ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Н.А. Черников

Р-1261

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ИЗ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дубна 1963 год

Н.А. Черников

Р-1261

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ИЗ РЕЛЯТИВИСТСКОГО КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Дубна 1963 год

Кинетическое уравнение Больцмана с учетом теории относительности и гравитации Эйнштейна получено и исследовано в работах[1]. Систематическое рассмотрение этой проблемы начато в работах[2-4]. Н.Н.Боголюбов[5] показал, как можно в нерелятивистском случае прийти к кинетическому уравнению, исходя из механики системы частиц, и тем самым установил определенное отношение кинетического уравнения к механике. Ввиду этого формулировка и исследование релятивистского кинетического уравнения представляют интерес и в связи с развитием релятивистской механики. В данной работе из релятивистского кинетического уравнения выводятся релятивистские гидродинамические уравнения диссипативных процессов, протекающих в газе. Последние были известны до сих пор лишь в чисто феноменологическом аспекте[6]. Здесь устанавливается в релятивистском случае неизвестная ранее зависимость коэффициентов теплопроводности и вязкости от дифференциального сечения взаимодействия частиц газа и от локальной температуры газа. Решение задачи достигается методом моментов, разработанным в нерелятивистском случае Градом[7]. Чтобы перенести метод моментов на релятивистский случай, потребовалось релятивистское обобщение полиномов Эрмита-Чебышева. Несколько первых таких полиномов приводится в данной работе. Предполагается, что все частицы газа одного сорта и что столкновения частиц упругие.

Обозначим

$$A^{a_1 \dots a_n}(x) = \int p^{a_1} \dots p^{a_n} A(x,p)\, dP, \tag{1}$$

$$I^{a_1 \dots a_n}(x) = \int p^{a_1} \dots p^{a_n} I(x,p)\, dP \tag{2}$$

- моменты относительно функции распределения газа $A(x,p)$ и интеграла столкновений $I(x,p)$. Из уравнения переноса[2] для функции $(\xi(x), p)^n$ следует уравнение моментов:

$$\nabla_a A^{a a_1 \dots a_n} = I^{a_1 \dots a_n}. \tag{3}$$

Первый момент $A^a(x)$ совпадает с вектором потока частиц газа. Второй момент $A^{a\beta}(x)$ совпадает с тензором энергии-импульса газа. В работе[2] доказано, что нулевой момент $I(x)$ и первый момент $I^\beta(x)$ равны нулю, а, следовательно,

$$\nabla_a A^a = 0, \qquad \nabla_a A^{a\beta} = 0. \tag{4}$$

Ввиду равенства $(p,p) = m^2 c^2$ моменты относительно $A(x,p)$ и $I(x,p)$, как и вообще относительно любой функции $B(x,p)$, обладают важным свойством

$$g_{\mu\nu} B^{\mu\nu a_1 \dots a_n} = m^2 c^2 B^{a_1 \dots a_n}. \tag{5}$$

В частности, если масса покоя m частицы газа равна нулю, то след любого момента равен нулю.

Квадратичная форма $A_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta}$ от ξ положительно определена. Следовательно, существует одна и только одна собственная прямая тензора энергии-импульса $(A_{\alpha\beta}\xi^{\beta}=\mu\xi_{\alpha})$, лежащая внутри светового конуса. Она определяет скорость $u(x)$ массы газа в точке x :

$$A_{\alpha\beta}u^{\beta}=\mu_{(0)}u_{\alpha}, \quad (u,u)=1, \quad u_0>0. \tag{6}$$

Собственное число $\mu_{(0)}$ положительно, остальные собственные числа $\mu_{(1)}, \mu_{(2)}, \mu_{(3)}$ отрицательны. Скаляр $\mu_{(0)}c^{-1}$ является плотностью массы газа в точке x. Скаляр

$$p(x)=\frac{c}{3}[\mu_{(0)}-m^2c^2A(x)]=-\frac{c}{3}[\mu_{(1)}+\mu_{(2)}+\mu_{(3)}] \tag{7}$$

является средним гидростатическим давлением газа в точке x.

Мы приходим к релятивистской гидродинамике без диссипативных процессов, полагая

$$A(x,p)=\frac{a(x)}{4\pi}e^{-(\lambda(x),p)} \tag{8}$$

и подставляя в (4) моменты относительно функции распределения (8).

Для учета диссипативных процессов, протекающих в газе, нужно воспользоваться более точным выражением для функции распределения:

$$A(x,p)=\frac{1}{4\pi}e^{-(\lambda,p)}\left\{a+\frac{a^{\alpha}H_{\alpha}}{\sqrt{(\lambda,\lambda)}}+\frac{a^{\alpha\beta}H_{\alpha\beta}}{2(\lambda,\lambda)}+\frac{b^{\alpha}H_{\alpha\beta}^{\beta}}{5\sqrt{(\lambda,\lambda)}}\right\}, \tag{9}$$

где

$$H_{\alpha}=h_{\alpha\mu}\xi^{\mu}, \qquad H_{\alpha\beta}=h_{\alpha\mu}h_{\beta\nu}\xi^{\mu}\xi^{\nu}-\xi_0 h_{\alpha\beta},$$
$$H_{\alpha\beta}^{\beta}=[5\xi_0-h_{\nu\rho}\xi^{\nu}\xi^{\rho}]h_{\alpha\mu}\xi^{\mu}, \qquad \xi^{\alpha}=\sqrt{(\lambda,\lambda)}p^{\alpha}, \tag{10}$$

$$h_{\alpha\beta}=u_{\alpha}u_{\beta}-g_{\alpha\beta}, \qquad \lambda^{\alpha}=\sqrt{(\lambda,\lambda)}u^{\alpha}. \tag{11}$$

Тензоры (10) представляют собой релятивистское обобщение полиномов Эрмита-Чебышева. Можно считать, что $a^{\alpha}u_{\alpha}=0$, $b^{\alpha}u_{\alpha}=0$, $a^{\alpha\beta}u_{\beta}=0$, $a^{\alpha\beta}=a^{\beta\alpha}$.

Условимся, что вектор $u(x)$ в (9)-(11) представляет скорость массы газа. Это означает, что он должен быть собственным вектором второго момента относительно функции (9). Отсюда следует $a^{\alpha}=b^{\alpha}$. Кроме того условимся, что среднее гидростатическое давление определяется уже локально-равновесной частью (8) суммы (9). Отсюда находим $h_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}=0$. Таким образом, в рассматриваемом приближении функция распределения газа задается тринадцатью компонентами: четырьмя компонентами вектора $\lambda(x)$, одной скалярной функцией $a(x)$, тремя независимыми компонентами вектора $a^{\alpha}(x)$ и пятью независимыми компонентами тензора $a^{\alpha\beta}(x)$.

Для их определения необходимы тринадцать уравнений моментов. Мы должны сохранить пять уравнений (4), означающих сохранение числа частиц, импульса и энергии. Чтобы установить дополнительные восемь уравнений, рассмотрим тензор $T^{\mu\nu}=\nabla_{\sigma}A^{\sigma\mu\nu}-I^{\mu\nu}$.

В силу равенства (5) и первого уравнения (4) его след равен нулю. Таким образом, тензор $T^{\mu\nu}$ имеет девять независимых компонент. Естественно отбросить уравнение $u_\mu u_\nu T^{\mu\nu}=0$ и не принимать его в расчет так же, как и все высшие уравнения моментов. Остаются 5+3 независимых уравнений:

$$[h_{\alpha\mu} h_{\beta\nu} - 1/3\ h_{\alpha\beta} h_{\mu\nu}][\nabla_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - I^{\mu\nu}] = 0, \quad h_{\alpha\mu} u_\nu [\nabla_\sigma A^{\sigma\mu\nu} - I^{\mu\nu}] = 0. \tag{12}$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (4) обобщают на релятивистский случай тринадцать уравнений Града. Мы рассмотрим эти уравнения в том плане, как это сделано в нерелятивистском случае в книге Зоммерфельда /8/, чтобы кратчайшим путем прийти к уравнениям релятивистской гидродинамики.

Обозначим

$$\Phi^{a_1 \dots a_n} = \frac{1}{4\pi} \int p^{a_1} \dots p^{a_n} e^{-(\lambda,\, p)}\, dP. \tag{13}$$

Моменты относительно функции (9) равны

$$A(x) = a\Phi, \qquad A^a(x) = a\Phi^a + \frac{m^4c^4}{\gamma^2} K_2(\gamma)\, a^a,$$
$$A^{\alpha\beta}(x) = a\Phi^{\alpha\beta} + \frac{m^6c^6}{\gamma^3} K_3(\gamma)\, a^{\alpha\beta}, \quad \gamma = mc\sqrt{(\lambda,\lambda)} = \frac{mc^2}{k\theta}, \tag{14}$$

θ – локальная температура, $K_n(\gamma)$ – цилиндрическая функция. Для третьего момента напишем приближенно $A^{\sigma\mu\nu} \approx a\,\Phi^{\sigma\mu\nu}$. Имеем

$$(h_{\alpha\mu} h_{\beta\nu} - 1/3\, h_{\alpha\beta} h_{\mu\nu})\, \nabla_\sigma a \Phi^{\sigma\mu\nu} = a \frac{m^5c^5}{\gamma^2} K_3(\gamma) \{ h^\mu_\alpha \nabla_\mu u_\beta + h^\mu_\beta \nabla_\mu u_\alpha - 2/3\, h_{\alpha\beta} \nabla_\mu u^\mu \} \tag{15}$$

$$h_{\alpha\mu} u_\nu \nabla_\sigma a \Phi^{\sigma\mu\nu} \approx \frac{m^5c^5}{\gamma^4} \frac{K_2(\gamma) K_2(\gamma)}{K_3(\gamma)} \frac{c_p}{k} h^\mu_\alpha \nabla_\mu a. \tag{16}$$

При выводе (16) использовано второе уравнение (4), c_p – теплоемкость газа при постоянном давлении, приходящаяся на одну частицу.

Квадратичный член $a(x)\, a(x)$ в интеграле столкновений исчезает. Пренебрегая членом, не содержащим $a(x)$, находим

$$I^{\alpha\beta} = aD[a^\alpha \lambda^\beta + a^\beta \lambda^\alpha] - a\, B\, a^{\alpha\beta}, \tag{17}$$

где

$$B = \frac{16}{15} \{ 40\, b(\theta) - 21\, \theta b'(\theta) + 3\theta^2 b''(\theta) \},$$
$$D = \frac{32}{15} \{ 20\, b(\theta) - 7\, \theta b'(\theta) + \theta^2 b''(\theta) \}, \tag{18}$$

$$b(\theta) = \int_0^\infty S(\rho)(\rho^2 + m^2c^2) \frac{K_3(2\gamma(\rho))}{[2\gamma(\rho)]^3}\, d\rho, \quad \gamma(\rho) = \sqrt{(\lambda,\lambda)}\ \sqrt{\rho^2 + m^2c^2}. \tag{19}$$

$S(\rho)$ выражается через дифференциальное сечение в системе центра инерции $\Delta\sigma = h(<p,q>, \cos\theta)\ \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ следующим образом:

$$S\left(\frac{<p,q>}{\sqrt{(p+q,\,p+q)}}\right) = 2\pi \int_0^{\pi} h(<p,q>, \cos\theta)\sin^3\theta\, d\theta, \tag{20}$$

$$<p,q> = \sqrt{(p,q)^2 - (p,p)(q,q)}.$$

Подставляя (15), (16) и (17) в (12), находим

$$a_{\alpha\beta} = -\frac{m^5 c^5}{\gamma^2 B} K_3(\gamma) \{ h^{\mu}_{\alpha} \nabla_{\mu} u_{\beta} + h^{\mu}_{\beta} \nabla_{\mu} u_{\alpha} - 2/3\, h_{\alpha\beta} \nabla_{\mu} u^{\mu} \}, \tag{21}$$

$$a_{\alpha} = -\frac{m^6 c^6}{\gamma^5 D} K_3(\gamma) \left[\frac{K_2(\gamma)}{K_3(\gamma)} \right]^2 \frac{c_p}{k} h^{\mu}_{\alpha} \nabla_{\mu} \ln a. \tag{22}$$

Выражения (21), (22) следует подставить в (14) и полученные таким образом A^{α} и $A^{\alpha\beta}$ подчинить уравнениям (4). В результате мы придем к релятивистским гидродинамическим уравнениям диссипативных процессов, протекающих в газе.

Коэффициент теплопроводности κ равен

$$\kappa = \frac{m^{10} c^{11}}{\gamma^5 D} K_2(\gamma) K_3(\gamma)\, c_p. \tag{23}$$

Коэффициент вязкости η равен

$$\eta = \frac{m^{11} c^{11}}{\gamma^5 B} K_3(\gamma) K_3(\gamma). \tag{24}$$

Второй коэффициент вязкости ζ равен нулю. В нерелятивистском пределе $\frac{\kappa}{\eta} = \frac{15k}{4m}$ независимо от вида дифференциального сечения. При постоянном дифференциальном сечении $h(<p,q>, \cos\theta) = \frac{\sigma}{4\pi}$ и при $m=0$ имеем

$$\kappa = \frac{3ck}{2\sigma}, \quad \eta = \frac{6}{5\sigma\sqrt{(\lambda,\lambda)}}, \quad \frac{\kappa}{\eta} = \frac{5c^2}{4\theta}. \tag{25}$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову за интерес к работе и ценные дискуссии.

Литература

1. Н.А.Черников. ДАН СССР, 112, № 6 (1030) 1957; 114, № 3 (530) 1957; 133, № 1 (84) 1960; 133, № 2 (333) 1960; 144, № 1 (89) 1962; 144, №2 (314) 1962; 144, № 3 (544) 1962. Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки № 1 (168) 1959.

2. Н.А.Черников. The Relativistic Gas in the Gravitational Field. Acta Physica Polonica, No. 5, 1963. Препринт ОИЯИ Р-1028, Дубна 1962.

3. Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ Р-1159, Дубна 1962 г.

4. Н.А.Черников. "Микроскопические обоснование релятивистской гидродинамики". Препринт ОИЯИ, Дубна 1963 (в печати).

5. Н.Н.Боголюбов. ЖЭТФ, 16, вып. 8 (691) 1946. Проблемы динамической теории в статистической физике, ГТТИ М-Л 1946 г.

6. Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред ГИТТЛ М.1953. А.З.Петров. Пространства Эйнштейна, ф.м. 1961 г.

7. H.Grad. Commun. pure appl. Math., 2, No. 4 (331) 1949.

8. А.Зоммерфельд. Термодинамика и статистическая физика. ИЛ.М. 1955.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 апреля 1963 года.