ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.А. Черников

Р-1264

# МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Acta Physica Polonica, 1965, v 27, f. 3, p 465-489.

Дубна 1963 год

Н.А. Черников

Р-1264



# МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ



Дубна 1963 год

## § 1. Введение

В данной работе из релятивистского кинетического уравнения выводятся релятивистские гидродинамические уравнения диссипативных процессов.

В нерелятивистском случае решение такой задачи хорошо известно /1-3/. Из всех методов решения нерелятивистской задачи самым удобным для релятивистского случая оказался метод моментов /2/. Метод моментов Града основан на разложении функции распределения газа в ряд по полиномам Эрмита-Чебышева от компонент скорости. Уравнения для коэффициентов разложения получаются из уравнений моментов. Последние выводятся из кинетического уравнения как частный случай уравнений переноса Максвелла-Энскога. Обрывая ряд на определенном члене и учитывая, соответственно, несколько первых уравнений моментов, можно получить нерелятивистские гидродинамические уравнения диссипативных процессов. Эта идея наиболее отчетливо проведена в книге Зоммерфельда /3/.

Кинетическое уравнение Больцмана с учетом теории относительности и гравитации Эйнштейна получено и исследовано в работах /4-11/. Систематическое рассмотрение этой проблемы начато в работах /12-13/. Необходимость такого рассмотрения диктуется не только астрофизическими или другими прикладными проблемами, важность которых бесспорна. Н.Н. Боголюбов /14-15/ показал, как можно в нерелятивистском случае прийти к кинетическому уравнению, исходя из механики системы частиц, и тем самым установил определенное отношение кинетического уравнения к механике. Ввиду этого формулировка и исследование релятивистского кинетического уравнения представляет интерес и в связи с развитием релятивистской механики.

Для того, чтобы перенести метод моментов Града на релятивистский случай, потребовалось релятивистское обобщение полиномов Эрмита-Чебышева. Найденная система функций позволяет быстро прийти к гидродинамическим уравнениям, полученным ранее чисто феноменологическим путем /16-17/. Коэффициенты теплопроводности $\kappa$ и вязкости $\eta$, рассматриваемые в /16-17/ как феноменологические параметры, удается выразить в виде определенных интегралов от дифференциального сечения взаимодействия частиц газа. Эти коэффициенты зависят лишь от среднего квадрата синуса угла рассеяния в системе центра масс. Второй коэффициент вязкости $\zeta$ так же, как и в нерелятивистском случае, оказывается равным нулю. Весь расчет приспособлен как к нерелятивистскому предельному переходу $c \to \infty$, так и к "ультрарелятивистскому" предельному переходу $m \to 0$, где $m$ -масса покоя частицы газа. В случае $m = 0$ все выражения значительно упрощаются. С последним обстоятельством мы уже сталкивались в работе /13/. Замечательно, что в нерелятивистском пределе отношение $\kappa : \eta$ не зависит от вида дифференциального сечения, а, следовательно, оно такое же, как и для упругих шаров. При постоянном сечении в ультрарелятивистском случае $m = 0$ $\kappa = const$ и отношение $\kappa : \eta$ обратно пропорционально температуре.

## § 2. Уравнение моментов

Согласно[12] релятивистское кинетическое уравнение для однокомпонентного газа имеет следующий вид:

$$\hat{f}(x,p)\,A(x,p) = I(x,p), \qquad /2.1/$$

где

$$\hat{f}(x,p) = p^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{k}_{\alpha\beta}(x)\, p^{\alpha} p^{\beta}\frac{\partial}{\partial p^{k}}, \qquad /2.2/$$

$I(x,p)$ – интеграл столкновений.

Предполагается, что столкновения частиц газа упругие. Отдельный акт упругого столкновения двух частиц в точке $x$ определяется импульсами $p$ и $q$ частиц до столкновения и вектором $e$, удовлетворяющим условиям

$$(e, p+q) = 0, \qquad (e,e) = -1. \qquad /2.3/$$

Обратное столкновение определяется тройкой $p'$, $q'$, $e'$:

$$p' = \frac{p+q}{2} + \sqrt{\frac{(p,q)-m^2c^2}{2}}\; e, \quad q' = \frac{p+q}{2} - \sqrt{\frac{(p,q)-m^2c^2}{2}}\; e, \quad e' = \frac{p-q}{\sqrt{2}\sqrt{(p,q)-m^2c^2}}. \qquad /2.4/$$

Преобразование /2.5/ инволютивно, т.е. нештрихованная тройка выражается через штрихованную так же, как штрихованная – через нештрихованную. Концы векторов /2.3/ заполняют сферу $S(x,p,q)$ в пространстве, касательном в точке $x$ к пространству событий. Обозначим $de$ двухмерный элемент площади на этой сфере. Инволютивное преобразование /2.4/ сохраняет восьмимерный элемент объема:

$$dP\,dQ\,de = dP'\,dQ'\,de'. \qquad /2.5/$$

Преобразование /2.4/ рассмотрено в[12] в общем случае разных масс покоя сталкивающихся частиц. Там же доказано утверждение /2.5/. Вывод интеграла столкновений и уравнений переноса, данный в работе[12], может быть полезен при учете неупругих столкновений в газе. Преобразование /2.4/ позволяет специализировать этот вывод применительно к упругим столкновениям и заметно упростить его. Однако здесь останавливаться на этом мы не будем.

Процесс упругого рассеяния характеризуется дифференциальным сечением

$$\Delta\sigma = h\,.\,de = h(\langle p,q\rangle, -(e,e'))\,de. \qquad /2.6/$$

Для любой пары функций $F(x,p)$ и $G(x,p)$ в пространстве состояний частицы газа обозначим

$$[F,G] = \tfrac{1}{2}\{F(x,p')\,G(x,q') + F(x,q')\,G(x,p') - F(x,p)\,G(x,q) - F(x,q)\,G(x,p)\}. \qquad /2.7/$$

В частности, при $G(x,p)=1$

$$[F,1] = \tfrac{1}{2}\{ F(x,p') + F(x,q') - F(x,p) - F(x,q) \} . \qquad /2.8/$$

Интеграл столкновений $I(x,p)$ равен

$$I(x,p) = \int_{P(x)} dQ \int_{S(x,p,q)} [A, A] < p,q > h\, de . \qquad /2.9/$$

Обозначим

$$A^{a_1 \dots a_n}(x) = \int_{P(x)} p^{a_1} \dots p^{a_n} A(x,p)\, dP \qquad /2.10/$$

$$I^{a_1 \dots a_n}(x) = \int_{P(x)} p^{a_1} \dots p^{a_n} I(x,p)\, dP \qquad /2.11/$$

моменты относительно функции распределения и интеграла столкновений.

Первый момент $A^{a}(x)$ совпадает с вектором потока частиц газа. Второй момент $A^{a\beta}(x)$ совпадает с тензором энергии-импульса.

Из уравнения переноса[12] для функции

$$\psi(x,p) = (\xi(x), p)^{n} \qquad /2.12/$$

следует уравнение моментов

$$\nabla_a A^{aa_1 \dots a_n} = I^{a_1 \dots a_n} . \qquad /2.13/$$

С помощью преобразования /2.4/ момент /2.11/ относительно интеграла столкновений нетрудно привести к следующему виду

$$I^{a_1 \dots a_n} = -\tfrac{1}{2} \int [A, A] [p^{a_1} \dots p^{a_n}, 1] <p,q> h\, dP\, dQ\, de . \qquad /2.14/$$

Отсюда следует, что нулевой момент $I(x)$ и первый момент $I^{\beta}(x)$ равны нулю, так что

$$\nabla_a A^{a}(x) = 0, \qquad \nabla_a A^{a\beta}(x) = 0 . \qquad /2.15/$$

Ввиду равенства $(p,p) = m^2 c^2$ моменты относительно $A(x,p)$ и $I(x,p)$, как и вообще относительно любой функции $B(x,p)$, обладают важным свойством:

$$g_{\mu\nu} B^{\mu\nu a_1 \dots a_n} = m^2 c^2 B^{a_1 \dots a_n}. \qquad /2.16/$$

В частности, если $m=0$, то след любого момента равен нулю. Кроме того, моменты обладают очевидным свойством симметрии относительно всех индексов.

## § 3. Поле скоростей массы газа и тензор давления

Квадратичная форма

$$A_{a\beta}(x)\, \xi^{a} \xi^{\beta} = \int_{P(x)} (p, \xi)^2 A(x,p)\, dP \qquad /3.1/$$

от $\xi$ положительно определена. Ввиду этого один собственный вектор $\xi$ тензора-энергии импульса

$$A_{\alpha\beta}\xi^{\beta} = \mu\,\xi_{\alpha} \qquad /3.2/$$

направлен во внутрь светового конуса, остальные три собственных вектора ортогональны к первому и, следовательно, лежат вне светового конуса. Времени-подобный собственный вектор определяет скорость $u(x)$ массы газа в точке $x$:

$$A_{\alpha\beta}u^{\beta} = \mu_{(0)}u_{\alpha}, \quad (u,u) = 1, \quad u_0 > 0\,. \qquad /3.3/$$

Собственное число $\mu_{(0)}$ положительно, остальные собственные числа $\mu_{(1)}$, $\mu_{(2)}$, $\mu_{(3)}$ отрицательны.

Переходя к определению тензора давления газа, напишем легко проверяемое тождество:

$$g_{\alpha\mu}\,g_{\beta\nu} = h_{\alpha\mu}h_{\beta\nu} - u_{\alpha}u_{\mu}h_{\beta\nu} - u_{\beta}u_{\nu}h_{\alpha\mu} + u_{\alpha}u_{\beta}u_{\mu}u_{\nu}, \qquad /3.4/$$

где

$$h_{\alpha\beta} = u_{\alpha}u_{\beta} - g_{\alpha\beta}. \qquad /3.5/$$

Из этого тождества следует, что любой симметричный тензор $T_{\alpha\beta}$ можно представить в виде

$$T_{\alpha\beta} = Sh_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} + (u_{\alpha}R_{\beta} + u_{\beta}R_{\alpha}) + R\,u_{\alpha}u_{\beta}\,, \qquad /3.6/$$

где

$$S = 1/3\,h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \quad R_{\alpha\beta} = (h_{\alpha\mu}h_{\beta\nu} - 1/3\,h_{\alpha\beta}h_{\mu\nu})\,T^{\mu\nu}, \quad R_{\alpha} = -\,h_{\alpha\mu}u_{\nu}T^{\mu\nu}, \quad R = u_{\mu}u_{\nu}T^{\mu\nu} \qquad /3.7/$$

Отметим также формулу

$$S = 1/3\,(R - T), \quad T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \qquad /3.8/$$

Поясним смысл величин /3.7/. В системе отсчета $u(x)$ скаляр $R$ представляет временную компоненту тензора $T_{\alpha\beta}$, вектор $R_{\alpha}$ –смешанные компоненты, тензор $R_{\alpha\beta} + S\,h_{\alpha\beta}$ –пространственные компоненты тензора $T_{\alpha\beta}$. Тензор $R_{\alpha\beta}$ представляет пространственную часть без следа тензора $T_{\alpha\beta}$ в системе отсчета $u(x)$.

Конструктивно переход к системе отсчета $u(x)$ можно выполнить следующим образом. Естественный базис $\{e_{\alpha}\}$ в касательном пространстве, которым мы по существу пользовались до сих пор, определяется из следующего разложения вектора смещения $dx$:

$$dx = e_{\alpha}\,dx^{\alpha}. \qquad /3.9/$$

Скалярные произведения $(e_{\alpha}, e_{\beta})$ составляют метрический тензор

$$(e_{\alpha}, e_{\beta}) = g_{\alpha\beta}. \qquad /3.10/$$

Дуальный базис $\{e^{\alpha}\}$ определяется из условия

$$(e^{\alpha}, e_{\beta}) = \delta^{\alpha}_{\beta}. \qquad /3.11/$$

Легко видеть, что

$$e^{\beta}= g^{\beta a} e_a , \quad e_a = g_{a\beta} e^{\beta} , \quad ( e^a , e^{\beta} ) = g^{a\beta}. \qquad /3.12/$$

Базис, представляющий систему отсчета $u(x)$, можно определить следующим образом:

$$f_* = u, \quad f_k = e_k - ( u, e_k ) u = - h_{k\beta} e^{\beta}. \qquad /3.13/$$

Нетрудно видеть, что

$$( f_*, f_* ) = 1, \quad ( f_*, f_k ) = 0 , \quad ( f_k, f_e ) = - h_{ke}. \qquad /3.14/$$

Компоненты $T_{**}$, $T_{*\dot{k}}$, $T_{\dot{k}\dot{e}}$ тензора $T$ в базисе, дуальном к /3.13/, равны

$$T_{**} = R, \quad T_{*\dot{k}} = k_k , \quad T_{\dot{k}\dot{e}} = R_{ke} + S h_{ke}. \qquad /3.15/$$

Этот результат оправдывает указанное выше истолкование величин /3.7/

В частности, если $T_{a\beta} = g_{a\beta}$, то $S = -1$, $R_{a\beta} = 0$, $R_a = 0$, $R = 1$. Таким образом, $h_{a\beta}$ –метрический тензор в плоскости, ортогональной к $u(x)$.

Положим теперь $T_{a\beta} = A_{a\beta}$. В этом случае $R = \mu_{(0)}$, $R_a = 0$. Скаляр $\mu_{(0)} c^{-1}$ является плотностью массы газа в системе отсчета $u(x)$. Тензор

$$p_{a\beta} = - c\, h_{a\mu} h_{\beta\nu} A^{\mu\nu} = - c A_{a\beta} + c \mu_{(0)} u_a u_{\beta} \qquad /3.16/$$

является тензором давления газа. Скаляр

$$p(x) = \frac{c}{3} h_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = \frac{c}{3} (\mu_{(0)} - m^2 c^2 A(x) ) = - \frac{\mu_{(1)} + \mu_{(2)} + \mu_{(3)}}{3} c \qquad /3.17/$$

представляет собой среднее гидростатическое давление газа в точке $x$. В частности, если $m = 0$, то $3p(x) = c\mu_{(0)}$.

Линии тока газа определяются системой уравнений

$$\frac{dx^a}{d\tau} = u^a ( x^0 , x^1 , x^2 , x^3 ) , \qquad /3.18/$$

где $\tau$ –собственное время макроскопического дифференциального элемента газа. В релятивистском случае оно не совпадает с собственными временами составляющих этот элемент микроскопических частиц.

Заметим, наконец, что разложение типа /3.6/ существует для любого тензора любого ранга. В частности, для вектора такое разложение означает представление его в виде суммы двух векторов, один из которых параллелен $u(x)$, а другой – перпендикулярен к $u(x)$. Точно так все слагаемые в сумме /3.6/ ортогональны в смысле свертки. Вектор $R_a$ и тензор $R_{a\beta}$ ортогональны к $u^a$, что следует из ортогональности $h_{a\beta}$ к $u^{\beta}$:

$$h_{a\beta} u^{\beta} = 0 . \qquad /3.19/$$

Отметим еще две формулы

$$g^{\mu\nu} h_{a\mu} h_{\beta\nu} = - h_{a\beta} , \quad h_{a\beta} g^{a\beta} = - 3 . \qquad /3.20/$$

## § 4. Релятивистская идеальная жидкость

В случае идеальной жидкости все три собственных отрицательных числа тензора энергии-импульса $A_{\alpha\beta}$ равны между собой и вектор потока $A_\alpha$ направлен по времениподобному собственному вектору $u_\alpha$ тензора $A_{\alpha\beta}$. Тензор давления идеальной жидкости равен

$$p_{\alpha\beta} = - p(x)\, h_{\alpha\beta}\,, \qquad /4.1/$$

а тензор энергии-импульса равен

$$A_{\alpha\beta} = [\, \mu_{(0)} + \frac{p}{c}\,]\, u_\alpha\, u_\beta - \frac{p}{c}\, g_{\alpha\beta}\,. \qquad /4.2/$$

Вектор потока частиц идеальной жидкости равен

$$A_\alpha = n(x)\, u_\alpha\,, \qquad /4.3/$$

где $n(x)$ – плотность числа частиц в системе отсчета $u(x)$.

Выражения /4.2/, /4.3/ и уравнения /2.15/ для этих величин хорошо известны. Они составляют предмет релятивистской гидродинамики идеальной жидкости. К ним необходимо добавить термодинамические соотношения.

Термодинамика разреженного релятивистского газа определяется локально-равновесной функцией распределения [13]:

$$A(x,p) = \frac{a(x)}{4\pi}\, e^{-(\lambda(x),\, p)}\,, \qquad /4.4/$$

где векторное поле $\lambda(x)$ связано с полем скоростей массы газа $u(x)$ и с локальной температурой газа $\theta(x)$:

$$\lambda(x) = \frac{c\, u(x)}{k\, \theta(x)} \qquad /4.5/$$

$k$ – постоянная Больцмана.

Подсчитаем моменты /2.10/ относительно функции распределения /4.4/. Они равны

$$A^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = a\, \Phi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}\,, \qquad /4.6/$$

где

$$\Phi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{P(x)} p^{\alpha_1} \ldots p^{\alpha_n}\, e^{-(\lambda(x),p)}\, dP\,. \qquad /4.7/$$

Все моменты /4.7/ выражаются через нулевой момент $\Phi$:

$$\Phi^{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \lambda_{\alpha_1} \ldots \partial \lambda_{\alpha_n}}\, \Phi\,. \qquad /4.8/$$

Первые пять из них равны

$$\Phi = \frac{m^2 c^2}{\gamma} K_1(\gamma)\,, \quad \Phi^\alpha = \frac{m^4 c^4}{\gamma^2} K_2(\gamma)\, \lambda^\alpha\,, \quad \Phi^{\alpha\beta} = \frac{m^6 c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma)\, \lambda^\alpha \lambda^\beta - \frac{m^4 c^4}{\gamma^2} K_2(\gamma)\, g^{\alpha\beta},$$

$$\Phi^{\alpha\beta\mu} = \frac{m^8 c^8}{\gamma^4} K_4(\gamma)\, \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\mu - \frac{m^6 c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma) \{ \lambda^\alpha g^{\beta\mu} + \lambda^\beta g^{\alpha\mu} + \lambda^\mu g^{\alpha\beta} \} ,$$

$$\Phi^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{m^{10} c^{10}}{\gamma^5} K_5(\gamma)\, \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\mu \lambda^\nu - \frac{m^8 c^8}{\gamma^4} K_4(\gamma) \{ \lambda^\alpha \lambda^\beta g^{\mu\nu} + \lambda^\alpha \lambda^\mu g^{\beta\nu} + \lambda^\alpha \lambda^\nu g^{\beta\mu} +$$

$$+ \lambda^\beta \lambda^\mu g^{\alpha\nu} + \lambda^\beta \lambda^\nu g^{\alpha\mu} + \lambda^\mu \lambda^\nu g^{\alpha\beta} \} + \frac{m^6 c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma) \{ g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} \} . \qquad /4.9/$$

Здесь обозначено

$$\gamma = m c \sqrt{(\lambda, \lambda)} = \frac{m c^2}{k \theta} , \qquad /4.10/$$

$$K_n(\gamma) = \frac{\gamma^n}{1.3 \ldots (2n-1)} \int_0^\infty \exp\{ -\gamma \operatorname{ch} s \} \operatorname{sh}^{2n} s \; ds . \qquad /4.11/$$

При $m = 0$ нужно заменить

$$\frac{m^{2n} c^{2n}}{\gamma^n} K_n(\gamma) \to \frac{2^{n-1} (n-1)!}{(\lambda, \lambda)^n} , \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad /4.12/$$

Гидродинамические уравнения с учетом /4.4/ принимают следующий вид:

$$\nabla_\alpha a \Phi^\alpha = 0 , \qquad \nabla_\alpha a \Phi^{\alpha\beta} = 0 . \qquad /4.13/$$

Уравнения /4.13/ в специальной теории относительности явились предметом весьма интересного исследования Д.Л. Синга[18], который получил выражение /4.4/ методом статистики, не прибегая к формулировке кинетического уравнения.

Между тем, кинетическое уравнение накладывает на $a(x)$ и $\lambda(x)$ значительно более жесткие условия, нежели система уравнений /4.13/. Действительно, для равновесной функции распределения /4.4/ интеграл столкновений равен нулю, а, следовательно, равны нулю и все моменты /2.11/ относительно интеграла столкновений. В силу уравнений /2.13/ получаем, что наряду с уравнениями /4.13/ надо учитывать все уравнения

$$\nabla_\alpha a \Phi^{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_n} = 0 , \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad /4.14/$$

Таким образом, ограничиваться уравнениями /4.13/ можно лишь приближенно, и степень точности тем хуже, чем сильнее отклоняются решения уравнений /4.13/ от равновесного решения кинетического уравнения. Равновесное решение исследовано в работах[11,13], где доказано, что функция /4.4/ тогда и только тогда удовлетворяет кинетическому уравнению /2.1/, а, следовательно, и всем уравнениям /4.14/, когда $a = const$ и векторное поле $\lambda(x)$ порождает преобразование пространства событий — изометрическое, если $m \neq 0$ и конформное, если $m = 0$ . В частности, если пространство событий не допускает таких преобразований, то решения кинетического уравнения в виде /4.4/ вовсе не существует.

В такой ситуации представляется замечательным, что адиабатичность движения газа, распределенного по закону /4.4/, следует из уравнений /4.13/, а не только из более жесткого кинетического уравнения. Действительно, вектор потока энтропии равен

$$s^{a}(x) = -\int\limits_{P(x)} p^{a} A(x,p)\, \ell n\, A(x,p)\, dP = a\, \Phi^{a\beta}\lambda_{\beta} - a\, \Phi^{a}\, \ell n\, \frac{a}{4\pi}\,. \qquad /4.15/$$

В силу /4.13/ и /4.8/ имеем

$$\nabla_{a} s^{a} = a\, \Phi^{a\beta}\nabla_{a}\lambda_{\beta} - \Phi^{a}\nabla_{a} a = -\nabla_{a} a\Phi^{a} = 0\,, \qquad /4.16/$$

что и доказывает утверждение об адиабатичности.

Интересен также и тот факт, что уравнения /4.13/ получаются и при решении релятивистского кинетического уравнения /2.1/ методом Гильберта. Согласно этому методу положим

$$A(x,p) = \frac{1}{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} A_{n}(x,p)\,, \qquad /4.17/$$

где $\rho$ –некоторый параметр; тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n} \sum_{\nu=0}^{n} \int dQ \int [\, A_{\nu}\,,\ A_{n-\nu}] < p,q > h\, de = \rho \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n}\, \hat{f}\, A_{n}\,. \qquad /4.18/$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\rho$ в обеих частях этого уравнения, получаем

$$\int dQ \int [\, A_{o}\,, A_{o}] < p,q > h\, de = 0\,, \qquad /4.19/$$

$$2 \int dQ \int [\, A_{o}\,, A_{1}] < p,q > h\, de = \hat{f}\, A_{o}\,, \qquad /4.20/$$

и т.д. Из уравнения /4.19/ следует /13/, что $A_{o}$ есть функция вида /4.4/. Обозначим

$$\Gamma(A) = \int dQ \int [\, A_{o}\,,\ A\,] < p, q > h\, de \qquad /4.21/$$

линейный оператор, действующий на $A$ . Пять функций

$$A_{o}\,,\quad A_{o} p^{a}\,,\quad a = 0,1,2,3 \qquad /4.22/$$

являются линейно независимыми решениями уравнения $\Gamma(A) = 0$ . Действительно, $\Gamma(A_{o}) = 0$ согласно /4.19/. Дифференцируя /4.19/ по $\lambda_{a}$ , входящим в /4.4/, находим $\Gamma(A_{o} p^{a}) = 0$ . Основываясь на результатах работы /13/, нетрудно доказать, что решений, линейно независимых от /4.22/, не существует. Для разрешимости уравнения /4.20/ необходимо, чтобы

$$\int\limits_{P(x)} \hat{f}(x,p)\, A_{o}(x,p)\, dP = 0\,, \qquad \int\limits_{P(x)} p^{a} \hat{f}(x,p)\, A_{o}(x,p)\, dP = 0\,. \qquad /4.23/$$

Если предположить, что классическая теория Фредгольма применима к линейному оператору $\Gamma(A)$ , то условия /4.23/ достаточны. Так как

$$4\pi\ \hat{f}(x,p)\,A_0 = e^{-(\lambda,p)}\ \left[\, p^{\mu}\frac{\partial a}{\partial x^{\mu}} - a\ p^{\mu}p^{\nu}\nabla_{\mu}\lambda_{\nu}\right], \qquad /4.24/$$

то ввиду /4.7/ и /4.8/ уравнения /4.23/ суть уравнения /4.13/ О методе Гильберта в нерелятивистском случае см[19].

## § 5. Обобщение полиномов Эрмита-Чебышева на релятивистский случай

Диссипативные процессы, протекающие в газе, не могут быть учтены локально-равновесной функцией распределения. Для их учета в нерелятивистском случае Град[2] разлагает отношение истинной функции распределения к локально-равновесной в ряд по полиномам Эрмита-Чебышева от компонент скорости. Обрывая этот ряд, Град получает приближенные уравнения для коэффициентов разложения. При этом учитывается соответственно несколько первых уравнений моментов. Остальные уравнения моментов в расчет не принимаются. Если ряд оборвать на первом члене, т.е. ограничиться локально-равновесной функцией распределения, то мы будем иметь уже рассмотренный случай идеальной жидкости. На этом пути Град получил гидродинамические уравнения нерелятивистской вязкой жидкости. Мы ставим своей целью получить аналогичные уравнения в релятивистском случае. Для этого нужно найти подходящее обобщение полиномов Эрмита-Чебышева на релятивистский случай. К решению этой задачи мы и переходим сейчас.

Рассмотрим функцию от векторов в пространстве Минсковского, равную

$$\psi = e^{(\xi,\,u-v)}\ , \qquad /5.1/$$

где

$$(u,u) = c^2,\quad (v,v) = c^2,\quad (\xi,\xi) = \mu^2 c^2, \qquad /5.2/$$

$\mu$ – некоторый положительный параметр, не зависящий от скорости света $c$. Выберем галилеев базис, направив ось времени по вектору $u$. Скалярный квадрат любого вектора $\eta$ в этом базисе равен

$$(\eta,\ \eta) = c^2\,\eta^0\,\eta^0 - \vec{\eta}^{\,2}\ . \qquad /5.3/$$

Следовательно,

$$\vec{u} = 0\ ,\quad u^{\circ} = 1\ ,\quad v^{\circ} = \sqrt{1+\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}}\ ,\qquad \xi^{\circ} = \sqrt{\mu^2+\frac{\vec{\xi}^{\,2}}{c^2}}\ . \qquad /5.4/$$

Функция /5.1/ запишется в виде

$$\psi = \exp\{\, x + \xi_0\,[\,1-\sqrt{1+y}\,]\,\}\ , \qquad /5.5/$$

где

$$\xi_0 = c^2\xi^0\ ,\quad x = \vec{\xi}\,\vec{v}\ ,\quad y = \frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\ . \qquad /5.6/$$

Определим в качестве релятивистского обобщения полиномов Эрмита-Чебышева следующие полиномы от $\xi^a$ :

$$H_{i_1\dots i_s}(\vec{\xi}\,) = \frac{\partial^{s}}{\partial v^{i_1}\ \dots\ \partial v^{i_s}}\,\psi\ \Big|_{v=u}\ . \qquad /5.7/$$

Заметим, что $\xi^{0}$ зависит от $\vec{\xi}$, так что от независимых переменных $\vec{\xi}$ функции /5.7/ не будут полиномами.

Для нахождения функций /5.7/ достаточно представить функцию /5.1/ в виде

$$\psi = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{S!} H_{i_1 \dots i_s} v^{i_1} \dots v^{i_s} = \sum_{s=0}^{\infty} H_{(s)}(\vec{v}) . \qquad /5.8/$$

Это достигается разложением функции /5.5/ в ряд

$$\psi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{a_k y^k x^{2\nu-2k}}{(2\nu-2k)!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu} \frac{a_k y^k x^{2\nu-2k+1}}{(2\nu-2k+1)!} , \qquad /5.9/$$

где коэффициенты $a_k$ определяются из разложения

$$\exp\{ \xi_0 [1-\sqrt{1+y}\,]\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k . \qquad /5.10/$$

Из /5.8/ и /5.9/ находим

$$H_{(2\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{a_k y^k x^{2\nu-2k}}{(2\nu-2k)!} , \qquad /5.11/$$

$$H_{(2\nu+1)} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{a_k y^k x^{2\nu-2k+1}}{(2\nu-2k+1)!} .$$

Остается найти $a_k$. Заметим, что по теореме о вычетах

$$a_k = \frac{e^{\xi_0}}{2\pi i} \oint e^{-\xi_0\sqrt{1+y}} \frac{dy}{y^{k+1}} . \qquad /5.12/$$

Перейдем к новой переменной интегрирования $z$:

$$1 + y = (1+z)^2 . \qquad /5.13/$$

В результате получим

$$a_k = \frac{1}{\pi i} \oint \frac{e^{-\xi_0 z}(z+1)}{z^{k+1}(z+2)^{k+1}} dz = 2 b_{kk} , \qquad /5.14/$$

где $b_{kk}$ находятся из разложения в ряд

$$\frac{e^{-\xi_0 z}(z+1)}{(z+2)^{k+1}} = \sum_{p=0}^{\infty} b_{pk} z^p . \qquad /5.15/$$

Отсюда

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{\xi_0}{2}, \quad a_2 = \frac{\xi_0(1+\xi_0)}{8} ,$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{4^k k!} \sum_{p=1}^{k} \frac{(2k-p-1)!}{(k-p)!(p-1)!} (2\xi_0)^p, \quad k>0. \qquad /5.16/$$

Выпишем первые пять членов ряда /5.8/

$$H_{(0)}(\vec{v}) = 1, \quad H_{(1)}(\vec{v}) = x, \quad H_{(2)}(\vec{v}) = \frac{x^2 - \xi_0 y}{2}, \quad H_{(3)}(\vec{v}) = \frac{x^3 - 3\xi_0 xy}{6}, \qquad /5.17/$$

$$H_{(4)}(\vec{v}) = \frac{x^4 - 6\xi_0 x^2 y + 3\xi_0(1+\xi_0) y^2}{24},$$

и, соответственно, пять функций /5.7/

$$\hat{H} = 1, \quad H_i = \xi_i, \quad H_{ij} = \xi_i \xi_j - \xi^0 \delta_{ij},$$

$$H_{ijk} = \xi_i \xi_j \xi_k - \xi^0 \{ \xi_i \delta_{jk} + \xi_j \delta_{ik} + \xi_k \delta_{ij} \}, \qquad /5.18/$$

$$H_{ijk\ell} = \xi_i \xi_j \xi_k \xi_\ell - \xi^0 \{ \xi_i \xi_j \delta_{k\ell} + \xi_i \xi_k \delta_{j\ell} + \xi_i \xi_\ell \delta_{jk} + \xi_j \xi_k \delta_{i\ell} + \xi_j \xi_\ell \delta_{ik} + \xi_k \xi_\ell \delta_{ij} \} +$$

$$+ \xi^0 (\xi^0 + \frac{1}{c^2}) \{ \delta_{ij} \delta_{k\ell} + \delta_{ik} \delta_{j\ell} + \delta_{i\ell} \delta_{jk} \}.$$

В последних формулах $\xi_i = \xi^i$, $i = 1,2,3$.

При $c \to \infty$ функция /5.1/ переходит в функцию

$$\psi_\infty = e^{\frac{\xi^2}{2\mu}} e^{-\frac{\mu}{2}[\vec{v} - \frac{\xi}{\mu}]^2}, \qquad /5.19/$$

а функции /5.7/ – в полиномы Эрмита-Чебышева. Чтобы получить предельные выражения для функций /5.11/, достаточно заметить, что

$$\lim_{c\to\infty} a_k y^k = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \mu^k \vec{v}^{2k}. \qquad /5.20/$$

Интеграл

$$H_{(r,s)}(\vec{v}, \vec{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_0} H_{(r)}(\vec{v}) H_{(s)}(\vec{w}) \frac{d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3}{\xi^0} \qquad /5.21/$$

при разных $r$ и $s$ отнюдь не равен нулю, как это имеет место в нерелятивистском пределе. Это тесно связано с неевклидовостью пространства импульсов частицы. Интеграл /5.21/ равен нулю лишь для следующих пар неравных чисел

$$(0,s), \quad (1,s), \quad (2\rho, 2\sigma+1), \qquad /5.22/$$

где $s$, $\rho$, $\sigma$ –целые числа. В частности, первые четыре функции /5.11/ ортогональны в смысле /5.21/.

Функциям /5.7/ соответствуют тензоры пространства событий. Действительно, величины /5.6/ можно записать в следующем инвариантном виде

$$\xi_0 = (u,\xi), \quad x = (u,\xi)(u,v) - (\xi,v), \quad y = (u,v)^2 - (v,v), \qquad /5.23/$$

предварительно заменив $u \to cu$, $v \to cv$, $\xi \to c^{-1}\xi$. Тензоры, соответствующие функциям /5.7/, равны

$$H_{a_1 \ldots a_s}(\xi) = \frac{\partial^s}{\partial v^{a_1} \ldots \partial v^{a_s}} H_{(s)} . \qquad /5.24/$$

В последней формуле подразумевается, что $\xi_0$, $x$, $y$, от которых зависит $H_{(s)}$, являются функция от $v$, заданными формулами /5.23/.

Выпишем первые четыре тензора /5.24/:

$$H = 1, \quad H_a = h_{a\mu}\xi^\mu, \quad H_{a\beta} = h_{a\mu}h_{\beta\nu}\xi^\mu\xi^\nu - \xi_0 h_{a\beta}, \qquad /5.25/$$

$$H_{a\beta\gamma} = h_{a\mu}h_{\beta\nu}h_{\gamma\rho}\xi^\mu\xi^\nu\xi^\rho - \xi_0\xi_\mu\{h_{\mu a}h_{\beta\gamma} + h_{\mu\beta}h_{a\gamma} + h_{\mu\gamma}h_{a\beta}\},$$

где тензор $h_{a\beta}$ определен формулой /3.5/. След последнего тензора равен

$$H_{a\beta}^{\beta} = g^{\beta\gamma}H_{a\beta\gamma} = [5\xi_0 - h_{\nu\rho}\xi^\nu\xi^\rho]h_{a\mu}\xi^\mu . \qquad /5.26/$$

Он соответствует следу трехмерного тензора третьего ранга /5.18/:

$$H_{ik}^{k} = [\vec{\xi}^{\,2} - 5\xi^0]\xi_i . \qquad /5.27/$$

В таком же соответствии находятся следы остальных тензоров /5.24/ и /5.7/.

Заметим, что

$$H_a u^a = 0, \quad H_{a\beta}u^\beta = 0, \quad H_{a\beta\gamma}u^\gamma = 0. \qquad /5.28/$$

## § 6. Система тринадцати уравнений моментов в релятивистском случае

Результаты предыдущего параграфа подсказывают по аналогии с нерелятивистским случаем, рассмотреным Градом [2], представить функцию распределения в виде

$$A(x,p) = \frac{1}{4\pi} e^{-(\lambda(x),p)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(\lambda,\lambda)^{s/2}} H_{a_1\ldots a_s}(\xi)\, a^{a_1\ldots a_s}(x), \qquad /6.1/$$

где

$$\xi = \sqrt{(\lambda,\lambda)}\, p, \quad \lambda = \sqrt{(\lambda,\lambda)}\, u, \qquad /6.2/$$

и вектор $\lambda(x)$ и коэффициенты $a^{a_1\ldots a_s}(x)$ искать из уравнений моментов. Мы остановимся далее на приближенной замене релятивистского кинетического уравнения системой тринадцати уравнений моментов, что приведет нас к релятивистским гидродинамическим уравнениям вязкой жидкости.

Будем предполагать, что коэффициенты разложения /6.1/ быстро убывают с возрастанием номера $s$ , и ограничимся следующим приближенным выражением:

$$A(x,p) = \frac{1}{4\pi} e^{-(\lambda(x),p)} \{ a(x) + \frac{a^a(x) H_a(\xi)}{\sqrt{(\lambda,\lambda)}} + \frac{a^{a\beta}(x) H_{a\beta}(\xi)}{2(\lambda,\lambda)} + \frac{b^a(x) H^{\beta}_{a\beta}(\xi)}{5\sqrt{(\lambda,\lambda)}} \} . \qquad /6.3/$$

Тензор $a^{a\beta}(x)$ предполагается симметричным. Подсчитаем первые три момента относительно функции /6.3/.

Нулевой момент равен

$$A(x) = a\Phi + a^a h_{a\mu} \Phi^{\mu} + \frac{a^{a\beta}}{2(\lambda,\lambda)} [(\lambda,\lambda) h_{a\mu} h_{\beta\nu} \Phi^{\mu\nu} - h_{a\beta} \lambda_{\mu} \Phi^{\mu}] + \qquad /6.4/$$

$$+ 1/5\, b^a h_{a\mu} [5\lambda_{\nu} \Phi^{\mu\nu} - (\lambda,\lambda) h_{\nu\sigma} \Phi^{\mu\nu\sigma}] .$$

Подставляя в /6.4/ моменты /4.9/, находим*/

$$A(x) = a\Phi . \qquad /6.5/$$

Аналогичным образом находим первый момент

$$A^a(x) = a\Phi^a - \frac{m^4c^4}{\gamma^2} K_2(\gamma) h^a_{\mu} a^{\mu} + \frac{m^6c^6}{2\gamma^4} K_2(\gamma) a^{\nu\mu} h_{\nu\mu} \lambda^a \qquad /6.6/$$

и второй момент

$$A^{a\beta}(x) = a\Phi^{a\beta} + \frac{m^6c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma) \{ \lambda^a h^{\beta}_{\mu} + \lambda^{\beta} h^a_{\mu} \} \{ b^{\mu} - a^{\mu} \} + \qquad /6.7/$$

$$+ \frac{m^6c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma) \{ h^a_{\mu} h^{\beta}_{\nu} + u^a u^{\beta} h_{\mu\nu} \} a^{\mu\nu} .$$

Условимся, что вектор $u(x)$ представляет скорость массы газа в точке $x$ . Это означает, что он должен быть собственным вектором тензора /6.7/ /см. /3.3//. Отсюда следует равенство

$$h^a_{\mu} \{ b^{\mu} - a^{\mu} \} = 0 , \qquad /6.8/$$

т.е. разность векторов $a^a(x)$ и $b^a(x)$ ортогональна к $u_a(x)$ . С другой стороны, ввиду равенств /5.28/ векторы $a^a(x)$ и $b^a(x)$ можно считать ортогональными к $u_a(x)$, так что

$$b^{\mu} = a^{\mu}, \quad a^{\nu} u_{\nu} = 0 . \qquad /6.9/$$

В силу тех же равенств /5.28/ тензор $a^{a\beta}(x)$ можно считать ортогональным к $u_{\beta}(x)$ т.е.

$$a^{a\beta} u_{\beta} = 0 . \qquad /6.10/$$

Кроме того, условимся, что среднее гидростатическое давление газа определяется уже нулевым приближением к /6.1/, т.е.

$$p(x) = \frac{c}{3} h_{a\beta} A^{a\beta} = \frac{ac}{3} h_{a\beta} \Phi^{a\beta} . \qquad /6.11/$$

Отсюда находим

---

*/ Можно показать, что и относительно функции /6.1/ нулевой момент равен /6.5/. Это связано с тем, что интеграл /5.21/ равен нулю при $r=0$ , $s \neq 0$ .

$$h_{\mu\nu}\, a^{\mu\nu} = 0 .$$ /6.12/

Отметим, что из /6.10/ и /6.13/ следует, что след $a^{\nu}_{\nu}$ равен нулю. Если в формуле /3.6/ положить $T_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$, то $S = 0$, $R = 0$, $R_{\alpha} = 0$, $R_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$.

Учитывая /6.9/, /6.10/ и /6.12/, получаем функцию распределения /6.3/ и моменты /6.6/ и /6.7/ в следующем виде

$$A(x,p) = \frac{1}{4\pi}\, e^{-(\lambda,p)} \{ a + \tfrac{1}{2} a_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu} - (a,p)[1+(p,\lambda) + \frac{\gamma^2}{5} - \frac{(p,\lambda)^2}{5}]\} , \quad /6.13/$$

$$A^{a}(x) = a\Phi^{a} + \frac{m^4 c^4}{\gamma^2} K_2(\gamma)\, a^{a}, \quad /6.14/$$

$$A^{\alpha\beta}(x) = a\,\Phi^{\alpha\beta} + \frac{m^6 c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma)\, a^{\alpha\beta}, \quad /6.15/$$

где, напомним, $\gamma = m c \sqrt{(\lambda,\lambda)}$ .

Из / 6.14/ следует, что плотность числа частиц в системе отсчета $u(x)$ равна

$$n(x) = u_{\alpha}(x)\, A^{\alpha}(x) = a\, \Phi^{a}\, u_{\alpha} . \quad /6.16/$$

Ввиду равенств /6.16/, /6.11/ и /6.5/ величину

$$\theta(x) = \frac{c}{k\sqrt{(\lambda,\lambda)}} \quad /6.17/$$

следует назвать температурой газа, так как давление, внутреняя энергия и плотность числа частиц газа в системе отсчета $u(x)$ связаны с $\theta(x)$ так же, как и в локально-равновесном случае.

В рассматриваемом приближении функция распределения газа задается тринадцатью компонентами: четырьмя компонентами вектора $\lambda(x)$, одной скалярной функцией $a(x)$, тремя независимыми компонентами вектора $a^{\alpha}(x)$ и пятью независимыми компонентами тензора $a^{\alpha\beta}(x)$. Для их определения необходимы тринадцать уравнений моментов. Мы должны сохранить пять уравнений /2.15/, означающих законы сохранения числа частиц, импульса и энергии. Чтобы установить дополнительные восемь уравнений, положим в формуле /3.6/

$$T^{\mu\nu} = \nabla_{\sigma} A^{\sigma\mu\nu} - I^{\mu\nu}. \quad /6.18/$$

В силу равенства /2.16/ и первого уравнения /2.15/ след тензора /6.18/ равен нулю. Таким образом, тензор /6.18/ имеет девять независимых компонент, и искомая система уравнений оказалась бы переопределенной, если положить $T^{\mu\nu} = 0$. Одно из этих уравнений нужно отбросить и не принимать в расчет, так же как и все высшие уравнения моментов. Естественно отбросить уравнение

$$R \equiv u_{\mu}\, u_{\nu}\, (\nabla_{\sigma} A^{\sigma\mu\nu} - I^{\mu\nu}) = 0 . \quad /6.19/$$

и оставить пять независимых уравнений, соответствующих тензору $R_{\alpha\beta}$ и три независимых уравнения, соответствующих вектору $R_{\alpha}$ :

$$[h_{a\mu}\ h_{\beta\nu} - 1/3\ h_{a\beta}\ h_{\mu\nu}\ ][\nabla_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - I^{\mu\nu}] = 0\,, \quad h_{a\mu}\ u_\nu\ [\nabla_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - I^{\mu\nu}] = 0\,. \qquad /6.20/$$

Эти уравнения вместе с уравнениями /2.15/ обобщают на релятивистский случай тринадцать уравнений Града. Далее, однако, мы рассмотрим уравнения Града лишь в том плане, как это сделано в нерелятивистском случае в книге Зоммерфельда /3/, чтобы кратчайшим путем прийти к уравнениям релятивистской вязкой жидкости.

## § 7. Вычисление второго момента относительно интеграла столкновений

Легко видеть, что скобка /2.7/ для функции /6.13/ равна

$$[A, A] = \frac{a}{8\pi^2}\ e^{-(\lambda, p+q)} \sum_{i=2}^{3} [c_i\,,\,1] + \frac{1}{16\pi^2}\ e^{-(\lambda, p+q)} \sum_{i,k=1}^{n} [c_i\,,\,c_k]\,, \qquad /7.1/$$

где

$$c_1 = -(a,p), \quad c_2 = ½\ a_{\mu\nu}\ p^\mu\ p^\nu, \quad c_3 = \frac{(a,p)}{5}\ [(\lambda,\lambda)\ h_{\mu\nu}\ p^\mu\ p^\nu - 5(p,\lambda)\,]\,. \qquad /7.2/$$

Выражение /7.1/ следует подставить в /2.14/ при $n=2$. Второе слагаемое в /7.1/ опустим, так как вектор $a^a$ и тензор $a^{a\beta}$ предполагаются малыми по сравнению со скаляром $a$. С помощью преобразования /2.4/ нетрудно получить второй момент относительно интеграла столкновений в виде:

$$I^{a\beta} = ½\ a\,a_{\mu\nu}\ J^{\mu\nu a\beta} + 1/5\ a\,a_\sigma \{(\lambda,\lambda)\,h_{\mu\nu}\ J^{\mu\nu\sigma a\beta} - 5\lambda_\mu\ J^{\mu\sigma a\beta}\ \}\,, \qquad /7.3/$$

где

$$J^{\mu\nu a\beta} = \frac{1}{16\pi^2} \int p^\mu\ p^\nu e^{-(\lambda,\,p+q)}\ h(<p,q>, -(e,\ e'))\,[p^{a'} p^{\beta'} + q^{a'} q^{\beta'} - p^a p^\beta - q^a q^\beta] \qquad /7.4/$$

$$<p,q>\ dP\ dQ\ de\,,$$

$$/7.5/$$

$$J^{\mu\nu\sigma a\beta} = \frac{1}{16\pi^2} \int p^\mu p^\nu p^\sigma e^{-(\lambda,p+q)}\ h(<p,q>, -(e,e'))\ [p^{a'} p^{\beta'} + q^{a'} q^{\beta'} - p^a p^\beta - q^a q^\beta] < p,q>\ dP\ dQ\ de.$$

Удобно рассматривать степенные функции, образованные тензорами /7.4/ и /7.5/:

$$J_{(2)} = J^{\mu\nu a\beta}\ \eta_\mu\,\eta_\nu\,\zeta_a\ \zeta_\beta\,, \quad J_{(3)} = J^{\mu\nu\sigma a\beta}\ \eta_\mu\,\eta_\nu\,\eta_\sigma\,\zeta_a\,\zeta_\beta. \qquad /7.6/$$

От переменных интегрирования $p$, $q$ перейдем к переменным $v$, $\rho$, $e'$:

$$v = \frac{p+q}{\sqrt{(p+q,\,p+q)}}\,, \quad \rho = \frac{<p,q>}{\sqrt{(p+q,\,p+q)}}\,, \quad e' = \frac{p-q}{\sqrt{(p-q,\ q-p)}}\ . \qquad /7.7/$$

На основании формулы /5.47/ работы [12] заключаем, что

$$< p, q > dP\ d\zeta = 16\rho^3(\rho^2 + m^2c^2)\,dv\ de'\ d\rho\ . \qquad /7.8/$$

Кроме того имеем

$$p' = \sqrt{\rho^2 + m^2c^2}\ v + \rho e, \quad p = \sqrt{\rho^2 + m^2c^2} v + \rho e',$$
$$q' = \sqrt{\rho^2 + m^2c^2}\ v - \rho e, \quad q = \sqrt{\rho^2 + m^2c^2}\ v - \rho e'. \qquad /7.9/$$

Отсюда

$$(\zeta, p')^2 + (\zeta, q')^2 - (\zeta, p)^2 - (\zeta, q)^2 = 2\rho^2[(\zeta, e)^2 - (\zeta, e')^2]\ . \qquad /7.10/$$

Выполним интегрирование по $e'$. Введем два вектора $k$ и $\ell$, удовлетворяющие условиям $(k, v)=0$, $(\ell, v)=0$, $(\zeta, \ell)=0$, $(k, e')=0$, $(\ell, e')=0$, $(k, \ell)=0$, $(k,k)=(\ell,\ell)=-1$ и разложим векторы $e$ и $\zeta$ по $v$, $e'$, $k$, $\ell$ :

$$e = e'\cos\theta + k\sin\theta\cos\phi + \ell\sin\theta\sin\phi,$$
$$\zeta = (\zeta, v)\,v - (\zeta, e')\,e' - (\zeta, k)\,k\,. \qquad /7.11/$$

Элемент площади равен $de = \sin\theta\ d\theta\ d\phi$. В интегралах /7.6/ от $\phi$ зависит только множитель /7.10/. Нетрудно показать, что

$$\int_0^{2\pi} [(\zeta, e)^2 - (\zeta, e')^2]\,d\phi = \pi\sin^2\theta[(\zeta, v)^2 - (\zeta, \zeta) - 3(\zeta, e')^2]\ . \qquad /7.12/$$

Обозначим

$$2\pi\int_0^{\pi} h(<p, q>, \cos\theta)\sin^3\theta\ d\theta = S\left(\frac{<p, q>}{\sqrt{(p+q, p+q)}}\right)\ . \qquad /7.13/$$

Собирая полученные результаты, находим /7.4/ в виде

$$J_{(n)} = \frac{1}{\pi^2}\int S(\rho)\,\rho^5(\rho^2 + m^2c^2)\ B_{(n)}\exp\{-2\sqrt{\rho^2 + m^2c^2}(\lambda, v)\}\ dv\ d\rho\,, \qquad /7.14/$$

где

$$B_{(n)} = \int[\sqrt{\rho^2+m^2c^2}(v, \eta) + \rho(\eta, e')]^n\ [(\zeta, v)^2 - (\zeta, \zeta) - 3(\zeta, e')^2]\ de'. \qquad /7.15/$$

Чтобы вычислить /7.15/ возьмем вспомогательный интеграл

$$Y_{(s)} = \int (y, e')^s\ de'\,. \qquad /7.16/$$

Введем три вектора $a$, $b$, $c$, ортогональных к вектору $v$ и удовлетворяющих условиям $(a,b)=0$, $(a,c)=0$, $(b,c)=0$, $(a,y)=0$, $(b,y)=0$, $(a,a)=(b,b)=(c,c)=-1$.
Разложим векторы $y$ и $e$ по $v$, $a$, $b$, $c$ :

$$e' = a\sin\theta'\cos\phi' + b\sin\theta'\sin\phi' + c\cos\theta'$$
$$y = (y,v)\,v - (y,c)\,c\,. \qquad /7.17/$$

Получаем

$$de' = \sin\theta' \, d\theta' \, d\phi' , \quad (y, e') = (y,c) \cos\theta' , \quad (y, y) = (y, v)^2 - (y, c)^2. \qquad /7.18/$$

Из /7.18/ следует

$$Y_{(2\nu+1)} = 0 , \quad Y_{(2\nu)} = \frac{4\pi}{2\nu+1} \left[ (y, v)^2 - (y, y) \right]^{\nu} , \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots . \qquad /7.19/$$

Дифференцируя /7.19/ по компонентам вектора $y_a$ , после несложных выкладок найдем

$$B_{(2)} = \frac{8\pi\rho^2}{15} \left\{ [(\eta, v)^2 - (\eta, \eta)][(\zeta, v)^2 - (\zeta, \zeta)] - 3 [(\eta, v)(\zeta, v) - (\eta, \zeta)]^2 \right\} , \qquad /7.20/$$

$$B_{(3)} = 3 \sqrt{\rho^2 + m^2 c^2} \; (\eta, v) \, B_{(2)} . \qquad /7.21/$$

Перейдем к интегрированию по $v$ . Представим /7.14/ в виде:

$$J_{(n)} = \frac{32}{15} \int_0^{\infty} S(\rho) \, \rho^7 (\rho^2 + m^2 c^2) \, C_{(n)} \, d\rho , \qquad /7.22/$$

где

$$C_{(n)} = \frac{15}{32 \pi^2 \rho^2} \int B_{(n)} \exp\left\{ -2\sqrt{\rho^2 + m^2 c^2} \, (\lambda, v) \right\} dv . \qquad /7.23/$$

Из /7.21/ следует

$$C_{(3)} = -\frac{3}{2} \, \eta_a \frac{\partial}{\partial \lambda_a} C_{(2)} . \qquad /7.24/$$

Ввиду /7.20/ интеграл $C_{(2)}$ равен

$$C_{(2)} = \psi^{a\beta\mu\nu} \left\{ [\eta_a \eta_\beta - (\eta,\eta) g_{a\beta}][\zeta_\mu \zeta_\nu - (\zeta,\zeta) g_{\mu\nu}] - 3 [\eta_a \zeta_\beta - (\eta,\zeta) g_{a\beta}] [\eta_\mu \zeta_\nu - (\eta,\zeta) g_{\mu\nu}] \right\} , \qquad /7.25/$$

где

$$\psi^{a\beta\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \int v^a v^\beta v^\mu v^\nu \exp\left\{ -2\sqrt{\rho^2 + m^2 c^2} (\lambda, v) \right\} dv . \qquad /7.26/$$

Интеграл /7.26/ аналогичен интегралу /4.7/. Имеем

$$\psi^{a\beta\mu\nu} = \frac{1}{16(\rho^2 + m^2 c^2)^2} \frac{\partial^4}{\partial\lambda_a \partial\lambda_\beta \partial\lambda_\mu \partial\lambda_\nu} \psi , \qquad /7.27/$$

где

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \int \exp\left\{ -2\sqrt{\rho^2 + m^2 c^2} (\lambda, v) \right\} dv = \frac{K_1(2\gamma(\rho))}{2\gamma(\rho)} , \qquad /7.28/$$

$$\gamma(\rho) = \sqrt{\rho^2 + m^2 c^2} \; \sqrt{(\lambda, \lambda)} . \qquad /7.29/$$

Теперь уже нетрудно получить $C_{(2)}$ :

$$C_{(2)} = 16(\rho^2 + m^2 c^2)^2 \frac{K_5(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^5} L + 40(\rho^2 + m^2 c^2) \frac{K_4(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^4} M + 10 \frac{K_3(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^3} N , \qquad /7.30/$$

где

$$L = [(\eta,\lambda)^2 - (\eta,\eta)(\lambda,\lambda)][(\zeta,\lambda)^2 - (\zeta,\zeta)(\lambda,\lambda)] - 3\,[(\eta,\lambda)(\zeta,\lambda) - (\eta,\zeta)(\lambda,\lambda)]^2$$

$$M = 3(\eta,\zeta)^2(\lambda,\lambda) + (\eta,\lambda)^2(\zeta,\zeta) + (\zeta,\lambda)^2(\eta,\eta) - (\eta,\eta)(\zeta,\zeta)(\lambda,\lambda) - 4(\eta,\zeta)(\eta,\lambda)(\zeta,\lambda) \qquad /7.31/$$

$$N = (\eta,\eta)(\zeta,\zeta) - 4(\eta,\zeta)^2.$$

Учитывая /7.24/, отсюда находим $C_{(3)}$ :

$$C_{(3)} = 96(\rho^2+m^2c^2)^3\,\frac{K_6(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^6}(\eta,\lambda)\,L + 48(\rho^2+m^2c^2)^2\,\frac{K_5(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^5}\{\tilde{\tilde{L}} + 5(\eta,\lambda)\,M\} +$$

$$+120(\rho^2+m^2c^2)\,\frac{K_4(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^4}\{\tilde{\tilde{M}} + \tfrac{1}{2}(\eta,\lambda)\,N\}. \qquad /7.32/$$

Знак $\approx$ над $L$ и $M$ означает операцию $-\tfrac{1}{2}\eta_a \frac{\partial}{\partial\lambda_a}$ :

$$\tilde{\tilde{L}} = [(\eta,\lambda)^2 - (\eta,\eta)(\lambda,\lambda)][(\zeta,\xi)(\eta,\lambda) - (\eta,\zeta)(\zeta,\lambda)] -$$

$$-3\,[(\eta,\lambda)(\zeta,\lambda) - (\eta,\zeta)(\lambda,\lambda)][(\eta,\zeta)(\eta,\lambda) - (\eta,\eta)(\zeta,\lambda)], \qquad /7.33/$$

$$\tilde{\tilde{M}} = (\eta,\zeta)[(\eta,\eta)(\zeta,\lambda) - (\eta,\zeta)(\eta,\lambda)].$$

Дальнейшие довольно громоздкие выкладки несложны. Находим

$$\frac{a_{\mu\nu}}{2}\,\frac{\partial^2 C_{(3)}}{\partial\eta_\mu\,\partial\eta_\nu} = \{-3\,\frac{K_5(2\gamma(\rho))}{2\gamma(\rho)} + 30\,\frac{K_4(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^2} - 40\,\frac{K_3(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^3}\}\,a_{\mu\nu}\zeta^\mu\zeta^\nu,$$

$$\frac{a_\sigma\lambda_\mu}{2}\,\frac{\partial^2 C_{(3)}}{\partial\eta_\mu\,\partial\eta_\sigma} = \{10\,\frac{K_4(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^2} - 40\,\frac{K_3(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^3}\}(\zeta,\lambda)(\zeta,a), \qquad /7.34/$$

$$a_\sigma b_{\mu\nu}\frac{(\lambda,\lambda)}{6}\,\frac{\partial^3 C_{(3)}}{\partial\eta_\mu\,\partial\eta_\nu\,\partial\eta_\sigma} = \{10\,\frac{K_5(2\gamma(\rho))}{2\gamma(\rho)} - 50\,\frac{K_4(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^2}\}(\zeta,\lambda)(\zeta,a).$$

Обозначим $b(\theta)$ следующий интеграл как функцию от температуры $\theta$ :

$$b(\theta) = \int_0^\infty S(\rho)\,\rho^7(\rho^2+m^2c^2)\,\frac{K_3(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^3}\,d\rho. \qquad /7.35/$$

Учитывая /7.29/, нетрудно заметить, что

$$\int_0^\infty S(\rho)\,\rho^7(\rho^2+m^2c^2)\,\frac{K_4(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^2}\,d\rho = \theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,b(\theta), \qquad /7.36/$$

$$\int_0^\infty S(\rho)\ \rho^7(\rho^2+m^2c^2)\,\frac{K_5\,(2\gamma(\rho))}{2\gamma(\rho)}\,d\rho = \theta^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\,b(\theta)+3\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,b(\theta). \qquad /7.37/$$

Из формул /7.34/–/7.37/ следует, что момент /7.3/ равен

$$I^{\alpha\beta} = -\frac{16}{15}\,a\,\{\,40\,b(\theta)-21\theta\,b'(\theta)+3\theta^2 b''(\theta)\,\}\,a^{\alpha\beta} +$$

$$+\frac{32}{15}\,a\,\{\,20\,b(\theta)-7\,\theta\,b'(\theta)+\theta^2 b''(\theta)\,\}\{\,a^{\alpha}\lambda^{\beta}+a^{\beta}\lambda^{\alpha}\}\,. \qquad /7.38/$$

Отсюда легко найти моменты

$$L_\mu = h_{\mu\alpha}\,u_\beta I^{\alpha\beta}\,,\quad L_{\mu\nu} = \{\,h_{\mu\alpha}\,h_{\nu\beta}-1/3\ h_{\mu\nu}\,h_{\alpha\beta}\}\,I^{\alpha\beta}\,, \qquad /7.39/$$

входящие в уравнения /6.20/:

$$L_\mu = -\frac{32}{15}\,a\{\,20\,b(\theta)-7\theta\,b'(\theta)+\theta^2 b''(\theta)\,\}\,\sqrt{(\lambda,\lambda)}\,a_\mu \qquad /7.40/$$

$$L_{\mu\nu} = -\frac{16}{15}\,a\,\{40\,b(\theta)-21\theta\,b'(\theta)+3\theta^2\,b''(\theta)\,\}\,a_{\mu\nu}\,. \qquad /7.41/$$

## § 8. Гидродинамические уравнения вязкой жидкости

Рассмотрим первое уравнение /6.20/:

$$(\,h_{\mu\alpha}\ h_{\nu\beta}-1/3\,h_{\mu\nu}\ h_{\alpha\beta}\,)\nabla_\sigma A^{\sigma\alpha\beta} = L_{\mu\nu}\,. \qquad /8.1/$$

Нетрудно доказать следующее тождество:

$$(\,h_{\mu\alpha}\ h_{\nu\beta}-1/3\,h_{\mu\nu}\ h_{\alpha\beta})\nabla_\sigma a\ \Phi^{\sigma\alpha\beta} = a\frac{m^5c^5}{\gamma^2}\,K_3(\gamma)\,\{\,h_\mu^\beta\ \nabla_\beta u_\nu+h_\nu^\beta\,\nabla_\beta u_\mu-\frac{2}{3}\,h_{\mu\nu}\nabla_\beta u^\beta\}. \qquad /8.2/$$

Пренебрегая в левой части уравнения /8.1/ слагаемыми, содержащими $a_\alpha$ и $a_{\alpha\beta}$, и учитывая /7.41/, находим

$$a_{\mu\nu} = -\frac{15m^5c^5}{16\,\gamma^2}\,K_3(\gamma)\ \frac{h_\mu^\beta\,\nabla_\beta u_\nu+h_\nu^\beta\,\nabla_\beta u_\mu\ -2/3\,h_{\mu\nu}\nabla_\beta\,u^\beta}{40\,b(\theta)-21\theta b'(\theta)\ +\ 3\theta^2\,b''(\theta)}\,. \qquad /8.3/$$

Перейдем ко второму уравнению /6.20/

$$h_{\mu\alpha}\ u_\beta\nabla_\sigma A^{\sigma\alpha\beta} = L_\mu\,. \qquad /8.4/$$

Справедливо следующее тождество:

$$h_{\mu\alpha}\ u_\beta\nabla_\sigma a\Phi^{\sigma\alpha\beta} = -\frac{m^5c^5}{\gamma^2}\,K_3(\gamma)\,h_\mu^\beta\,\nabla_\beta a + a\,\frac{m^5c^5}{\gamma^2}[\,K_3(\gamma)-\gamma K_4(\gamma)\,]\{u^\beta\,\nabla_\beta u_\mu - h_\mu^\beta\ \nabla_\beta\ \ln\gamma\}. \qquad /8.5/$$

Воспользовавшись легко получаемым следствием из второго уравнения /2.15/:

$$a\,\frac{m^4c^4}{\gamma}\,K_3(\gamma)\{h_\mu^\beta\nabla_\beta \ln\gamma - u^\beta\nabla_\beta u_\mu\} - \frac{m^4c^4}{\gamma^2}K_2(\gamma)h_\mu^\beta\nabla_\beta a + \frac{m^6c^6}{\gamma^3}K_3(\gamma)\,h_{\alpha\mu}\nabla_\beta a^{\alpha\beta} = 0\,, \qquad /8.6/$$

находим

$$h_{\mu\alpha}\,u_\beta\nabla_\sigma a\Phi^{\sigma\alpha\beta} = \frac{m^5c^5K_2^2(\gamma)}{\gamma^4K_3(\gamma)}\,\frac{c_p}{k}\,h_\mu^\beta\nabla_\beta a + \frac{m^7c^7}{\gamma^4}\,[K_3(\gamma)-\gamma K_4(\gamma)]\,h_{\alpha\mu}\,\nabla_\beta a^{\alpha\beta}, \qquad /8.7/$$

где $k$ –постоянная Больцмана, $c_p$ –теплоемкость газа при постоянном давлении, приходящаяся на одну частицу[13]:

$$c_p = k\,\{\,5\gamma\,\frac{K_3(\gamma)}{K_2(\gamma)} + \gamma^2 - \gamma^2[\,\frac{K_3(\gamma)}{K_2(\gamma)}\,]^2\}\,. \qquad /8.8/$$

Таким образом, левую часть уравнения /8.4/ можно приближенно записать в виде:

$$h_{\mu\alpha}\,u_\beta\,\nabla_\sigma A^{\sigma\alpha\beta} \approx \frac{m^5c^5\,K_2^2(\gamma)}{\gamma^4K_3(\gamma)}\,\frac{c_p}{k}\,h_\mu^\beta\nabla_\beta a\,. \qquad /8.9/$$

Приравнивая правую часть равенства /8.9/ моменту /7.40/, находим

$$a_\mu = -\frac{15\,m^6c^6}{32\,\gamma^5}\,K_3(\gamma)\,[\,\frac{K_2(\gamma)}{K_3(\gamma)}\,]^2\,\frac{c_p}{k}\,\frac{h_\mu^\beta\nabla_\beta \ln a}{20b(\theta)-7\theta b'(\theta)+\theta^2b''(\theta)}\,. \qquad /8.10/$$

Итак, мы получили гидродинамические уравнения вязкой жидкости в виде /2.15/, где $A^\alpha$ и $A^{\alpha\beta}$ заданы выражениями /6.14/ и /6.15/, причем вектор $a^\alpha$ и тензор $a^{\alpha\beta}$, входящие в /6.14/ и /6.15/, определены согласно формулам /8.10/ и /8.3/.

Рассмотрим, далее, энтропию газа в приближении вязкой жидкости. Чтобы получить вектор потока энтропии, нужно в общее определение этого вектора[12] подставить выражение /6.13/:

$$s^\alpha(x) = -\int_{P(x)} p^\alpha A(x,p)\ln A(x,p)\,dP = -\int p^\alpha A(x,p)[\,\ln\frac{a}{4\pi} - (p,\lambda)\,]\,dP\; - \qquad /8.11/$$

$$-\frac{1}{a}\int p^\alpha A(x,p)\{\tfrac{1}{2}a_{\mu\nu}p^\mu p^\nu - (a,p)\,[1+(p,\lambda)+\frac{\gamma^2}{5}-\frac{(p,\lambda)^2}{5}\,]\}\,dP\,.$$

При этом мы воспользовались приближенным равенством $\ln(1+y)\approx y$. Пренебрегая квадратичными членами относительно $a_\alpha$ и $a_{\alpha\beta}$, находим

$$s^\alpha(x) = -a\Phi^\alpha\ln\frac{a}{4\pi} + a\Phi^{\alpha\beta}\lambda_\beta - \frac{m^4c^4}{\gamma^2}\,K_2(\gamma)\;[\ln\frac{a}{4\pi}+1\,]\,a^\alpha\,. \qquad /8.12/$$

Представив вектор потока частиц в виде

$$A^\alpha(x) = n(x)\,u^\alpha + \nu^\alpha, \qquad /8.13/$$

получим

$$s^{a}(x) = s(x)u^{a} - \frac{w - k\theta\sigma}{k\theta}\,\nu^{a}, \qquad /8.14/$$

где $w$ –тепловая функция, $\sigma$ – энтропия, приходящиеся на одну частицу в системе отсчета $u(x)$, $s(x)$ – плотность энтропии в системе отсчета $u(x)$. Все термодинамические величины в системе отсчета $u(x)$ такие же, как и в локально-равновесном случае. Последние рассмотрены в работе[13]. В /8.14/ учтено равенство

$$\ell n\,\frac{a}{4\pi} + 1 = \frac{w}{k\theta} - \sigma\,. \qquad /8.15/$$

Согласно /6.14/ и /8.10/, вектор $\nu^{a}$ равен

$$\nu^{a} = -\frac{\kappa}{ck\gamma^{2}}\left[\frac{K_2(\gamma)}{K_3(\gamma)}\right]^{2} h^{a\beta}\nabla_{\beta}\ell n\, a = -\frac{\kappa}{ck}\left[\frac{k\theta}{w}\right]^{2} h^{a\beta}\nabla_{\beta}\left[\frac{w - k\theta\sigma}{k\theta}\right], \qquad /8.16/$$

где

$$\kappa = \frac{15}{32}\,\frac{m^{10}c^{11}}{\gamma^{5}}\,K_2(\gamma)\,K_3(\gamma)\,c_p\left[20b(\theta) - 7\theta b'(\theta) + \theta^{2}b''(\theta)\right]^{-1}. \qquad /8.17/$$

Запишем, далее, тензор энергии-импульса в виде

$$A^{a\beta}(x) = a\,\Phi^{a\beta} + r^{a\beta}. \qquad /8.18/$$

Согласно /6.15/ и /8.3/, тензор $r^{a\beta}$ равен

$$r^{a\beta} = -\eta\left[h^{a\mu}\nabla_{\mu}u^{\beta} + h^{\beta\mu}\nabla_{\mu}u^{a} - 2/3\,h^{a\beta}\nabla_{\mu}u^{\mu}\right], \qquad /8.19/$$

где

$$\eta = \frac{15}{16}\,\frac{m^{11}c^{11}}{\gamma^{5}}K_3(\gamma)\,K_3(\gamma)\left[40b(\theta) - 21\theta b'(\theta) + 3\theta^{2}b''(\theta)\right]^{-1}. \qquad /8.20/$$

Выражения /8.16/ и /8.19/ совпадают с соответствующими выражениями, приведенными в книге[15] и полученными феноменологическим путем. Величина /8.17/ является коэффициентом теплопроводности, величина /8.20/ – первым коэффициентом вязкости. Второй коэффициент вязкости равен нулю.

Докажем, что коэффициенты теплопроводности и вязкости положительны. Так как $\gamma$, $K_2(\gamma), K_3(\gamma)$ и $b(\theta)$ положительны, то достаточно доказать, что

$$B(\theta) = 40b(\theta) - 21\theta b'(\theta) + 3\,\theta^{2}b''(\theta) \qquad /8.21/$$

больше нуля. Пользуясь рекуррентными соотношениями для бесселевых функций, находим

$$B(\theta) = \int_{0}^{\infty} S(\rho)\,\rho^{7}(\rho^{2} + m^{2}c^{2})\left\{3\,\frac{K_3(2\gamma(\rho))}{2\gamma(\rho)} - 6\,\frac{K_2(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^{2}} + 4\,\frac{K_3(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^{3}}\right\}d\rho\,. \qquad /8.22/$$

Известно[18], что

$$x\,K_3(x) > 2\,K_2(x)\,. \qquad /8.23/$$

Следовательно, $B(\theta) > 0$ .

Рассмотрим предельные значения коэффициентов $\kappa$ и $\eta$ при $c \to \infty$. Имеем

$$\gamma = \frac{mc^2}{k\theta}, \quad \gamma(\rho) = \frac{c\sqrt{m^2c^2+\rho^2}}{k\theta}. \qquad /8.24/$$

При $x \to \infty$

$$K_n(x) \to \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}. \qquad /8.25/$$

Следовательно, при $c \to \infty$

$$\frac{1}{\eta} \to \frac{8}{5\sqrt{\pi}\,(mk\theta)^{9/2}} \int_0^\infty S(\rho)\,\rho^7 e^{-\frac{\rho^2}{mk\theta}}\, d\rho. \qquad /8.26/$$

Аргумент функции $S(\rho)$ /см. /7.13// в нерелятивистском пределе равен

$$\frac{\langle p, q\rangle}{\sqrt{(p+q, p+q)}} \to \tfrac{1}{2}\,|\vec{p} - \vec{q}\,| \qquad /8.27/$$

Отношение $\kappa$ и $\eta$ равно

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{c_p}{2m}\,\frac{K_2(\gamma)}{K_3(\gamma)}\;\frac{40b(\theta) - 21\theta b'(\theta) + 3\theta^2 b''(\theta)}{20\,b(\theta) - 7\theta b'(\theta) + \theta^2 b''(\theta)}. \qquad /8.28/$$

В нерелятивистском пределе

$$\frac{\kappa}{\eta} \to \frac{3c_p}{2m} = \frac{15k}{4m} \qquad /8.29/$$

независимо от вида дифференциального сечения рассеяния. Нерелятивистское отношение коэффициентов $\kappa$ и $\eta$, полученное в [3] для случая, когда дифференциальное сечение не зависит ни от угла, ни от энергии, совпадает с /8.29/. В этом случае формула /8.26/ дает

$$\eta = \frac{5}{16\,\sigma}\sqrt{\pi mk\theta}, \qquad /8.30/$$

где $\sigma$ –полное сечение. Формула /8.30/ также совпадает с соответствующей формулой, полученной в [3].

Нужно еще убедиться, что дивергенция вектора потока энтропии /8.12/ неотрицательна. Запишем

$$s^a = -\nu^a - A^a \ln\frac{a}{4\pi} + A^{a\beta}\lambda_\beta. \qquad /8.31/$$

Учитывая уравнения /2.15/, находим

$$\nabla_a s^a = -\nu^a \nabla_a \ln a + \sqrt{(\lambda,\lambda)}\,\tau^{a\beta}\nabla_a u_\beta. \qquad /8.32/$$

Подставляя сюда /8.16/ и /8.19/, получаем

$$\nabla_a s^a = \frac{\kappa}{ck\gamma^2}\left[\frac{K_2(\gamma)}{K_3(\gamma)}\right]^2 h^{a\beta}\nabla_a \ln a\,\nabla_\beta \ln a - \eta\sqrt{(\lambda,\lambda)}\,[h^{a\mu}\nabla_\mu u^\beta + h^{\beta\mu}\nabla_\mu u^a - 2/3\, h^{a\beta}\nabla_\mu u^\mu]\,\nabla_a u_\beta. \qquad /8.33/$$

Обозначим $\ell_a = \nabla_a \ln a$. Разложим $\ell_a = r u_a + r_a$, $u^a r_a = 0$. Имеем $h^{\alpha\beta}\ell_\alpha \ell_\beta = -(r,r)$. Так как $(u,u)>0$, то $(r,r) \leq 0$. Следовательно, первое слагаемое в /8.33/ неотрицательно. Обозначим, далее, в формуле /3.8/ $T_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha$. Имеем

$$R_{\alpha\beta} = -h^\mu_\alpha \nabla_\mu u_\beta - h^\mu_\beta \nabla_\mu u_\alpha + 2/3\, h_{\alpha\beta} \nabla_\mu u^\mu . \qquad /8.34/$$

Но $R_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}$. Последнее выражение неотрицательно как след квадрата тензора. Таким образом, и второе слагаемое в /8.33/ неотрицательно. Следовательно, $\nabla_a s^a \geq 0$.

Выпишем, наконец, полученные результаты для случая $m = 0$:

$$\nu^a = -\frac{\kappa}{16\, ck} h^{\alpha\beta} \nabla_\beta \ln a , \qquad /8.35/$$

$$\kappa = \frac{30\, ck}{(\lambda,\lambda)^3} \left[ 20\, b(\theta) - 7\theta b'(\theta) + \theta^2 b''(\theta) \right]^{-1}, \qquad /8.36/$$

$$\eta = \frac{60}{(\lambda,\lambda)^3 \sqrt{(\lambda,\lambda)}} \left[ 40 b(\theta) - 21\theta b'(\theta) + 30\theta^2 b''(\theta) \right]^{-1}. \qquad /8.37/$$

При $m = 0$ выражение $b(\theta)$ также упрощается:

$$b(\theta) = \int_0^\infty S(\rho)\, \rho^9 \frac{K_3 (2\rho\sqrt{(\lambda,\lambda)})}{[2\rho \sqrt{(\lambda,\lambda)}]^3}\, d\rho . \qquad /8.38/$$

Если сечение постоянно, то интеграл /8.38/ равен

$$b(\theta) = \frac{\sigma}{2(\lambda,\lambda)^5} = \frac{\sigma (k\theta)^{10}}{2 c^{10}} . \qquad /8.39/$$

В этом случае

$$\kappa = \frac{3\, ck}{2\sigma}, \quad \eta = \frac{6}{5\sigma\sqrt{(\lambda,\lambda)}}, \quad \frac{\kappa}{\eta} = \frac{5c^2}{4\theta} . \qquad /8.40/$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову за интерес к работе и ценные дискуссии.

## Литература


1. С. Чепмен и Т. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ., М. 1960.
2. *H. Grad. Commun. Pure Appl. Math., 2, No. 4 (331) 1949.*
3. А. Зоммерфельд. Теормодинамика и статистическая физика ИЛ., М. 1955 г.
4. Черников. ДАН СССР **112**, № 6 /1030/ 1957.
5. Н.А. Черников. ДАН СССР **114** № 3 /530/ 1957.
6. Н.А. Черников. Научные доклады высшей школы, физ-мат. науки № 1 /168/ 1959.
7. Н.А. Черников. ДАН СССР **133** № 1 /84/ 1960.
8. Н.А. Черников. ДАН СССР **133** № 2 1960.

9. Н.А. Черников. ДАН СССР 144 № 1 /89/ 1962.

10. Н.А. Черников. ДАН СССР 144 № 2 /314/ 1962.

11. Н.А. Черников. ДАН СССР 144 № 3 /544/ 1962.

12. Н.А. Черников. Релятивистский газ в гравитационном поле. Препринт ОИЯИ, Р-1028, Дубна, 1962 г.

13. Н.А. Черников. Релятивистское распределение газа. Препринт ОИЯИ Р-1159, Дубна, 1962 г.

14. Н.Н. Боголюбов. ЖЭТФ, 16, вып. 8 /691/ 1946.

15. Н.Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике, ГТТИ М-Л, 1946 г.

16. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред, ГИТТЛ. М. 1953 г.

17. А.З. Петров. Пространства Эйнштейна. Ф.М., М. 1961.

18. Д.Л. Синдж / *J.L.Synge* / Релятивистский газ. Атомиздат, М. 1960.

19. Т. Карлеман. Математические задачи кинетической теории газов. ИЛ М. 1960 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 апреля 1963 года.