1284


ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

П. Бырнев, Р. Денчев, Ким Зе Пхен



Р-1284


# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЛОУ


Дубна 1963

П. Бырнев, Р. Денчев, Ким Зе Пхен

Р-1284

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЙ РАССЕЯНИЯ ЛОУ

Дубна 1963

## § 1. Модельное уравнение

Рассмотрим следующую систему из одного линейного сингулярного интегрального уравнения и одного алгебраического нелинейного уравнения:

$$u(s) = A - \frac{a}{s_0 - s} + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{v(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma, \qquad /1/$$

$$v(s) = u^2(s) + v^2(s),$$

где $u(s)$ , $v(s)$ – неизвестные функции, определенные и суммируемые в интервале $(-1,1)$ ; $s_0$ , $a$, $A$ – заданные вещественные константы, $a \le 0$ , $|s_0| > 1$ .

Эту систему можно решить в явном виде /6-7/, и ее решения задаются формулами:

$$u(s) = -\frac{L(s)}{1 + L^2(s)}, \qquad v(s) = \frac{1}{1 + L^2(s)}, \qquad /2/$$

где

$$L(s) = \nu + \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-s}{1+s} + \sum_k R_k \frac{1 + c_k s}{c_k - s} + \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sigma s}{\sigma - s}\,\frac{d\theta(\sigma)}{1 + \sigma^2}, \qquad /3/$$

$\theta(\sigma)$ – неубывающая сингулярная функция /т.е. отличная от постоянной непрерывная функция с конечным изменением, производная которой почти везде равна нулю/, $\nu$ , $R_k$ , $c_k$ – вещественные константы, удовлетворяющие соотношениям :

$$R_k \ge 0, \quad |c_k| \le 1, \qquad /4/$$

$$\frac{1}{A} + \nu - \sum_k R_k c_k - \int_{-1}^{1} \frac{\sigma\, d\theta(\sigma)}{1 + \sigma^2} = 0, \qquad /5/$$

$$\nu + \frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{1 - s_0}{1 + s_0}\right| + \sum_k R_k \frac{1 + c_k s_0}{c_k - s_0} + \int_{-1}^{1} \frac{1 + \sigma s_0}{\sigma - s_0}\,\frac{d\theta(\sigma)}{1 + \sigma^2} = 0, \qquad /6/$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{s_0^2 - 1} + \sum_k R_k \frac{1 + c_k^2}{(c_k - s_0)^2} + \int_{-1}^{1} \frac{d\theta(\sigma)}{(\sigma - s_0)^2} = 0. \qquad /7/$$

Мы будем рассматривать только те решения, для которых $\theta(\sigma) = 0$ и имеется только конечное число точек $c_k$ . Тогда $u(s)$ и $v(s)$ непрерывны и представляются формулами /2/, в которых

$$L(s) = \nu + \frac{1}{\pi}\ln\frac{1-s}{1+s} + \sum_{k=1} R_k \frac{1 + c_k s}{c_k - s}. \qquad /8/$$

Приведенные формулы для точных решений будем использовать для того, чтобы сравнивать с ними решения, получаемые методом приближенного решения, к изложению которого приступаем. Разрешим второе из уравнений системы /1/ относительно $v(s)$

$$v(s) = \tfrac{1}{2} + \mu(s)\sqrt{\tfrac{1}{4} - u^2(s)}\,, \qquad /9/$$

где $\mu(s)$ –функция, принимающая только значения $\pm 1$. Предлагаемый метод численного решения основан на следующей гипотезе: при любой заданной $\mu(s)$ /т.е. заданных точках, в которых меняется знак в /9// существует единственное решение системы (1) $u(s)$, $v(s)$, удовлетворяющее /9/. Эта гипотеза строго не доказана, но в /7/ высказаны соображения, которые делают ее весьма правдоподобной.

Будем аппроксимировать $v(s)$ функциями вида:

$$v_n(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(s)\sqrt{1 - s^2}\,, \qquad /10/$$

где $T_k(s) = \cos(k\arccos s)$ -полиномы Чебышева, а $a_k$ –коэффициенты, которые нужно определить. Подставляя /10/ в первое уравнение системы /1/ и пользуясь соотношениями

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(\sigma)}{(\sigma - s)\sqrt{1-\sigma^2}}\,d\sigma = U_{k-1}(s)\,,$$

где

$$U_k(s) = \frac{\sin(k+1)\arccos s}{\sqrt{1 - s^2}}\,,$$

получаем:

$$u_n(s) = A - \frac{a}{s_0 - s} - a_0 s - \tfrac{1}{2}a_1 - (1 - s^2)[a_1 U_0(s) + a_2 U_1(s) + \ldots + a_n U_{n-1}(s)]. \qquad /11/$$

Пусть $\mu(s)$ –заданная функция, принимающая только значения $\pm 1$, и пусть $\omega_1$, $\omega_2$ ... $\omega_m$ – точки интервала /-1,1/, в которых $\mu(s)$ меняется. Как видно из /9/, так как $u(s)$ и $v(s)$ непрерывны, $u(\omega_i) = \pm \tfrac{1}{2}$. Мы наложим на $u_n$ следующие требования:

$$u_n(\omega_1) = \tfrac{1}{2}\,, \quad u_n(\omega_2) = -\tfrac{1}{2} \;\ldots\; u_n(\omega_m) = (-1)^{m-1}\cdot\tfrac{1}{2}. \qquad /12/$$

Из уравнений /12/ можно выразить коэффициенты $a_0$, $a_1$ ... $a_{m-1}$ через $a_m$ ... $a_n$.

Образуем выражение

$$\Delta(a_m, a_{m+1} \ldots a_n) = \int_{-1}^{1} \left| v_n(s) - \tfrac{1}{2} - \mu(s)\sqrt{\tfrac{1}{4} - u_n^2(s)}\,\right|^2 ds. \qquad /13/$$

В /10/ и /11/ для $v_n$ и $u_n$ мы подставили вместо $a_0$, $a_1 \ldots a_{m-1}$ их выражения через $a_m \ldots a_n$, и поэтому $\Delta$ – функция только аргументов $a_m \ldots a_n$.

Дальше ищем минимум $\Delta(a_m \ldots a_n)$ методом координатного спуска. Сначала полагаем $a_{m+1} = \ldots = a_n = 0$ и ищем минимум функции $\Delta(a_m, 0 \ldots 0)$. Находим некоторое значение $a_m^{(1)}$. Ищем минимум функции $\Delta(a_m^{(1)}, a_{m+1}, 0 \ldots 0)$ переменной $a_{m+1}$ и находим значение $a_{m+1}^{(1)}$ и т.д. Продолжая таким образом, находим точку $a_m^{(1)}$, $a_{m+1}^{(1)} \ldots a_n^{(1)}$. Затем снова спускаемся по направлению $a_m$, т.е. ищем минимум функции $\Delta(a_m, a_{mn}^{(1)} \ldots a_n^{(1)})$. Таким образом продолжаем до тех пор, пока два последовательные приближения $(a_m^{(k)} \ldots a_n^{(k)})$ и $(a_m^{(k+1)} \ldots a_n^{(k+1)})$ начнут отличаться меньше, чем на некоторое заданное число. Имея коэффициенты $(a_m \dots a_n)$, из /12/ определяем $a_0, a_1 \dots a_{m-1}$, а из /10/ и /11/ $u_n(s)$ и $v_n(s)$.

Этим методом находились на электронной счетной машине несколько решений системы уравнений /1/ /при разных функциях $\mu(s)$. Результаты счета /сплошная линия/ и соответствующие точные решения /пунктир/ показаны на рис. 2 и 3. Функции $\mu(s)$ и константы $s_0$, $A$, $a$ соответственно следующие:

$$\mu(s) = -\operatorname{sgn}(s+0{,}786)(s-0{,}97); \quad s_0 = 2, \quad A = -2{,}86, \quad a = -4{,}712;$$

$$\mu(s) = -\operatorname{sgn}(s+0{,}647)(s+0{,}436)(s-0{,}522)(s-0{,}697); \quad s_0 = 10, \quad A = 2{,}735, \quad a = -27{,}041.$$

## § 2. Уравнения для $\pi-\pi$ рассеяния

Будем рассматривать уравнения для $\pi-\pi$ рассеяния, предлагаемые в /4/:

$$A_j(t) = m_j + \frac{t-c_j}{\pi}\int_1^\infty \left[\frac{Im\, A_j(\tau)}{(\tau-c_j)(\tau-t-i0)} - \sum_{k=0}^{2} b_{jk}\frac{Im\, A_k(\tau)}{(\tau+c_j)(\tau+t)}\right]d\tau, \qquad /14/$$

$$Im\, A_j(t) = K(t)\,|A_j(t)|^2, \qquad t \geq 1,$$

где $(j = 0, 1, 2)$,

$$m_0 = 5\lambda + 3d_1, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 2\lambda + 3d_1, \quad d_1 = A_1(0),$$

$$c_0 = 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad K(t) = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}},$$

$$B = (b_{jk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -3 & \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$\lambda$ – заданное число. Преобразуем уравнения /14/. Пусть $A_j(t) = u_j(t) + iv_j(t)$ – решения системы /14/. Введем функции

$$h_j(z) = m + \frac{z-c_j}{\pi}\int_1^\infty \left[\frac{v_j(\tau)}{(\tau-c_j)(\tau-z)} - \sum_{k=0}^{2} b_{jk}\frac{v_k(\tau)}{(\tau+c_j)(\tau+z)}\right]d\tau;$$

$h_j(z)$ обладают следующими свойствами:

1. $h_j(z)$ аналитичны на плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$,
2. $h_j^+(t) = A_j(t)$ $\quad 1 < t < \infty$ x/,
3. $h_j(\bar{z}) = \overline{h_j(z)}$,
4. для $t \geq 1$ $\quad Im\, h_j^+(t) = K(t)\,|h_j^+(t)|^2$,
5. $Im\, h_j^+(-t) = -\sum_{k=0}^{2} b_{jk}\, Im\, h_k^+(t)$ $\quad t > 1$,
6. $\frac{h_j(z)}{z} \to 0$ $\quad z \to \infty$, $h_j(c_j) = m_j$.

Докажем последнее свойство.

---

x/ $h_j^+(z)$ означает предельное значение $h(z)$, когда $z$ стремится к $t$, оставаясь в верхней полуплоскости.

$$\left|\frac{h_j(z)}{z}\right| \le \left|\frac{m_j}{z}\right| + \frac{1}{\pi}\left|\frac{z-c_j}{z}\right| \left( \int_1^\infty \frac{|v_j(\tau)|}{|\tau-c_j||\tau-z|}d\tau + \sum_{k=0}^{2} |b_{jk}| \int_1^\infty \frac{|v_k(\tau)|}{|\tau+c_j||\tau+z|}d\tau \right) \qquad /15/$$

Оценим интегралы в скобках. Например,

$$\int_1^\infty \frac{|v_j(\tau)|}{|\tau-c_j||\tau-z|}d\tau < C\int_1^\infty \frac{d\tau}{|\tau-c_j||\tau-z|} .$$

Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\int_1^\infty \frac{d\tau}{|\tau-c_j||\tau-z|} = \int_1^\infty \frac{d\tau}{(\tau-c_j)\sqrt{(\tau-x)^2+y^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ln \frac{x^2+y^2+\sqrt{(x^2+y^2)[(1+c_j-x)^2+y^2]}+c_j-x}{\sqrt{x^2+y^2}+c_j-x} .$$

Если положить

$$x = \rho\cos\phi ,$$

$$y = \rho\sin\phi ,$$

то последнее выражение принимает вид:

$$\frac{1}{\rho}\ln\frac{\rho^2+\rho\sqrt{\rho^2-2(1+c_j)\rho\cos\phi+(1-c_j)^2}-\rho\cos\phi+c_j}{\rho-\rho\cos\phi+c_j} =$$

$$= \frac{1}{\rho}(\ln\rho + 0(1)) \underset{\rho\to\infty}{\to} 0 .$$

Таким же образом можно оценить и остальные интегралы в /15/.

Можно доказать и обратное:

если $h_j(z)$ – функции, обладающие свойствами 1,3,4,5,6, то функции

$$A_j(t) = h_j^+(t) , \quad t \ge 1$$

удовлетворяют уравнениям /14/. Чтобы работать с конечным интервалом, сделаем подстановку

$$w = -\frac{1}{z} .$$

Введем функции

$$F_j(w) = h_j\left(-\frac{1}{w}\right) ;$$

$F_j(w)$ обладают следующими свойствами:

1. $F_j(w)$ аналитичны на плоскости с разрезом $(-1, 1)$,
2. для $-1 < s < 0$

$$F_j^+(s) = h_j^+\left(-\frac{1}{s}\right) = A_j\left(-\frac{1}{s}\right) ,$$

3. $F_j(\bar{w}) = \overline{F_j(w)}$ ,
4. для $-1 < s < 0$

$$\operatorname{Im} F_j^+(s) = \kappa(s)\,|F_j^+(s)|^2 , \qquad \kappa(s) = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}} .$$

5. Для $0 < s < 1$

$$Im\ \overset{+}{F}_j(-s) = -\sum_{k=0}^{2} b_{jk}\ Im\ \overset{+}{F}_k(s).$$

6. $wF_j(w) \to 0$ при $w \to 0$, $F_j(-\frac{1}{c_j}) = m$ $F_j(\infty) = h_j(0)$ существует и конечно.

Применим теорему Коши к функциям $\dfrac{F_j(\omega)}{\omega - w}$ и контуру $\Gamma$.

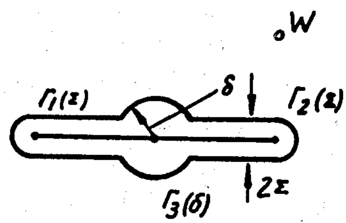



Рис. 1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F_j(w)}{\omega - w}\,d\omega = Res\,(\infty) + Res\,(w),$$

$$Res\,(\infty) = -F_j(\infty),$$

$$Res\,(w) = F_j(w), \qquad /16/$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{F_j(\omega)}{\omega - w}\,d\omega \underset{\epsilon\to 0}{\to} \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-\delta}\frac{Im\ \overset{+}{F}_j(\sigma)}{\sigma - w}\,d\sigma,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{F_j(\omega)}{\omega - w}\,d\omega \to \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{1}\frac{Im\ \overset{+}{F}_j(\sigma)}{\sigma - w}\,d\sigma,$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_3}\frac{F_j(\omega)}{\omega - w}\,d\omega\right| \le \frac{\delta}{|w| - \delta}\max_{\omega\in\Gamma_3(\delta)}|F_j(\omega)|.$$

Покажем, что $\delta \max\limits_{\omega\in\Gamma_3}|F_j(\omega)| \to 0$ при $\delta \to 0$. Зададим произвольное $\epsilon > 0$. Так как $wF_j(w) \underset{w\to 0}{\to} 0$, то можно выбрать $|w| < \eta$ так, чтобы при $|w| < \eta$ исполнялось неравенство $|wF_j(w)| < \epsilon$. Пусть $\delta < \eta$. Тогда

$$|wF_j(w)| < \epsilon \quad \text{при} \quad w \in \Gamma_3,$$

следовательно, и

$$\delta \max_{w \in \Gamma_3} | F_j (w) | < \epsilon \; .$$

Подставим это выражение в /16/. При $\epsilon \to 0$ получим:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{-\delta} \frac{Im\, F_j^+(\sigma)}{\sigma - w}\, d\sigma + \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{1} \frac{Im\, F_j^+(\sigma)}{\sigma - w}\, d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_3} \frac{F_j(\omega)}{\omega - w}\, d\omega = -F_j(\infty) + F_j(w).$$

Когда $\delta \to 0$, первый и третий интегралы стремятся к определенным пределам и, значит, второй интеграл тоже имеет предел. Таким образом, получаем:

$$F_j(w) = F_j(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{Im\, F_j^+(\sigma)}{\sigma - w}\, d\sigma$$

/интеграл в точке $\sigma = 0$ может быть несобственным/. Устремляя $w$ $k$ $s \neq 0$ сверху и обозначая $F_j^+(s) = \xi_j(s) + i\eta_j(s)$, $F_j(\infty) = A_j$, получаем систему уравнений:

$$\xi_j(s) = A_j + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\eta_j(\sigma)}{\sigma - s}\, d\sigma , \qquad /17_1/$$

$$\eta_j(s) = \kappa(s) [\xi_j^2(s) + \eta_j^2(s)], \qquad -1 < s < 0, \qquad /17_2/$$

$$\eta_j(s) = -\sum_{k=0}^{2} b_{jk}\, \eta_k(-s) \qquad 0 < s < 1,$$

$$(j = 0, 1, 2). \qquad /17_3/$$

Итак, вместо системы /14/ будем рассматривать эквивалентную ей систему /17/. Кроме того, имеем следующие соотношения. Так как $A_j = F_j(\infty)$, то, имея в виду связь между $F_j(w)$ и $h_j(z)$, получаем:

$$A_0 = 5\lambda + 3d,$$
$$A_1 = d, \qquad /18/$$
$$A_2 = 2\lambda + 3d.$$

Разрешим второе из уравнений /17/ относительно $\eta_j(s)$. Получаем:

$$\eta_j(s) = \frac{1}{2\kappa(s)} + \mu_j(s) \sqrt{\frac{1}{4\kappa^2(s)} - \xi_j^2(s)} , \qquad /19/$$

где $\mu_j(s)$ — функции, принимающие только значения $\pm 1$. Примем гипотезу, аналогичную той, которую мы приняли для модельного уравнения, а именно: что при любых заданных $\mu_j(s)$ существует единственное решение системы /17/, где уравнения /$17_2$/ заменены уравнениями /19/. Для простоты рассмотрим решения, для которых знак в /19/ меняется два раза — в точках $\omega_1^j$ и $\omega_2^j$. Эти точки заданы произвольно в интервале /−1,0/. Так как $\xi_j(s)$ и $\eta_j(s)$ непрерывны, то в точках, где меняется знак, величина под корнем должна обращаться в нуль, т.е.

$$\xi_j(\omega_1^j) = \pm\frac{1}{2\kappa(\omega_1^j)} .$$

Потребуем, чтобы

$$\xi_j(\omega_1^j) = \frac{1}{2\kappa(\omega_1^j)} ,$$

$$\xi_j(\omega_2^j) = -\frac{1}{2\kappa(\omega_2^j)} , \quad (j = 0, 1, 2). \qquad /20/$$

Наложим еще одно ограничение. Будем искать такое решение, для которого

$$\xi_1(-1) = 0, \qquad /21/$$

$$\eta_1(-1) = 0.$$

Ищем $\eta_j(s)$ в виде:

$$\eta_j^{(m)}(s) = [a_0^j T_0(s) + a_1^j T_1(s) + \ldots + a_n^j T_n(s)]\sqrt{1-s^2}, (j = 0,1,2), \qquad /22/$$

где $T_k(s)$ – полиномы Чебышева, а $a_k^j$ –коэффициенты, которые нужно определить. Введем вектор

$$\vec{\eta}(s) = \begin{pmatrix} \eta_0(s) \\ \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \end{pmatrix}, \qquad \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_k^0 \\ a_k^1 \\ a_k^2 \end{pmatrix} .$$

Тогда соотношения /17.3/ записываются в виде :

$$\vec{\eta}(s) = -\mathrm{B}\,\vec{\eta}(-s), \qquad /23/$$

а соотношения /22/ в виде:

$$\vec{\eta}^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(s)\sqrt{1-s^2} .$$

Подставляя $\vec{\eta}^{(n)}(s)$ в /23/, получаем :

$$\sum_{k=0}^{k} \vec{a}_k T_k(s)\sqrt{1-s^2} = -\sum_{k=0}^{n} \mathrm{B}\, a_n T_k(-s)\sqrt{1-s^2} .$$

Принимая во внимание, что

$$T_k(s) = (-1)^k T_k(-s)$$

и сравнивая коэффициенты перед $T_k(s)$, получаем соотношение

$$\mathrm{B}\,\vec{a}_k = (-1)^{kn}\vec{a}_k ,$$

т.е. при $k$ чётном $a_k$ является собственным вектором матрицы B с собственным значением +1. Как легко видеть, собственному значению –1 соответствует собственный вектор

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

а собственному значению +1 соответствуют два линейно независимых собственных вектора

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, получаем :

$$\begin{aligned} \vec{a}_{2k} &= c_k^{(0)} \vec{p} \\ \vec{a}_{2k+1} &= c_k^{(1)} \vec{q}_1 + c_k^{(2)} \vec{q}_2 , \end{aligned} \qquad /24/$$

где $c_k^{(0)}$ , $c_k^{(1)}$ , $c_k^{(2)}$ – числа. Из уравнений (17.1) получаем :

$$\vec{\zeta}^{(n)}(s) = A_j - \vec{a}_0 s - \tfrac{1}{2}\vec{a}_1 + [\vec{a}_1 U_0(s) + \vec{a}_2 U_1(s) + \ldots + \vec{a}_n U_{n-1}(s)](1-s^2) , \qquad /25/$$

где

$$\vec{\zeta}(s) = \begin{pmatrix} \zeta_0(s) \\ \zeta_1(s) \\ \zeta_2(s) \end{pmatrix} .$$

Из условия /21/, принимая во внимание /18/, получаем :

$$d = -a_0^1 + \tfrac{1}{2} a_1^1 .$$

Подставляя в /20/ $\vec{\zeta}(s)$ из /25/ и $\vec{a}_k$ из /24/, получаем 6 уравнений, из которых можем выразить $c_0^{(0)}, c_0^{(1)}, c_0^{(2)}, c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, c_1^{(2)}$ через остальные коэффициенты. Таким образом, остаются неопределенными коэффициенты $c_2^{(0)}$ , $c_2^{(1)}$ , $c_2^{(2)}$ ... Их будем определять из условия обращения в минимум функции

$$\Delta(c_2^{(0)}, c_2^{(1)}, c_2^{(2)}, \ldots) = \sum_{j=0} \int_{-1}^{0} \Big| \eta_j^{(n)}(s) - \frac{1}{2\kappa(s)} - \mu_j(s) \sqrt{\frac{1}{4\kappa^2(s)} - \zeta_j^2(s)} \Big|^2 ds .$$

Этот минимум определяем методом координатного спуска, начиная с точки $c_2^{(0)} = c_2^{(1)} = \ldots = 0$. Не будем приводить подробно формул, по которым производился счёт. Результаты счёта при $\lambda = 0{,}1$ , $\omega_1^0 = \omega_1^1 = \omega_1^2 = -0{,}7$ и $\omega_2^0 = \omega_2^1 = \omega_2^2 = -0{,}3$ показаны на рис. 4,5,6. Пунктиром отмечены кривые: $y = \dfrac{1}{\kappa(s)}$ , $y = \dfrac{1}{2\kappa(s)}$ , $y = -\dfrac{1}{2\kappa(s)}$ .

## Литература

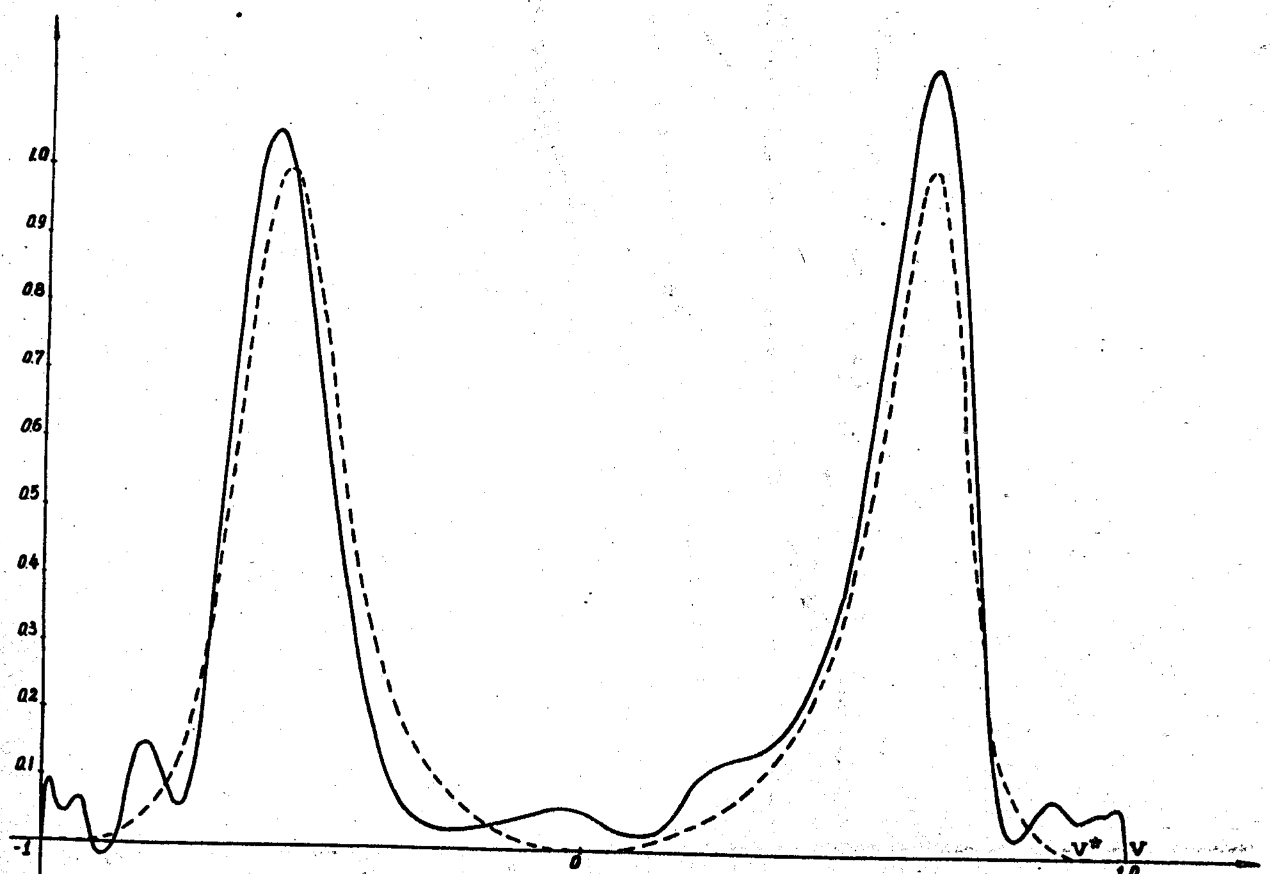

1. G.Chew, S.Mandelstam. Phys. Rev. 457 , 119, (1960).
2. G.Chew, S.Mandelstam, P.Noyes. Phys. Rev. 119, 478 (1960).
3. A.V.Efremov, V.A.Meshcheryakov, D.V.Shirkov. Nucl. Phys. 22, 202 (1961).
4. А.В. Ефремов, Чжу Хун-юань, Д.В. Ширков. Препринт ОИЯИ Д-757,Дубна, 1961.
5. G.Salzman, F.Salzman. Phys. Rev. 108, 1619 (1957).
6. Р. Денчев. Препринт ОИЯИ Р-890,Дубна, 1962.
7. Р. Денчев. Препринт ОИЯИ Р-901,Дубна, 1962.



Рукопись поступила в издательский отдел 26 апреля 1963 г.

1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-1
-0.786
0
V*
V
0.9697; +1,0


Рис. 2.



1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-1
0
V*
V
1.0


Рис. 3.

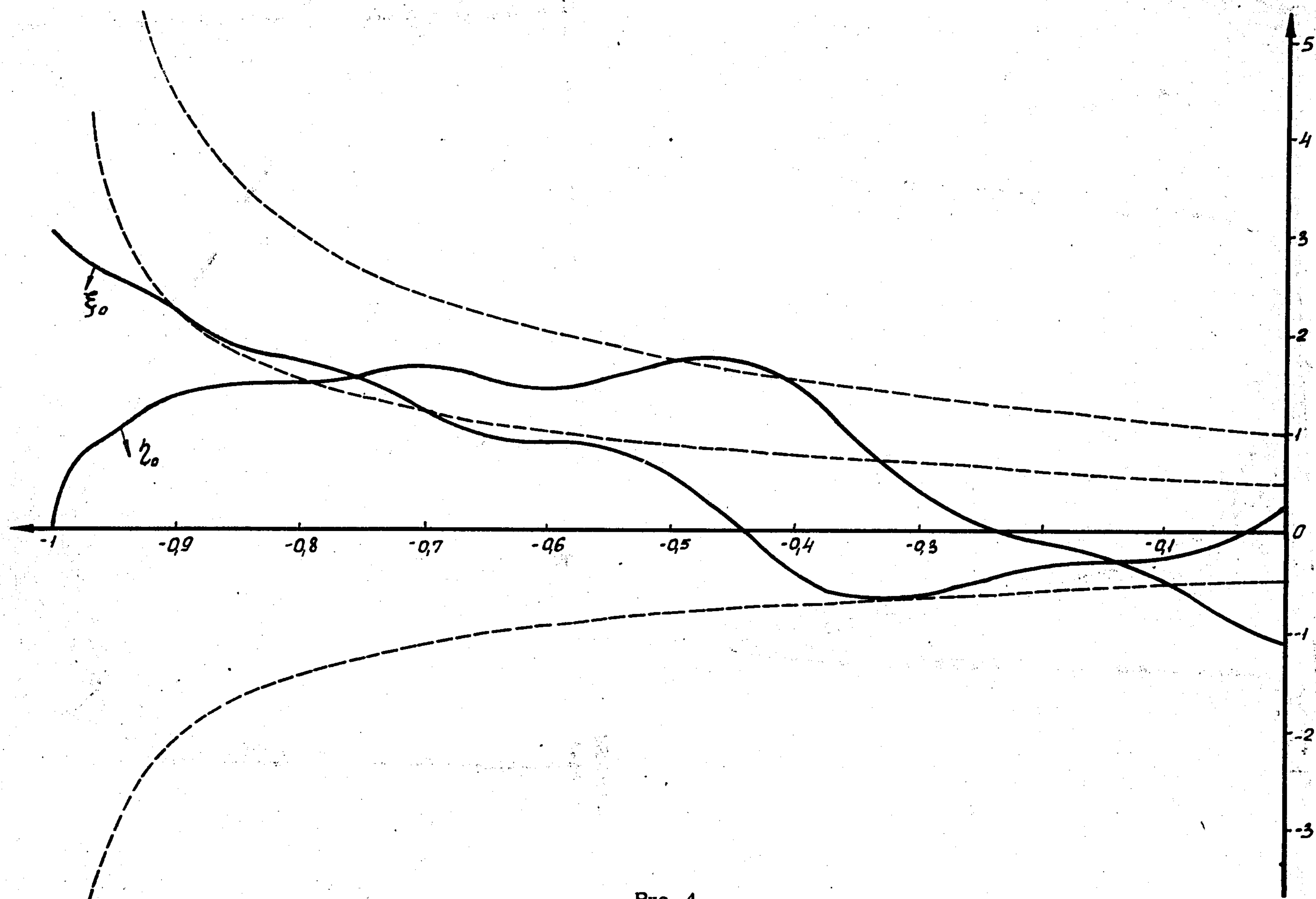



Рис. 4.

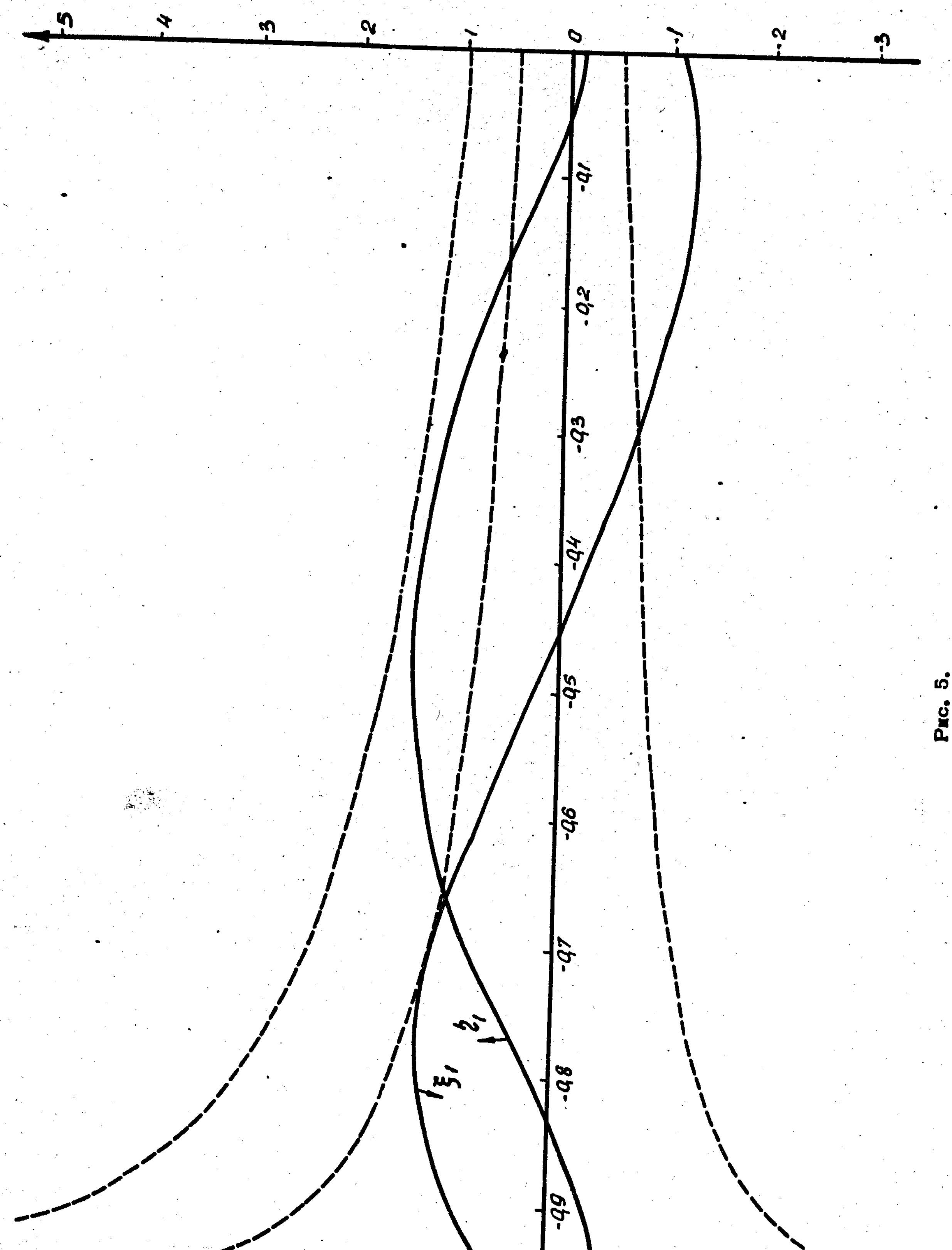



Рис. 5.

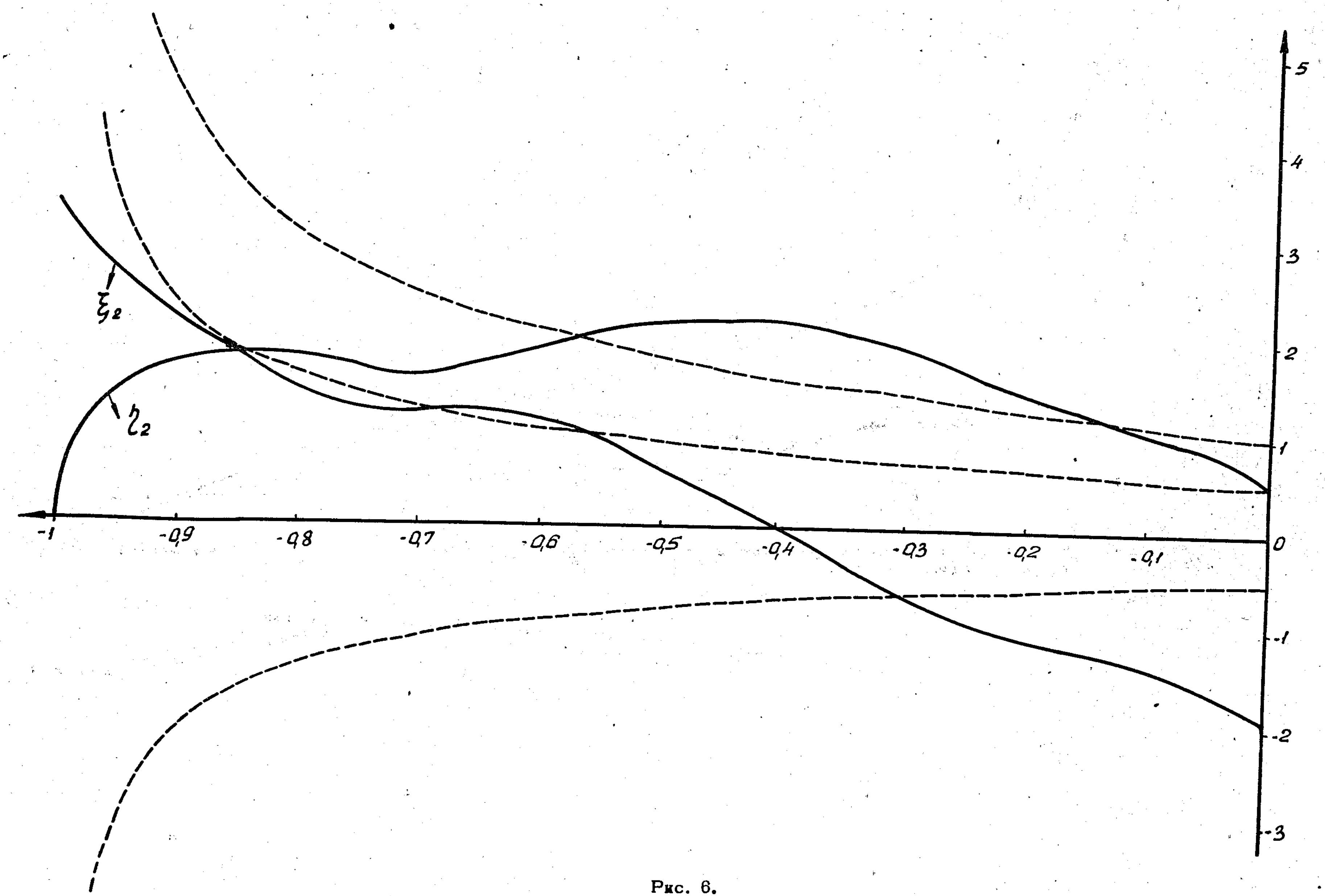



Рис. 6.