ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Ефремов

Р-1305

АСИМПТОТИКА ГРАФОВ ФЕЙНМАНА. II.

Дубна 1963

А.В. Ефремов

Р-1305

АСИМПТОТИКА ГРАФОВ ФЕЙНМАНА. II.

Дубна 1963

Наша предыдущая работа, далее цитируемая как [1], была посвящена разработке метода определения асимптотики графов Фейнмана, которые дают сходящийся вклад в амплитуду рассеяния /под асимптотикой графа мы понимаем поведение вклада от этого графа при условии, что одна из независимых переменных много больше всех остальных/. В [1] было выяснено, какие элементы топологии графа определяют асимптотику, и даны правила соответствия между топологией графа и его асимптотикой. К сожалению, эти правила не дают истинной асимптотики всех сходящихся графов, но они, наверняка, справедливы для графов, у которых либо нет цепей, соединяющих вершину 1 с вершиной 3 и вершину 2 с 4 и не имеющих общих элементов /хотя для вершин 1,2 и 3,4 такие цепи существуют/, либо, наоборот, нет таких "непересекающихся" цепей для вершин 1,2 и 3,4, но есть для вершин 1,3 и 2,4 /напомним, что номера 1,2,3,4 мы приписываем вершинам, в которые соответственно входят внешние 4-импульсы p_1, p_2, p_3, p_4; $S=(p_1+p_2)^2$; $t=(p_2+p_3)^2$; $u=(p_1+p_3)^2=-S-t+\sum_{i=1}^{4} p_i^2$ и асимптотика графа отыскивается при $s\to\infty$ /. В этих случаях коэффициент перед S в a -представлении будет знакоопределенным.

Трудность работы с расходящимися графами состоит в том, что обычное a -представление уже не годится, и необходимо рассматривать соответствующим образом регуляризованное выражение. Настоящая работа посвящена рассмотрению асимптотики такого регуляризованного вклада, причем оказывается, что после выделения множителя, возникающего от расходящейся части графа, задача фактически сводится к определению асимптотики графа, у которого расходящаяся часть стянута в точку. Для простоты мы будем рассматривать только такие сильносвязные графы, у которых степень вершин не превосходит четырех. В этом случае, как известно, максимальная расходимость - линейная. Она возникает из-за частей, соответствующих собственной массе мезона.

Итак, пусть граф G содержит сильносвязный подграф Γ с ℓ_1 ребрами и n_1 вершинами, причем $2n_1-\ell_1-2=-q\leq -1$. В этом случае, как уже говорилось, обычное выражение в a -представлении /с точностью до множителя/

$$T^G=\int_0^\infty \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} d a_\nu}{D^2(a)} \exp\{iQ(a,p)\} \qquad /1/$$

не имеет смысла. Действительно, если для $a_\nu\in\Gamma$ произвести замену

$$a_\nu\to\lambda a_\nu ,$$

то получим явно расходящееся по λ выражение

$$T^G=\int_0^\infty \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} d a_\nu\, \delta(1-\Sigma a_\nu\in\Gamma)}{D'^2(\lambda,a)}\frac{d\lambda}{\lambda^q}\exp\{iQ(a,\lambda,p)\} ,$$

где

$$D'(\lambda,a)=D(\lambda,a)/\lambda^{\ell_1-n_1+1} .$$

Вместо этого интеграла в теории поля рассматривается регуляризованное по Γ выражение [2]

$$R_\Gamma^G=\int_0^\infty \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu\,\delta(1-\Sigma a_\nu\in\Gamma)\,d\lambda}{\lambda^q}\times$$

$$\times\left[\frac{\exp\{iQ(\lambda,a,p)\}}{D'^2(\lambda,a)}-\sum_{s=0}^{q-1}\frac{\lambda^s}{s!}\frac{\partial^s}{\partial\lambda^s}\left(\frac{\exp\{iQ(0,a,p)\}}{D'^2(0,a)}\right)\right]. \qquad /2/$$

Однако для наших целей это выражение не совсем удобно, поэтому предлагается другой метод нахождения R^G_Γ .

Введем функцию

$$T^G_{(\mu)} = \int_0^\infty \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu}{D^2(a)} \exp\{ i\psi(a,p) + i\mu \sum a_\nu \in \Gamma \}$$

и соответствующую ей регуляризованную функцию $R^G_\Gamma(\mu)$. Очевидно, что

$$\frac{\partial^q R^G_\Gamma(\mu)}{\partial \mu^q} = \frac{\partial^q T^G(\mu)}{\partial \mu^q} .$$

Следовательно,

$$R^G_\Gamma = R^G_\Gamma(M) - M \frac{\partial R^G_\Gamma(M)}{\partial M} + \int_M^0 dx \int_M^x dy \frac{\partial^2 T^G(y)}{\partial y^2} \qquad /3/$$

для $q = 2$, и

$$R^G_\Gamma = R^G_\Gamma(M) + \int_M^0 \frac{\partial T^G(x)}{\partial x} dx \qquad /3/$$

для $q = 1$. Воспользовавшись теперь для R^G_Γ выражением типа /2/, нетрудно показать, что при $\mu \to \infty$

$$R^G_\Gamma(\mu) \approx N_\Gamma T^{G'} \begin{cases} -\ln \mu & \text{для } q = 1 \\ (2n-\ell-2)\mu \ln \mu & \text{для } q = 2 , \end{cases} \qquad /4/$$

где $N_\Gamma = \int \frac{\delta(1-\sum a_\nu \in \Gamma)}{D^2_\Gamma(a)} \prod da_\nu \in \Gamma$ / согласно /8/, $D'(0,a) = D_\Gamma D_{G'}$/,

а $T^{G'}$ -вклад от графа, полученного из G стягиванием в точку Γ . Таким образом, для графа рассеяния, после обычной замены $a_\nu \to \rho a_\nu$ для всех a_ν в интегральном представлении $\frac{\partial^q T^G}{\partial \mu^q}$ и интегрирования по ρ , мы приходим к задаче определения асимптотики выражения

$$\frac{\partial^q T(\mu)}{\partial \mu^q} = (-)^q m \dots (m+q-1)\epsilon^{m+q} \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu d\lambda\, \delta(1-\lambda - \sum a_\nu \in G')\, \delta(1-\sum a_\nu \in \Gamma)}{D'^2(\lambda, a)\,[B(\lambda,a) + \frac{\mu}{S}\lambda + \epsilon f(\lambda,a,t)]^{m+q}} \qquad /5/$$

при $\epsilon \to 0$, где $\epsilon = 1/S$, $m = 2n-\ell-2$, а $B(\lambda,a) = \frac{A(\lambda,a)}{D(\lambda a)}$ /см. /1/ /.

Нетрудно теперь сообразить, что если разбить интеграл по λ на участки $(0,\delta)$ и (δ,∞) (δ -сколь угодно мало !), то наибольший вклад в асимптотику даст первый интеграл. Поэтому мы положим $\lambda = 0$ всюду, где это несущественно для асимптотики, т.е. в D' , f и δ -функции, а $B(\lambda,a)$ разложим с точностью до линейного члена $B(\lambda,a) = B_0(a) + \lambda B_1(a) + \dots$ Заметим, что мы не можем считать малым член μ/S, поскольку при подстановке в /3/ необходимо знать поведение при $\mu/S \gg 1$.
Дифференцируя теперь $m+q-2$ раз по f , можно привести /5/ к виду:

$$\frac{\partial^q T(\mu)}{\partial \mu^q} = \frac{(-)^{m-2}}{(m-1)!} \epsilon^2 \int_0^\infty \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu\, \delta(1-\sum a_\nu \in D')\,\delta(1-\sum a_\nu \in \Gamma)}{D'^2(a)} \times$$

$$\times \frac{\partial^{m+q-2}}{\partial f^{m+q-2}} \int_0^{\delta} \frac{d\lambda}{[B_0 + \lambda B_1 + \frac{\mu}{S} \lambda + \epsilon f]^2} ,$$

которое после интегрирования по λ превратится в

$$\frac{(-)^{m-2}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \, \delta(1-\Sigma a_\nu \in G')\, \delta(1-\Sigma a_\nu \in \Gamma)}{D'^2(a)} \times$$

$$\times \frac{\partial^{m+q-2}}{\partial f^{m+q-2}} \frac{\delta}{(B_0 S + f)(B_0 S + \delta B_1 \delta + \mu\delta + f)} .$$

Воспользовавшись теперь /3/, /4/ мы получим после интеграции по μ :

$$R^G_\Gamma = \frac{(-)^{m-2}}{(m-1)!} \int_0^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \, \delta(1-\Sigma a_\nu \in D')\, \delta(1+\Sigma a_\nu \in \Gamma)}{D'^2(a)} \times$$

$$\times \frac{\partial^{m+q-2}}{\partial f^{m+q-2}} \frac{1}{B_0 S + f} \begin{cases} \ln(B_0 S + B_1 \delta S + f) & \text{для} \quad q = 1 \\ \frac{B_0 S + B_1 \delta S + f}{\delta} \ln(B_0 S + B_1 \delta S + f) & \text{для} \quad q = 2 . \end{cases}$$

Для случая $q = 2$ одно дифференцирование по f немедленно приводит к

$$- \frac{B_1}{(B_0 S + f)^2} \ln(B_0 S + B_1 \delta S + f) + \frac{1}{\delta(B_0 S + f)} .$$

Ясно, что наибольший вклад в асимптотику дает член с нулевой производной от логарифма. Выполняя теперь дифференцирование по f , мы окончательно приходим к следующему выражению для асимптотики регуляризованного вклада графа G :

$$R^G_\Gamma = \begin{cases} -N_\Gamma \ln S \int_0^{\infty} \frac{\prod da_\nu \in G' \delta(1-\Sigma a_\nu \in G')}{D^{G'}(a)\, [B_0 S + f]^m} = - N_\Gamma \ln S \; T^{G'} & \text{для} \quad q = 1 \\ N_\Gamma m \ln S \int_0^{\infty} \frac{\prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \, \delta(1-\Sigma a_\nu \in G')\delta(1-\Sigma a_\nu \in \Gamma) B_1(a) S}{D^{G'}\, [B_0 S + f]^{m+1}} & \text{для} \quad q = 2 , \end{cases} \qquad /6/$$

где $D^{G'}(a)$, $B_0(a)$ $f(a, t)$ соответствуют графу G' .

Может, конечно, оказаться, что граф G' также содержит расходящийся подграф Γ_2 . В этом случае необходимо повторить всю процедуру с введением μ_2 дифференцированием по нему q_2 раз и т.д. Таким образом, в результате последовательного удаления расходящихся подграфов мы в конце концов придем к задаче о нахождении асимптотики сходящегося графа, которой была посвящена работа /1/.

Особого рассмотрения требует случай $m = 0$, т.е. случай, когда граф логарифмически расходится как целое. Однако он после дифференцирования $\frac{\partial T}{\partial S}$ фактически сводится к случаю $m = 1$ с добавочным множителем B_0 в числителе подынтегрального выражения формулы /6/. При этом мы, конечно, предполагаем, что дифференцирование не уничтожает всех расходимостей графа G , поскольку противный случай был уже нами рассмотрен в работе 1.

Остановимся теперь на топологической интерпретации функции

$$B_1^G(a) = \frac{d}{d\lambda}\, \frac{A_{12}^G(\lambda, a) - A_{13}^G(\lambda, a)}{D^G(\lambda, a)} \Big|_{\lambda=0} . \qquad /7/$$

Мы обозначили через $D^G = \sum_i D_i^G$ - сумму всех деревьев графа G (D_i -произведение параметров a хорд i -того дерева графа G /. Кроме того, введем обозначения:

$$A_i^G\{n_1 \ldots n_k ; n_{k+1} \ldots n_m\} - i - \text{тое} \quad 2 \quad \text{-дерево графа} \quad G$$

/т.е. произведение параметров a хорд этого 2 -дерева/ с вершинами $\{n_1 \ldots n_k\}$ и $\{n_{k+1} \ldots n_m\}$, принадлежащими различным компонентам;

$S^G_{G_i \bar{G}_i}$ -произведение параметров a -сечения графа G на две связные компоненты G_i и $\bar{G}_i$. Как уже упоминалось в 1,

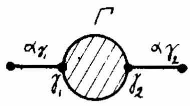
$$A^G\{n_1 \ldots n_k ; n_{k+1} \ldots n_m\} = \sum_i A_i^G\{n_1 \ldots n_k ; n_{k+1} \ldots n_m\} =$$

$$= \sum_i S^G_{G_i \bar{G}_i} D^{G_i} D^{\bar{G}_i} ,$$

$$\{n_1 \ldots n_k\} \subset G_i ,$$

$$\{n_{k+1} \ldots n_m\} \subset \bar{G}_i .$$

Рассмотрим теперь граф G , содержащий линейно-расходящийся подграф Γ , т.е. для графов со степенью вершин не выше четырех - подграф, изображенный на рис.1.



Р и с. 1.

Докажем, что для такого графа

$$D^G = D^{G'} D^{\Gamma} + A^{\Gamma}\{\gamma_1 ; \gamma_2\} D^{G''} , \qquad /8/$$

где G' - граф, полученный из G стягиванием в точку всех ребер подграфа Γ , а

G'' – снятием всех ребер подграфа Γ. Действительно, поскольку подграф Γ смежен только с двумя ребрами остальной части графа G, то в любое дерево графа G может входить либо дерево графа Γ, либо его 2 – дерево с находящимися в различных компонентах вершинами y_1 и y_2. Поэтому любое дерево будет содержаться либо в первом слагаемом формулы /8/, либо во втором.

Совершенно аналогично для суммы 2 –деревьев

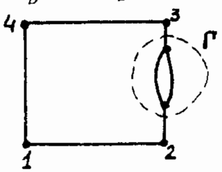
$$A^{G}\{n_1 \dots n_k ; n_{k+1} \dots n_m\} = A^{G'}\{n_1 \dots n_k ; n_{k+1} \dots n_m\} D^{\Gamma} + A^{\Gamma}\{y_1 ; y_2\} A^{G''}\{n_1 \dots n_k ; n_{k+1} \dots n_m\}. \qquad /9/$$

Действительно, поскольку 2 –дерево получается из дерева снятием одного ребра, то любое 2 –дерево графа G будет принадлежать либо первому слагаемому формулы /9/, если снятое ребро не принадлежит Γ, либо второму – в противном случае. Воспользовавшись теперь /8/, /9/ получим из /7/:

$$B_1^{G} = \frac{A^{\Gamma}\{y_1 ; y_2\}}{D^{\Gamma}} \cdot \frac{D^{G''}}{D^{G'}} [B^{G''} - B^{G'}] .$$

<u>Примеры</u>

1°

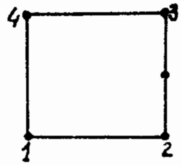


Р и с. 2.

Граф содержит логарифмически расходящуюся часть Γ. Согласно формуле /6/, имеем:

$$R_{\Gamma}^{G} \approx \ln S \; T^{G'} ,$$

где граф G' имеет вид



Р и с. 3.

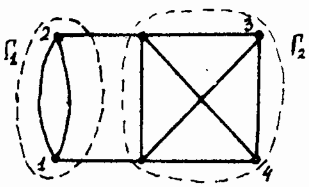
Асимптотика этого графа

$$T^{G'} \approx \frac{1}{S} .$$

Таким образом,

$$R_{\Gamma}^{G} \approx \frac{\ln S}{S}$$

2°



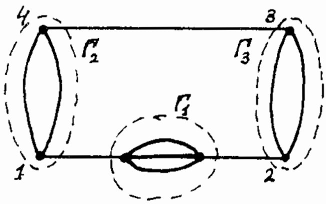
Р и с. 4.

Граф содержит два логарифмически расходящихся подграфа: Γ_1 и Γ_2. После стягивания их в точку получим G',

Р и с. 5.

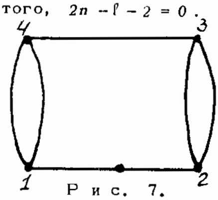
который ведет себя, как $\ln S$. Таким образом,

$$R^{G}_{\Gamma_1\Gamma_2} \approx \ln^3 S .$$

3°. 

Р и с. 6.

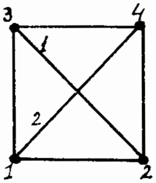
Граф содержит одну линейно-расходящуюся часть Γ_1 и две логарифмически расходящиеся части Γ_2 и Γ_3. Кроме того, $2n - \ell - 2 = 0$. После стягивания Γ_1 приходим к графу G',



Р и с. 7.

для которого $\frac{\partial R^{G'}}{\partial S} \approx \frac{1}{S} \ln^2 S$, следовательно, $R^{G}_{\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3} \approx \ln^4 S$.

4°. В заключение приведем один пример на нахождение старшего члена, зависящего от t. Рассмотрим граф



Р и с. 8.

В работе [1] найдено, что он ведет себя, как $\ln S$, причем коэффициент не зависит от t. Однако во многих случаях полезно знать старший, зависящий от t член асимптотического разложения. Чтобы определить его, рассмотрим производную $\frac{\partial T^G}{\partial t}$. Так как граф G логарифмически расходится, то $\frac{\partial T^G}{\partial t}$ –сходится и при $S \to \infty$ ведет себя, как $\frac{1}{S} \ln^2 S$ /граф первого класса, $\nu = 2$, $(2n - \ell - 2) + 1 = 1$, и коэффициент при t не обращается в нуль при стягивании линий 1,2/. Следовательно,

$$R^G \approx \frac{t}{S} \ln^2 S + \Phi(S).$$

Л и т е р а т у р а

1. А.В. Ефремов. Асимптотика графов Фейнмана. I. Препринт ОИЯИ Р-1242, Дубна,1963 .
2. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Техиздат, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 мая 1963 года.