ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.М. Мурадян

Р-1281

О СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НА СФЕРЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Дубна 1963

Р.М. Мурадян

Р-1281

О СЛУЧАЙНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ НА СФЕРЕ И В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Дубна 1963

Знаменитая задача Пирсона о случайных перемещениях на плоскости (проблема блужданий) была решена Кливером. Рэлей дал решение задачи о перемещениях в трех измерениях. Соответствующая задача в многомерном пространстве рассмотрена в монографии Ватсона[1], где можно также найти изложение основных результатов и ссылки на работы предыдущих исследователей. С приложением теории к решению некоторых практических, научных и технических задач можно познакомиться по монографиям[2,3]. Несмотря на простоту формулировки, решение задачи в эвклидовом пространстве потребовало привлечения аппарата теории бесселевых функций. В рассматриваемом нами случае /см пункт 1/ пространства с положительной кривизной бесселевы функции уступают место сферическим функциям, именно: полиномам Лежандра (для обычной сферы), полиномам Чебышева (для трехмерной гиперсферы) и полиномам Гегенбауэра (для многомерной гиперсферы). В пункте 2 показано, что при решении задачи в пространстве Лобачевского естественным образом возникает необходимость преобразования Зоммерфельда - Ватсона - Редже[4], причём в том виде, который известен под названием преобразования Мелера - Фока[5].

1. Для случая обычной сферы задача формулируется так:

"Некто начинает двигаться из точки O и приходит по геодезической фиксированное расстояние a_1; затем поворачивает в каком-то направлении на некоторый угол и проходит по второй геодезической расстояние a_2. Этот процесс повторяется n раз. Требуется найти, что после n -го перемещения он окажется на расстоянии между r и $r+\delta r$ от точки выхода O".

Считается, что $0 \le r < \pi$ и $0 \le a_i < \pi$, и, кроме того, для простоты радиус сферы положим равным единице. Заметим, также, что все расстояния измеряются по геодезическим линиям, т.е. по дугам больших кругов, которые для сферы играют роль прямых линий.

Пусть $\mathcal{P}_n\ (r; a_1, a_2, \ldots, a_n)$ обозначает вероятность того, что после n -го перемещения расстояние от начальной точки будет меньше чем r, и, таким образом, вероятность того, что расстояние будет находится между r и $r+\delta r$, будет равна:

$$W_n\ (r; a_1, a_2, \ldots, a_n)\,\delta r = \frac{d\mathcal{P}_n\ (r; a_1, a_2, \ldots, a_n)}{dr}\ \delta r,$$

где введено обозначение W_n для плотности вероятности.

Обозначим через r_i замыкающую для $a_1, a_2, \ldots a_i$ и через θ_i - угол между r_i и a_{i+1}. Все значения θ_i от 0 до 2π будут равновероятными. Тогда по известной формуле сферической тригонометрии имеем:

$$\cos r_i = \cos r_{i-1}\ \cos a_i + \sin r_{i-1}\ \sin a_i\ \cos\theta_{i-1}\ . \tag{1}$$

Очевидно, что

$$\mathcal{P}_n\ (r; a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}\ d\theta_{n-2} \ldots d\theta_2\ d\theta_1\ , \tag{2}$$

где пределы интеграла по $d\theta_{n-1}$ должны быть таковы, чтобы r_n было меньше r для каждой совокупности значений θ_1, θ_2 ... θ_{n-2}. Если в этот кратный интеграл ввести разрывный множитель

$$\int_0^r \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + \tfrac{1}{2}) P_\ell (\cos r_n) P_\ell (\cos r') \sin r' dr' = \begin{cases} 1 & r_n < r \\ 0 & r_n > r , \end{cases} \tag{3}$$

то для значений θ_{n-1} может быть взят интервал $0,2\pi$. Изменив порядок интегрирования по $d\theta_{n-1}$ и суммирования по ℓ и повторяя этот прием $n-1$ раз, найдем:

$$\mathcal{P}_n (r; a_1, a_2 ..., a_n) = \int_0^r \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + \tfrac{1}{2}) P_\ell (\cos r') \sin r' dr' \prod_{i=1}^{n} P_\ell (\cos a_i) , \tag{4}$$

или для плотности вероятности:

$$W_n (r; a_1, a_2, ..., a_n) = \sin r \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + \tfrac{1}{2}) P_\ell (\cos r) \prod_{i=1}^{n} P_\ell (\cos a_i) . \tag{5}$$

Из (5) видно, что в случае одного перемещения плотность вероятности пропорциональна δ -функции:

$$W_1 (r; a_1) = \sin r\, \delta (\cos r - \cos a_1) , \tag{5'}$$

что очевидно из элементарных соображений.

В случае $n = 2$ плотность вероятности пропорциональна сумме произведений трех полиномов Лежандра, которую, как известно /6/, можно вычислить в конечном виде:

$$W_2 (r; a_1, a_2) = \frac{\sin r}{\pi} \frac{\theta (1 + 2\cos r \cos a_1 \cos a_2 - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2 - \cos^2 r)}{\sqrt{1 + 2\cos r \cos a_1 \cos a_2 - \cos^2 r - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2}} . \tag{5''}$$

Стоящая здесь θ - функция определена, как обычно: $\theta(x)$ равно 0 или 1, если $x < 0$ или $x > 0$. Интересно отметить, что результат, приведенный в (5''), также следует из элементарного рассмотрения, без использования вычисленной в /6/ суммы произведений трех полиномов Лежандра, что можно рассматривать как независимый способ вычисления этой суммы.

В случае трех перемещений плотность вероятности пропорциональна сумме произведений четырех полиномов Лежандра:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell + \tfrac{1}{2}) P_\ell (\cos r) P_\ell (\cos a_1) P_\ell (\cos a_2) P_\ell (\cos a_3) .$$

Значение этой суммы можно выразить через полный эллиптический интеграл первого рода. В плоской задаче этой сумме соответствовал бы интеграл Никольсона от произведений четырех бесселевых функций нулевого порядка (Ватсон /1/, стр. 454), точно так же, как (5'') можно сопоставить известный интеграл Сонина от произведений трех бесселевых нулевого порядка (Ватсон /1/, стр. 451). При $n > 4$ суммы можно вычислить лишь приближенно, что при больших n приводит к нормальному гауссовскому распределению для плотности вероятности.

Рассматривая задачу в случае p - мерной гиперсферы, нужно воспользоваться обобщенными сферическими координатами и аналогично (3) ввести разрывный множитель, сконструированный из полиномов Гегенбауэра $C_\ell^\nu (x)$, верхний индекс которого связан с размерностью пространства соотношением $\nu = \tfrac{1}{2}(p-1)$. Не рассматривая здесь подробно многомерный случай, укажем только, что в случае двух случайных перемещений искомая плотность вероятности выражается через сумму произведений трех полиномов Гегенбауэра, которую оказывается возможным вычислить в конечном виде:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+\nu)\left\{ \frac{\ell!}{\Gamma(\ell+2\nu)} \right\}^2 C_\ell^\nu (\cos r)\, C_\ell^\nu (\cos a_1)\, C_\ell^\nu (\cos a_2) =$$

$$= \frac{\pi}{\{\Gamma(\nu)\}^4} (4\sin r\ \sin a_1\ \sin a_2)^{1-2\nu} \frac{\theta(1+2\cos r\ \cos a_1 \cos a_2 - \cos^2 r - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2)}{(1+2\cos r\ \cos a_1 \cos a_2 - \cos^2 r - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2)^{1-\nu}} . \tag{6}$$

В случае обычной сферы $p=2$, следовательно, $\nu = 1/2$, и полиномы Гегенбауэра переходят в полиномы Лежандра согласно формуле (7) $C_\ell^{1/2}(x) = P_\ell(x)$, а из (6) получим в качестве частного случая значение суммы произведений трех полиномов Лежандра, уже использованное в (5''):

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1/2) P_\ell(\cos r)\, P_\ell(\cos a_1)\, P_\ell(\cos a_2) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\theta(1+2\cos r\ \cos a_1 \cos a_2 - \cos^2 r - \cos^2 r_1 - \cos^2 a_2)}{\sqrt{1+2\cos r\ \cos a_1\ \cos a_2 - \cos^2 r - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2}} . \tag{7}$$

В случае трехмерной гиперсферы $p=3$ и, следовательно, $\nu = 1$, и полиномы Гегенбауэра переходят в полиномы Чебышева согласно формуле /7/ $C_\ell^1(x) = U_\ell(x)$, а из (6) получим в качестве частного случая следующее значение для суммы произведений трех полиномов Чебышева:

$$\sum_{\ell=0} U_\ell(\cos r)\ U_\ell(\cos a_1)\ U_\ell(\cos a_2) =$$

$$= \pi \frac{\theta(1+2\cos r\ \cos a_1 \cos a_2 - \cos^2 r - \cos^2 a_1 - \cos^2 a_2)}{4\sin a_1\ \sin a_2\ \sin r} . \tag{8}$$

2. Перейдем теперь к решению задачи о случайных перемещениях в пространстве с отрицательной кривизной, т.е. в пространстве Лобачевского /8/. Сначала рассмотрим задачу на плоскости Лобачевского, т.е. на сфере с мнимым радиусом. Формулировка задачи, приведенная в предыдущем пункте, а также соотношение (2) и следующее из нее определение плотности вероятности не меняют вида, в то время как вместо (1), согласно известной формуле гиперболической тригонометрии, будем иметь:

$$\operatorname{ch} r_i = \operatorname{ch} r_{i-1}\ \operatorname{ch} a_i - \operatorname{sh} r_{i-1}\ \operatorname{sh} a_i\ \ \cos\theta_{i-1} , \tag{9}$$

а разрывный множитель (3) необходимо модифицировать при помощи преобразования Зоммерфельда-Ватсона-Редже. Совершим над δ - функцией, стоящей в (3), преобразование З.-В.-Р. при помощи функции $\operatorname{ctg} \ell\pi$, вычеты которого в точках $\ell = 0,1,2,3\ldots$ равны $1/\pi$:

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2i} \int_C (\ell + 1/2) \operatorname{ctg} \ell\pi\ P_\ell(x)\ P_\ell(y)\ d\ell , \tag{10}$$

где контур C начинается на бесконечности, окружает точки 0,1,2,3,.. в положительном направлении, проходит через точку $\ell = -1/2$ и снова уходит на бесконечность. Спрямляя контур C в прямую, параллельную мнимой оси, и учитывая асимптотическое поведение функций Лежандра при больших ℓ и $|x|, |y| > 1$, получим следующее разложение δ -функции в интеграл Мелера-Фока [5]:

$$\delta(x-y) = \int_0^\infty \lambda \, th \lambda \pi \, P_{-1/2+i\lambda}(x) P_{-1/2+i\lambda}(y) \, d\lambda \tag{11}$$

и вместо разрывного множителя (3) можем написать:

$$\int_0^r shr' dr' \int_0^\infty \lambda \, th \lambda \pi \, P_{-1/2+i\lambda}(chr_n) P_{-1/2+i\lambda}(chr') \, d\lambda = \begin{cases} 1 & r_n < r \\ 0 & r_n > r \end{cases} . \tag{12}$$

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, для плотности вероятности после n -перемещений на плоскости Лобачевского получим выражение:

$$W_n(r; a_1, a_2, \ldots, a_n) = shr \int_0^\infty \lambda \, th \lambda \pi \, P_{-1/2+i\lambda}(chr) \prod_{i=1}^{n} P_{-1/2+i\lambda}(cha_i) \, d\lambda . \tag{13}$$

Заметим, что в случае одного перемещения плотность вероятности пропорциональна δ -функции, как и следовало ожидать. В случае $n = 2$ интеграл (13) недавно был вычислен в работе Редже и сотрудников [7]:

$$W_2(r; a_1 \, a_2) = shr \int_0^\infty \lambda \, th \lambda \pi \, P_{-1/2+i\lambda}(chr) P_{-1/2+i\lambda}(cha_1) P_{-1/2+i\lambda}(cha_2) \, d\lambda =$$

$$= \frac{shr}{\pi} \frac{\theta(1 + 2chr \, cha_1 cha_2 - ch^2 r - ch^2 a_1 gch^2 a_2)}{\sqrt{1 + 2chr \, cha_1 \, cha_2 - ch^2 r - ch^2 a_1 - ch^2 a_2}} .$$

Таким образом, можно заметить, что переход от решения задачи на сфере к решению задачи на плоскости Лобачевского можно формально получить одновременной заменой полиномов Лежандра P_ℓ на конические функции Мелера-Фока $P_{-1/2+i\lambda}$, тригонометрических функций —на гиперболические, причем суммирование по целочисленным ℓ заменяется интегрированием по непрерывному параметру λ.

Аналогичное соответствие имеется и между решением задачи в многомерном пространстве Лобачевского и решением на соответствующей гиперсфере.

В заключение выражаю благодарность Н.А. Черникову за полезные обсуждения.

Литература

1. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций, ч.1, ИЛ, М., 1949.
2. С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, 1947.
3. Б.Р. Левин. Теория случайных процессов и ее применение к радиотехнике. "Сов. радио", М., 1960.
4. А. Зоммерфельд. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. ИЛ, М., 1950.
5. В.А. Фок. ДАН СССР 39, 279 (1943).
6. В.М. Арутюнян, Р.М. Мурадян. ЖЭТФ 36, 1542 (1959).
7. *H.Batheman. Higher Transcendental Functions, v. II, N-Y McGrow-Hill Book Company (1953).*
8. Н.В. Ефимов. Высшая геометрия. ГИТТЛ, М., 1953.
9. *V. de Alfaro, T. Regge, C.Rosetti. Nuovo Cim., 26, 1029 (1962).*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 апреля 1963 г.