку формулы (4) в случае трижды непрерывно дифференцируемой $f(x)$, а также отметил, что эта формула дает хорошую точность уже при небольшом числе узлов.

Заменой переменных интеграл (1) приводится к сумме интегралов (2) с функциями распределения

$$d\alpha(x) = (1-x^2)^{\pm 1/2}\, dx \, , \tag{0.5}$$

и формулы приближенного вычисления интеграла (1), соответственно преобразованные, пригодны для интеграла (2), когда $d\alpha(x)$ имеет вид (5).

Цель настоящей работы – построение для сингулярных интегралов (1)–(2) формул высокой алгебраической точности, аналогичных формулам Гаусса для обычных интегралов.

В § 1 получены квадратурные формулы для интеграла (1), точные, когда $f(x)$ – произвольный тригонометрический полином некоторого порядка. В § 2 такие формулы получены для интеграла (2), они точны, когда $f(x)$ – алгебраический полином.

Оценены остаточные члены полученных квадратурных формул для подынтегральных функций из различных классов.

Применение полученных формул проиллюстрировано в § 3 численным примером.

§ 1. Сингулярный интеграл с ядром Гильберта

Рассмотрим интеграл (0.1). Построим для него квадратурную формулу, точную, когда $f(x)$ – тригонометрический полином $N-1$ -го порядка:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.1}$$

Коэффициенты Фурье a_k, b_k, как известно, выражаются в виде интегралов

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx; \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \tag{1.2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx; \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \tag{1.3}$$

Чтобы эти интегралы вычислялись точно, воспользуемся формулой прямоугольников с $2N$ узлами, дающей точное значение интеграла от тригонометрического полинома $N-1$-го порядка (см. /7/):

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} f\left(\frac{\pi m}{N}\right) \cos\left(km \frac{\pi}{N}\right); \tag{1.4}$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} f\left(\frac{\pi m}{N}\right) \sin\left(km \frac{\pi}{N}\right). \tag{1.5}$$

Известно /8/, что

$$I_1 \sin ky = \cos ky; \quad k = 1, 2, \dots; \tag{1.6}$$

$$I_1 \cos ky = -\sin ky; \quad k = 0, 1, \dots \tag{1.7}$$

Поэтому

$$I_1 f(y) = \sum_{k=1}^{N-1} (b_k \cos ky - a_k \sin ky). \tag{1.8}$$

Подставив в (1.8) выражения для коэффициентов Фурье и выполнив некоторые преобразования, получим:

$$I_1 f(y) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} f\left(\frac{m\pi}{N}\right) \sin\left(\frac{N-1}{2}\left(\frac{m\pi}{N} - y\right)\right) \sin\left(\frac{N}{2}\left(\frac{m\pi}{N} - y\right)\right) \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2}\left(\frac{m\pi}{N} - y\right). \tag{1.9}$$

Положим теперь в (1.9)

$$y = \frac{\pi \ell}{N}; \quad \ell = 0, 1, \dots, 2N-1. \tag{1.10}$$

Получим

$$I_1 f\left(\frac{\pi \ell}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{m=0;\, m \neq \ell}^{2N-1} f\left(\frac{\pi m}{N}\right) \frac{1-(-1)^{m-\ell}}{2} \operatorname{ctg}\left((m-\ell)\frac{\pi}{2N}\right). \tag{1.11}$$

Введем для большей наглядности обозначения:

$$f_m = f\left(\frac{m\pi}{N}\right); \quad I_1 f_\ell = I_1 f\left(\frac{\pi \ell}{N}\right); \quad c_m = \frac{1-(-1)^m}{2N} \operatorname{ctg} \frac{m\pi}{2N} \tag{1.12}$$

и перепишем формулу (1.11) в общем случае, а также отдельно для четных и нечетных узлов.

$$I_1 f_\ell = \sum_{m=0;\, m \neq \ell}^{2N+1} f_m c_{m-\ell}; \quad \ell = 0, 1, \dots, 2N-1; \tag{1.13}$$

$$I_1 f_{2\ell} = \sum_{m=0}^{N-1} f_{2m+1} c_{2(m-\ell)+1}; \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1; \tag{1.14}$$

$$I_1 f_{2\ell+1} = \sum_{m=0}^{N-1} f_{2m} c_{2(m-\ell)-1}; \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1. \tag{1.15}$$

Формулы (1.13)–(1.15) весьма удобны для машинного счета. Для вычисления $I_1 f(y)$ в $2N$ точках надо иметь $4N-1$ коэффициентов c_m, из которых половина – нули, т.е. $2N$ коэффициентов

$$c_{-(2N-1)},\ c_{-(2N-3)},\ \dots,\ c_{-3},\ c_{-1},\ c_1,\ c_3,\ \dots,\ c_{2N-3},\ c_{2N-1}. \tag{1.16}$$

Далее, можно ограничиться вычислением и запоминанием только коэффициентов с положительным индексами, если учесть, что

$$c_{-m} = -c_m. \tag{1.17}$$

В этом случае формулы (1.13)–(1.15) запишутся следующим образом:

$$I_1 f_\ell = -\sum_{m=1}^{\ell-1} f_{\ell-m} c_m + \sum_{m=1}^{2N-\ell-1} f_{\ell+m} c_m; \tag{1.18}$$

$$I_1 f_{2\ell} = -\sum_{m=0}^{\ell-1} f_{2(\ell-m)-1} c_{2m+1} + \sum_{m=0}^{N-m-1} f_{2(\ell+m)+1} c_{2m+1}; \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1; \tag{1.19}$$

$$I_1 f_{2\ell+1} = -\sum_{m=0}^{\ell} f_{2(\ell-m)} c_{2m+1} + \sum_{m=0}^{N-m-1} f_{2(\ell+m)+2} c_{2m+1}; \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1. \tag{1.20}$$

Организация машинного счета по формулам (1.18)–(1.20) сложнее, чем по формулам (1.13)–(1.15), однако требуется меньше места для хранения коэффициентов c_m. Если мы не связаны тем условием, что $I_1 f(y)$ необходимо вычислять в тех же точках, где задана $f(x)$, то целесообразно применять формулы (1.14), (1.15), (1.19), (1.20).

Переходим к оценке остаточного члена квадратурной формулы (1.9), полагая подынтегральную функцию $f(x)$ произвольной – лишь бы ее ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1.21}$$

абсолютно сходился. Для этого необходимо и достаточно требование сходимости ряда из модулей коэффициентов Фурье:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| \tag{1.22}$$

(см. /9/).

Лемма 1. Пусть ряд (1.22) сходится. Тогда тригонометрический полином

$$T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{2Nl} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (a_{2Nl+k} + a_{2Nl+2N-k})\right) \cos kx + \tag{1.23}$$

$$+\Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{N+2Ni}\Big)\cos Nx+\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(b_{k+2Ni}-b_{2N-k+2Ni})\Big)\sin kx$$

совпадает с $f(x)$ на сетке

$$x=\frac{\pi k}{N}\ ;\quad k=0,1,\dots,\ 2N-1. \tag{1.24}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться равенствами

$$\cos\Big((2N-k+2Ni)\frac{\pi\ell}{N}\Big)=\cos\frac{k\ell\pi}{N}\ ;\ i,k,\ell=0,1,\dots; \tag{1.25}$$

$$\sin\Big((2N-k+2Ni)\frac{\pi\ell}{N}\Big)=-\sin\frac{k\ell\pi}{N};\ i,\ k,\ \ell=0,1,\dots \tag{1.26}$$

и абсолютной сходимостью ряда (1.22).

Лемма 2. Для приближенных значений коэффициентов Фурье, вычисленных по формулам (1.4), (1.5), справедливы выражения

$$\overset{\approx}{a}_k=\sum_{i=0}^{\infty}(a_{k+2Ni}+a_{2N-k+2Ni})\ ;\quad k=1,2,\dots,N; \tag{1.27}$$

$$\overset{\approx}{b}_k=\sum_{i=0}^{\infty}(b_{k+2Ni}-b_{2N-k+2Ni})\ ;\quad k=1,\ 2,\dots,N-1. \tag{1.28}$$

Доказательство. Представим интерполяционный полином для $f(x)$ в виде:

$$T_N(x)=T_{N-1}(x)+\Big(\sum_{i=0}^{\infty}a_{N+2Ni}\Big)\cos Nx. \tag{1.29}$$

Как уже отмечалось, формула прямоугольников с $2N$ узлами дает точное значение интеграла от тригонометрического полинома $2N-1$ -го порядка. Поэтому

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\cos\frac{mN\pi}{N}\ \cos\frac{mk\pi}{N}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos Nx\cos kx\,dx=0;\ \ k=0,1,\dots,\ N-1; \tag{1.30}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\cos\frac{mN\pi}{N}\ \sin\frac{mk\pi}{N}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos Nx\ \sin kx\,dx=0\ ;\ k=0,1,\dots,N-1. \tag{1.31}$$

Но

$$\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N-1}\cos^2\frac{N\pi j}{N}=2\neq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 Nx\,dx. \tag{1.32}$$

Учитывая равенства (1.30)–(1.32) и принимая во внимание то, что $T_{N-1}(x)$ –полином $N-1$ -го порядка и для него коэффициенты Фурье по формулам (1.4), (1.5) вычисляются точно, приходим к равенствам (1.27), (1.28).

Теперь можно написать выражение приближенного значения сингулярного интеграла

$$\overset{\approx}{I}_1 f(y)=\sum_{k=1}^{N-1}(\overset{\approx}{b}_k\cos ky-\overset{\approx}{a}_k\ \sin ky)=\sum_{k=1}^{N-1}\Big(\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(b_{k+2Ni}-$$

$$-b_{2N-k+2Ni})\Big)\cos ky-\Big(\sum_{i=0}^{\infty}(a_{k+2Ni}+a_{2N-k+2Ni}\Big)\Big)\sin ky\Big), \tag{1.33}$$

а также выражение остаточного члена

$$\overset{\approx}{I}_1 f(y)-I_1 f(y)=\sum_{k=1}^{N-1}\big((\overset{\approx}{b}_k-b_k)\cos ky-(\overset{\approx}{a}_k-a_k)\ \sin\ ky\big)- \tag{1.34}$$

$$-\sum_{k=N}^{\infty}(b_k\cos ky-a_k\sin ky).$$

Далее имеем

$$\overset{\approx}{b}_k-b_k=\sum_{i=1}^{\infty}(b_{2Ni+k}-b_{2Ni-k})\ ; \tag{1.35}$$

$$\overset{\approx}{a}_k-a_k=\sum_{i=1}^{\infty}(a_{2Ni+k}+a_{2Ni-k})\ ; \tag{1.36}$$

$$|\overset{\approx}{b}_k-b_k|\le\sum_{i=1}^{\infty}(|b_{2Ni+k}|+|b_{2Ni-k}|); \tag{1.37}$$

$$|\overset{\approx}{a}_k-a_k|\le\sum_{i=1}^{\infty}(|a_{2Ni+k}|+|a_{2Ni-k}|); \tag{1.38}$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}|(\overset{\approx}{b}_k-b_k)|\le\sum_{i=N+1}^{\infty}|b_i|\ ; \tag{1.39}$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}|(\overset{\approx}{a}_k-a_k)|\le\sum_{i=N+1}^{\infty}|a_i|\ ; \tag{1.40}$$

$$|\overset{\approx}{I}_1 f(y)-I_1 f(y)|\le 2\sum_{i=N}^{\infty}(|b_i|+|a_i|). \tag{1.41}$$

Итак, доказана следующая

Теорема 1. Если ряд Фурье подынтегральной функции $f(x)$ абсолютно сходится, то приближенное значение сингулярного интеграла (0.1), вычисленное по квадратурной формуле (1.9), сходится к точному значению при безграничном увеличении числа узлов. Для остаточного члена квадратурной формулы (1.9) имеет место оценка (1.41).

Пользуясь известными результатами из теории тригонометрических рядов /9/, отметим следующие достаточные признаки сходимости $\overset{\approx}{I}_1 f(y)$ и $I_1 f(y)$:

1) $f(x)$ имеет суммируемую вторую производную;

2) $f(x)$ абсолютно непрерывна и имеет принадлежащую L^p первую производную;

3) $f(x)$ имеет ограниченное изменение и принадлежит классу $L_{ip}\,\alpha$; $\alpha>½$; в этом последнем случае справедлива оценка

$$|\overset{\approx}{I}_1 f(y)-I_1 f(y)|\le\frac{C}{N^{\alpha-½}}\ . \tag{1.42}$$

Если $f(x)$ имеет суммируемую $k+1$ -ю производную, то

$$|\overset{\approx}{I}_1 f(y)-I_1 f(y)|\le\frac{C}{N^k}\ . \tag{1,43}$$

Если $f(x)$ аналитична, то

$$|\overset{\approx}{I}_1 f(y)-I_1 f(y)|\le C\theta^N;\quad 0<\theta<1. \tag{1.44}$$

§ 2. Сингулярный интеграл с ядром Коши

Рассмотрим интеграл (0.2). Если функция $a(x)$ имеет производную, то интеграл (0.2) можно записать в виде:

$$I_2 f(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, w(x)\, dx}{x-y} \quad ; \tag{2.1}$$

в этом случае $w(x) \geq 0$.

Построим квадратурную формулу, точную, когда $f(x)$ – полином от x n-й степени. Пусть $\{p_k(x)\}$ – ортонормированная система полиномов, соответствующая распределению $da(x)$:

$$\int_{-1}^{1} p_k(x) p_\ell(x)\, da(x) = \begin{cases} 0, & k \neq \ell . \\ 1, & k \neq \ell . \end{cases} \tag{2.2}$$

Разложим $f(x)$ по полиномам $p_k(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k\, p_k(x). \tag{2.3}$$

Коэффициенты f_k вычисляются по формулам:

$$f_k = \int_{-1}^{1} f(x)\, p_k(x)\, da(x) \ ; \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Чтобы f_k вычислялись точно, воспользуемся формулой Гаусса с $n+1$ узлом: она точна при вычислении интегралов от полиномов $2n+1$ степени, и поэтому коэффициенты (2.4) как интегралы от полиномов степени не выше $2n$ вычислятся точно:

$$f_k = \sum_{m=1}^{n+1} \lambda_m^{(n+1)} f(x_m)\, p_k(x_m). \tag{2.5}$$

Если теперь обозначим

$$q_k(y) = -\int_{-1}^{1} \frac{p_k(x)\, da(x)}{x-y} \quad , \tag{2.6}$$

то получим

$$I_2 f(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n} f_k\, q_k(y). \tag{2.7}$$

Подставив сюда выражение для f_k из (2.5), получим :

$$I_2 f(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n+1} \lambda_m^{(n+1)} f(x_m) \sum_{k=0}^{n} p_k(x_m) q_k(y). \tag{2.8}$$

Формула (2.8) по существу и есть то, что нам нужно, – это выражение для сингулярного интеграла от полинома n-й степени. Нельзя сказать, что в таком виде оно является простым и удобным для применения. Однако формула (2.8) замечательным образом упрощается. Для этого нам понадобятся некоторые формулы из теории ортогональных многочленов (см. /10/).

Пусть $x, y \in [-1, 1]$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) q_k(y) = \frac{1}{x-y} \left[1 + \frac{k_n}{k_n+1} \left(q_{n+1}(y) p_n(x) - q_n(y) p_{n+1}(x) \right) \right], \tag{2.9}$$

$$1 = \frac{k_n}{k_n+1} \left(p_{n+1}(x) q_n(x) - p_n(x) q_{n+1}(x) \right). \tag{2.10}$$

Здесь k_n – коэффициент при x^n в полиноме $p_n(x)$. Из (2.9) и (2.10) получим

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x) q_k(y) = -\frac{1}{x-y} \frac{k_n}{k_n+1} \left[p_{n+1}(x) (q_n(x) - q_n(y)) + p_n(x) (q_{n+1}(y) - q_{n+1}(x)) \right]. \tag{2.11}$$

А теперь воспользуемся тем, что узлы формулы Гаусса x_m являются корнями $n+1$-го ортогонального многочлена:

$$p_{n+1}(x_m) = 0 \ ; \quad m = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{2.12}$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(x_m) q_k(y) = -\frac{1}{x_m - y} \frac{k}{k_n+1}\, p_n(x_m) (q_{n+1}(y) - q_{n+1}(x_m)). \tag{2.13}$$

И, наконец, воспользовавшись выражением для коэффициентов Кристоффеля:

$$\lambda_m^{(n+1)} = \frac{k_n+1}{k_n} \frac{1}{p_n(x_m)\, p'_{n+1}(x_m)} \tag{2.14}$$

и подставив (2.13) в формулу (2.8), получим ;

$$I_2 f(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{f(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)} \cdot \frac{q_{n+1}(x_m) - q_{n+1}(y)}{x_m - y}. \tag{2.15}$$

Если точка y совпадает с каким-либо из узлов x_m, то, естественно, вместо

$$\frac{q_{n+1}(x_m) - q_{n+1}(y)}{x_m - y} \tag{2.16}$$

надо взять $q'_{n+1}(x_m)$.

Окончательная формула (2.15) достаточно проста и удобна для счета. Чтобы вычислить $I_2 f(y)$ в $n+1$ точке, надо иметь, помимо $n+1$ значения подынтегральной функции $f(x_m)$ $(m = 1, 2, \ldots, n+1)$, еще $5(n+1)$ значений: $p_{n+1}(x_m)$, $q_{n+1}(x_m)$, $q_{n+1}(y)$, x_m, y. Если же $f(y)$ вычисляется в тех же точках, где задана $f(x)$, т.е. при $y = x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, то, кроме $n+1$ значения функции $f(x)$, надо иметь еще $4(n+1)$ значений $p'_{n+1}(x_m)$, $q_{n+1}(x_m)$, $q'_{n+1}(x_m)$, x_m.

Переходим к оценке остаточного члена. Применим формулу (2.15) для вычисления сингулярного интеграла (0.2) от произвольной функции $f(x)$:

$$\overset{\approx}{I}_2 f(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{f(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)} \quad \frac{q_{n+1}(x_m) - q_{n+1}(y)}{x_m - y} \ . \tag{2.17}$$

Пусть

$$f(x) = L_n(x) + R(x), \tag{2.18}$$

где $L_n(x)$ – некоторый полином n-го порядка. Тогда

$$\overset{\approx}{I}_2 f(y) - I_2 f(y) = \overset{\approx}{I}_2 R(y) - I_2 R(y) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{R(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)} \cdot \frac{q_{n+1}(x_m) - q_{n+1}(y)}{x_m - y} -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} R(x) \frac{da(x)}{x-y} = -\frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{R(x_m) - R(y)}{p'_{n+1}(x_m)} \cdot \frac{q_{n+1}(x_m) - q_{n+1}(y)}{x_m - y} - \tag{2.19}$$

$$-R(y)\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{1}{x_m-y}\cdot\frac{q_{n+1}(x_m)-q_{n+1}(y)}{p'_{n+1}(x_m)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{R(x)-R(y)}{x-y}\,d\alpha(x)-R(y)\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\alpha(x)}{x-y}.$$

Так как формула (2.17) точна для $f(x)\equiv 1$, то последнее равенство упрощается:

$$\tilde{\tilde{I}}_2 f(y)-I_2 f(y)=-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{R(x_m)-R(y)}{x_m-y}\cdot\frac{q_{n+1}(x_m)-q_{n+1}(y)}{p'_{n+1}(x_m)}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{R(x)-R(y)}{x-y}\,d\alpha(x). \tag{2.20}$$

Если учесть теперь, что

$$\frac{q_{n+1}(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)}=\frac{k_{n+1}}{k_n}\,\frac{1}{p_n(x_m)\,p'_{n+1}(x_m)}=-\lambda_m^{(n+1)} \tag{2.21}$$

($\lambda_m^{(n+1)}$ – коэффициенты Кристоффеля), то получим

$$\tilde{\tilde{I}}_2 f(y)-I_2 f(y)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\lambda_m^{(n+1)}\frac{R(x_m)-R(y)}{x_m-y}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{R(x)-R(y)}{x-y}\,d\alpha(x)+$$
$$+q_{n+1}(y)\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\frac{1}{p'_{n+1}(x_m)}\cdot\frac{R(x_m)-R(y)}{x_m-y}. \tag{2.22}$$

Итак, мы получили общую форму для остаточного члена. Предположим теперь, что подынтегральная функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную. Далее, пусть $L_{n-1}(x)$ – полином наилучшего приближения для $f'(x)$. Положим

$$L_n(x)=\int_0^x L_{n-1}(\xi)\,d\xi. \tag{2.23}$$

Обозначим

$$\max_{x\in[-1,1]}|R'(x)|=\max_{x\in[-1,1]}|f'(x)-L_{n-1}(x)|=E_{n-1}^{(1)}. \tag{2.24}$$

Тогда

$$\left|\frac{R(x_m)-R(y)}{x_m-y}\right|\le E_{n-1}^{(1)}, \tag{2.25}$$

и из формулы (2.22) получаем оценку

$$|\tilde{\tilde{I}}_2 f(y)-I_2 f(y)|\le\frac{1}{\pi}E_{n-1}^{(1)}\Big[2\alpha(1)-2\alpha(-1)+|q_{n+1}(y)|\sum_{m=1}^{n+1}\Big|\frac{1}{p'_{n+1}(x_m)}\Big|\Big]. \tag{2.26}$$

Далее имеем

$$\sum_{m=1}^{n+1}\frac{1}{|p'_{n+1}(x_m)|}\le\max_{1\le m\le n+1}\frac{1}{|q_{n+1}(x_m)|}\sum_{m=1}^{n+1}\left|\frac{q_{n+1}(x_m)}{p'_{n+1}(x_m)}\right|=$$
$$=\frac{k_n}{k_{n+1}}\,[\alpha(1)-\alpha(-1)]\max_{1\le m\le n+1}|p_n(x_m)|. \tag{2.27}$$

Из (2.26) получим менее точную, но более простую оценку:

$$|\tilde{\tilde{I}}_2 f(y)-I_2 f(y)|\le\frac{1}{\pi}E_{n-1}^{(1)}[\alpha(1)-\alpha(-1)]\Big[2+\frac{k_n}{k_{n+1}}|q_{n+1}(y)|\max_{1\le m\le n+1}|p_n(x_m)|\Big]. \tag{2.28}$$

До сих пор точка y, в которой вычислялся сингулярный интеграл, была произвольной. Посмотрим, что получится, если вычислять сингулярный интеграл в нулях функции второго рода $q_{n+1}(y)$. Итак, пусть y^* такой, что

$$q_{n+1}(y^*)=0. \tag{2.29}$$

Тогда

$$\tilde{\tilde{I}}_2 f(y^*)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\lambda_m^{(n+1)}\frac{f(x_m)}{x_m-y^*}. \tag{2.30}$$

Формула (2.30) есть не что иное, как формула Гаусса для обычного интеграла, примененная к подынтегральной функции

$$F(x,y^*)=\frac{f(x)}{x-y^*}. \tag{2.31}$$

Имеем следующее выражение для остаточного члена:

$$\tilde{\tilde{I}}_2 f(y^*)-I_2 f(y^*)=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\lambda_m^{(n+1)}\frac{f(x_m)}{x_m-y^*}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,d\alpha(x)}{x-y^*}= \tag{2.32}$$
$$=\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n+1}\lambda_m^{(n+1)}\frac{f(x_m)-f(y^*)}{x_m-y^*}-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)-f(y^*)}{x-y^*}\,d\alpha(x)$$

(получается аналогично соотношению (2.20)). Если теперь положить

$$f(x)=L_{2n+2}(x)+R(x); \tag{2.33}$$

а в качестве $L_{2n+2}(x)$ взять полином

$$L_{2n+2}=\int_0^x L_{2n+1}(\xi)\,d\xi, \tag{2.34}$$

где $L_{2n+1}(x)$ – полином наилучшего приближения для $f'(x)$, то получим оценку

$$|\tilde{\tilde{I}}_2 f(y^*)-I_2 f(y^*)|\le\frac{2}{\pi}[\alpha(1)-\alpha(-1)]E_{2n+1}^{(1)}. \tag{2.35}$$

Доказана следующая

Теорема 2. Если сингулярный интеграл (0.2) вычисляется в нулях функции второго рода $q_{n+1}(y)$, то формула (2.17) становится точной для произвольного полинома $2n+2$ -й степени, принимая при этом более простой вид (2.30); для непрерывно дифференцируемой подынтегральной функции $f(x)$ справедлива оценка остаточного члена (2.35).

Весьма важным является вопрос о расположении нулей функции второго рода. Из (2.10) имеем

$$1=-\frac{k_n}{k_{n+1}}\,q_{n+1}(x_m)\cdot p_n(x_m), \tag{2.36}$$

откуда, ввиду положительности старших коэффициентов k_n и k_{n+1}, заключаем, что $q_{n+1}(x_m)$ и $p_n(x_m)$ – разных знаков. При $x\ge 1$ все ортогональные полиномы строго положительны. Пусть x_1 – ближайший к 1 корень $p_{n+1}(x)$. Тогда $p_n(x_1)>0$, ибо между 1 и x_1 нет корня $p_n(x)$, и $p_n(x)$ не может сменить знак. Далее, если x_2 – следующий корень $p_{n+1}(x)$, то $p_n(x_2)<0$, ибо между x_1 и x_2 находится точно один корень $p_n(x)$. Имеем

$$\operatorname{Sign} p_n(x_m) = (-1)^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots, n+1; \tag{2.37}$$

поэтому

$$\operatorname{Sign} q_{n+1}(x_m) = (-1)^m, \quad m = 1, 2, \dots, n+1. \tag{2.38}$$

Между двумя соседними нулями полинома $p_{n+1}(x)$ функция $q_{n+1}(x)$ меняет знак, и, следовательно, имеет там хотя бы один корень. Нули функции второго рода располагаются, по крайней мере, с той же густотой, что и гауссовские узлы x_m.

§ 3. Численный пример

В качестве примера были сосчитаны по формуле (1.13) сингулярные интегралы от функций

$$f(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \sin kx = \frac{\sin x}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2} \tag{3.1}$$

для различных значений параметра λ и числа узлов $2N$. Результаты счета сравнивались с точным **значением сингулярного интеграла**

$$I_1 f(y,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \cos kx = \frac{\cos x - \lambda}{1 - 2\lambda\cos x + \lambda^2}. \tag{3.2}$$

Назовем величину

$$\max_y |\tilde{I}_1 f(y,\lambda) - I_1 f(y,\lambda)|; \quad y = 0, \frac{\pi}{N}, \dots, \frac{2N-1}{N}\pi \tag{3.3}$$

численной ошибкой. Она уменьшается при увеличении числа точек $2N$ до величины порядка 10^{-7}; дальнейшему уменьшению препятствуют ошибки округления при счете по формуле (1.13). Интересно сравнить численную ошибку с оценкой (1.41).

Таблица

	$\lambda = 0,75$	$\lambda = 0,875$	$\lambda = 0,9375$
Численная ошибка	$10\,(0,78)^N$	$12,6 \cdot (0,90)^N$	$30,6 \cdot (0,95)^N$
Оценка (1.41)	$10,7 \cdot (0,75)^N$	$17,3\,(0,875)^N$	$34 \cdot (0,9375)^N$

Как видно из таблицы 1, эмпирическая формула, описывающая численную ошибку, довольно близка к оценке (1.41), что указывает на эффективность последней.

В заключение автор выражает благодарность доц. Жидкову Н.П. за постоянное внимание к данной работе; участникам семинара кафедры вычислительной математики МГУ, руководимого членом-корреспондентом АН СССР Тихоновым А.Н., – за ряд критических

замечаний, а также сотрудникам ВЦ ОИЯИ Железновой К.М. и Маркову А.С. – за проведенные ими численные расчеты.

Литература

1. Ф.Д. Гахов. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.
2. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. В.В.Иванов. Приближенное вычисление сингулярных интегралов. Научные труды Новочеркасского политехнического института, 67 (81), 1958.
4. Г.А.Николаева. О построении конформного отображения методом сопряженных тригонометрических рядов. ДАН СССР, 110, № 2, 1956.
5. С.П.Капица. Механическое вычисление гармонически сопряженных функций. Вычислительная математика. Сб. 1, изд. АН СССР, 1957.
6. Б.А.Вертгейм. Приближенное вычисление некоторых сингулярных интегралов. Сб. "Исследования по современным проблемам ТФКП". Физматгиз, 1961.
7. И.П.Мысовских. Лекции по методам вычислений. Физматгиз, 1962.
8. Ф.Трикоми. Интегральные уравнения. ИЛ., 1960.
9. Н.К.Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз, 1961.
10. Г.Сегё. Ортогональные многочлены. Физматгиз, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июня 1963 года.