Р-125

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ, В.К.ФЕДЯНИН

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ФОТОНОВ НА НУКЛОНАХ

ДАН, 1958, т 119, № 4, с 690-693.

1957 год

Р-125

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

$\frac{2}{T\text{-}13}$

А.Н.ТАВХЕЛИДЗЕ, В.К.ФЕДЯНИН

ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ФОТОНОВ НА НУКЛОНАХ

1957 год

Изучение процесса рассеяния фотонов на нуклонах может дать важные сведения о мезонной структуре нуклона. В настоящей работе на основе дисперсионных соотношений для комптоновского рассеяния [I] получены приближенные уравнения для физических амплитуд.

I. <u>Кинетическое исследование амплитуды</u>. Обозначим начальные импульсы нуклона и фотона через P и K, конечные — через P' и K'. Из векторов P и K, P' и K', учитывая законы сохранения энергии-импульса $P + K = P' + K'$, можно построить два независимых скалярных произведения ν и ν_1 x):

$$\nu = (p + p') \cdot k \, , \quad \nu_1 = k \cdot k' \tag{I}$$

Из релятивистской инвариантности амплитуду процесса можно представить в следующем виде:

$$\hat{R} = \sum_i \sum_{\nu,\mu=0}^{3} \Omega_i(\nu, \nu_1)\,\bar{u}(p')\,\hat{R}^i_{\mu\nu}\,u(p)\,\ell'_\mu \ell_\nu \tag{2}$$

где ℓ_ν, ℓ'_μ — векторы поляризации начального и конечного фотона, $\bar{u}(p'), u(p)$ — спиноры, характеризующие нуклон в конечном и начальном состоянии, $\Omega_i(\nu, \nu_1)$ —инвариантные функции, обладающие только изотопической структурой, $\hat{R}^i_{\mu\nu}$ — операторы, содержащие спиновую структуру амплитуды процесса. Суммирование идет по всем независимым структурам $\hat{R}^i_{\mu\nu}$.

Из условий релятивистской и градиентной инвариантности можно найти число независимых структур $\hat{R}^i_{\mu\nu}$ и получить их явное выражение [2].

---

x) В системе $\vec{p} + \vec{p}' = 0$ энергия фотона $E = \frac{\nu}{2P_0}$, импульс отдачи $\vec{p}^2 = \frac{\nu_1}{2}$.

Представим матричный элемент процесса в следующем виде[x].

$$M = R\,\chi \tag{3}$$

χ - содержит операторы рождения и уничтожения частиц, а также возможные неквантованные внешние поля. R - составляется из 4-импульсов участвующих частиц и γ-матриц и, в свою очередь, может быть представлено следующим образом:

$$R = \sum_{e\,m} C_{em}(\Lambda_e T_m) \tag{4}$$

Здесь $\Lambda_{e=1} = 1$, $\Lambda_{e\neq 1} = (\gamma \cdot P_1), (\gamma \cdot P_2) \ldots$ ($P_1, P_2, \ldots$ -4 импульсы участвующих частиц). $\Lambda_{e\neq 1} = 0$, если в R не входят γ-матрицы. T составляются как все возможные н е з а в и с и м ы е комбинации γ-матриц и 4 - импульсов, незамкнутые по индексам суммирования:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta \cdots \gamma_\nu, \; \gamma_\beta \gamma_\alpha \cdots \gamma_\nu, \cdots, \; \gamma_\alpha \gamma_\beta \cdots P_{1\nu}, \cdots$$

Суммирование в (4) идет по всем возможным комбинациям $(\Lambda_e T_m)$. При конструировании Λ_e и T_m необходимо учитывать законы сохранения и уравнения движения участвующих частиц.

Для процессов, где участвует электромагнитное поле, (3) перепишется в виде:

$$M = \sum_\mu R_\mu A_\mu \chi', \quad \chi = A_\mu \chi'. \tag{5}$$

Из требования градиентной инвариантности

$$\sum_\mu i k_\mu R_\mu = 0 \tag{6}$$

Отсюда M может быть записан в виде

$$M = \sum_\mu R_\mu A_\mu(k)\chi' = \sum_{\mu\alpha} \left(\delta_{\mu\alpha} + \frac{i f_\mu}{(f \cdot k)} i k_\alpha\right) R_\alpha A_\mu(k) \chi' \tag{7}$$

---

x) Здесь мы следуем изложению M. Kawaguchi and N. Mugibayashi [2]

Здесь $\frac{i f_\mu}{(f k)}$ несингулярная функция, выбираемая произвольно. Если в M входят n операторов электромагнитного поля:

$$M = \sum_{\mu, \nu \ldots \omega} R_{\mu\nu\ldots\omega}(k_1 \ldots k_n) A_\mu(k_1) \ldots A_\omega(k_n) \chi^{(n)}, \tag{8}$$

то градиентная инвариантность

$$i k_\mu R_{\mu\nu\ldots\omega} = i k_\nu R_{\mu\nu\ldots\omega} = \ldots = i k_\omega R_{\mu\nu\ldots\omega} = 0 \tag{9}$$

дает с учетом (7) для M следующее выражение:

$$M = \sum_{\beta, \nu \ldots \omega} \sum_{\alpha, \beta \ldots \gamma} G_{\mu\alpha}(k_1) G_{\nu\beta}(k_2) \ldots G_{\omega\gamma}(k_n) R_{\alpha\beta\ldots\gamma}(k_1, k_2 \ldots k_n) \times \tag{10}$$

$$\times A_\mu(k_1) A_\nu(k_2) \ldots A_\omega(k_n) \chi^n$$

где

$$G_{\rho\xi}(k_j) = \left(\delta_{\rho\xi} + \frac{i f_{j\rho}}{(f_j k_j)} i k_{j\xi}\right) \tag{11}$$

j – номер частицы.

Таким образом, соображения градиентной инвариантности позволяют представить R в (4) в виде R'

$$R' = GR = G_1 \ldots G_n R = \sum_{e, m} C_{em} (\Lambda_e G T_m) = \sum_{e, m} C_{em} (\Lambda_e G_1 \ldots G_n T_m) \tag{12}$$

(Ясно, что $G_j = G_{\rho\xi}(k_j)$ действует на T_m по индексам ρ, ξ). Следовательно, если (4) раскладывалось по $N(\Lambda) N(T)$ независимым формам $(\Lambda_e T_m)$, $-N(\Lambda)$ число возможных Λ_e, $N(T)$ число возможных T_m – то (12) будет разложено по $N(\Lambda) \mathring{N}(GT)$ независимым формам. Ясно, что $N(GT) < N(T)$, так как в G входят произвольные функции f_j. См. (11).

Таким образом, R может быть разложено по $N(\Lambda)$ $N(GT)$ независимым инвариантным и градиентно-инвариантным формам, число которых определяется начальным и конечным состояниями процесса и не зависит ни от промежуточных состояний, ни от вида взаимодействия.

Применим эти соображения к комптон-эффекту. Если брать матричный элемент комптон-эффекта в виде

$$M = \sum_{\mu\nu} \bar{\Psi}(p') A_\mu(k') R_{\mu\nu}(k,k',p,p') A_\nu(k) \Psi(p) \tag{13}$$

то

$$R_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta} G_{\mu\alpha} G_{\nu\beta} R_{\alpha\beta} = \sum_{e,m,\alpha,\beta} C_{e,m} (\Lambda_e G_{\mu\alpha} G_{\nu\beta} T_{\alpha\beta m}) \tag{14}$$

а)

$$\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = i\gamma k \qquad N(\Lambda) = 2$$

γp, $\gamma p'$ — исключаются уравнениями движения

$\gamma \cdot k'$ законом сохранения $k' = k + p - p'$

б) из k, k', p, γ можно построить следующие независимые формы:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta, \; \gamma_\beta \gamma_\alpha, \; \gamma_\alpha k_\beta, \; \gamma_\beta k'_\alpha, \; \gamma_\beta p_\alpha, \; k_\alpha k'_\beta, \; k_\alpha p_\beta, \; k'_\beta p_\alpha \tag{15}$$

(p' выпадает из-за закона сохранения) $N(T_m) = 8$

Отсюда видим, что

$$N(\Lambda_e) \cdot N(T_m) = 2 \times 8 = 16$$

Учтем градиентную инвариантность M : выбирая $f_\mu = p_\mu$, $f_\nu = p_\nu$ и пользуясь (11),(13),(14),(15) немедленно получаем, что $\gamma_\beta p_\alpha$; $k_\alpha p_\beta$; $k'_\beta p_\alpha$ впадают,

т.е. $N(GT) = 5$.

Итак , соображения градиентной инвариантности уменьшают число независимых форм до десяти $N(\Lambda)\cdot N(GT)=2\times 5=10$. Если учесть инвариантность амплитуды относительно временного отражения, то это число сокращается до шести. В качестве шести независимых структур мы выбираем следующие выражения:

$$\hat{R}_1=\frac{1}{p\cdot k\, p\cdot k'}\left\{e\cdot e'\, p\cdot k\, p\cdot k'+(e\cdot p'\, e'\cdot p\, p\cdot k-e'\cdot p'\, e\cdot p\, p'\cdot k)\right\}$$

$$\hat{R}_2=\frac{(k\cdot k')^{\frac{1}{2}}}{p\cdot k\, p\cdot k'}\left\{\hat{e}'(e\cdot p'\, p\cdot k-e\cdot p\, p'\cdot k)+\hat{e}(e'\cdot p\, p'\cdot k'-e'\cdot p'\, p\cdot k')\right\}$$

$$\hat{R}_3=\frac{1}{(k\cdot k')^{1/2}}\left\{\hat{e}'(\hat{k}+\hat{k}')\hat{e}-\hat{e}(\hat{k}+\hat{k}')\hat{e}'\right\}$$

$$\hat{R}_4=\frac{1}{p\cdot k\, p\cdot k'}\left\{\hat{e}'\,\hat{k}'(e\cdot p'\, p\cdot k-e\cdot p\, p'\cdot k)+\hat{e}\,\hat{k}(e'\cdot p'\, p\cdot k'-e'\cdot p\, p'\cdot k')\right\}$$

$$\hat{R}_5=\frac{(k\cdot k')^{1/2}}{p\cdot k\, p\cdot k'}\left\{\hat{e}'(\hat{k}+\hat{k}')\hat{e}\, p\cdot k'+\hat{e}(\hat{k}+\hat{k}')\hat{e}'\, p\cdot k\right\}-2\hat{R}_2 \tag{I6}$$

$$\hat{R}_6=\frac{(k\cdot k')^{-1/2}}{p\cdot k\, p\cdot k'}\left\{2(\hat{k}+\hat{k}')(e\cdot p'\, p\cdot k\, e'\cdot p+e\cdot p\, e'\cdot p\, p\cdot k')-\right.$$

$$\left.-2p\cdot k\, p\cdot k'\left[\hat{e}'(e\cdot p'+e\cdot p)+\hat{e}(e'\cdot p+e'\cdot p')\right]\right\}+\hat{R}_3$$

$$a\cdot b=a_0b_0-\vec{a}\,\vec{b}\qquad \hat{a}=a_0\gamma_0-\vec{a}\,\vec{\gamma}\;.$$

$$\hat{R}_i=\sum_{\mu\nu}e'_\mu\,\hat{R}^i_{\mu\nu}e_\nu \tag{I7}$$

Установим некоторые свойства симметрии функций.

С помощью формализма S-матрицы, матричный элемент комптоновского рассеяния может быть записан в следующем виде[I]:

а) $$\langle \gamma' | S | \gamma \rangle = \frac{i}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \int e^{i(k'x-ky)} \langle \phi_{p'} | \frac{\delta j_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} | \phi_p \rangle dx dy \tag{I8}$$

б) $$\langle \gamma' | S | \gamma \rangle = i \frac{(2\pi)}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \delta(p+k-p'-k') R$$

где $A_\mu(x)$ - оператор электромагнитного поля,

а) $|\phi_p\rangle$ - вектор состояния нуклона

$$j_\nu(y) = i \frac{\delta S}{\delta A_\mu(y)} S^+ \tag{I9}$$

Из (I8) можно установить, что

$$R(p,k,p',k') = R^*(p',-k,p,-k') \tag{20}$$

Действительно:

$$\left[\frac{i}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \int e^{i(k'x-ky)} \langle \phi_{p'} | \frac{\delta j_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} | \phi_p \rangle dx dy\right]^* =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \int e^{-i(k'x-ky)} \langle \phi_p | \frac{\delta j_\nu^+(y)}{\delta A_\mu(x)} | \phi_{p'} \rangle dx dy$$

$$j_\nu^+(y) = -i S \frac{\delta S^+}{\delta A_\mu(y)}$$ Но так как $SS^+ = I$, то

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu(y)} S^+ + S \frac{\delta S^+}{\delta A_\mu(y)} = 0$$ и $j_\nu^+(y) = j_\nu(y)$.

Следовательно

$$\left[\langle \gamma' | S | \gamma \rangle\right]^* = -\frac{i}{\sqrt{4k_0 k_0'}} \int e^{-i(k'x-ky)} dx\,dy \langle \Phi_p | \frac{\delta j_\nu(y)}{\delta A_\mu(x)} | \Phi_{p'} \rangle$$

Отсюда непосредственно видно, что

$$\left[\langle \gamma' | S | \gamma \rangle\right]^*_{p \rightleftarrows p',\, k \to -k,\, k' \to -k'} = -\langle \gamma' | S | \gamma \rangle$$

И сравнивая с (I8), немедленно получаем (20). Подставляя (I6) в (2) и учитывая (20), получим следующее важное свойство $\Omega_i(\nu, \nu_1)$

$$\Omega_i(\nu, \nu_1) = \Omega_i^*(-\nu, \nu_1)$$

или

$$\operatorname{Re}\Omega_i(\nu, \nu_1) = \operatorname{Re}\Omega_i(-\nu, \nu_1) \tag{21}$$

$$\operatorname{Im}\Omega_i(\nu, \nu_1) = -\operatorname{Im}\Omega_i(-\nu, \nu_1)$$

Изотопическая зависимость Ω_i очевидна

$$\Omega_i = \Omega_i^1 + \Omega_i^2 \tau_3 =$$

$$= \Omega_i^{(p)} \frac{1+\tau_3}{2} + \Omega_i^{(n)} \frac{1-\tau_3}{2} \tag{22}$$

где $\Omega_i^{(p)}$ описывает рассеяние на протоне $\Omega_i^{(n)}$ на нейтроне.

2. Дисперсионные соотношения для релятивистских амплитуд Ω_i.

Используя свойство аналогичности функций Ω_i; в верхней полуплоскости переменной ν[3] имеем

$$\mathrm{Re}\,\Omega_i(\nu,\nu_1)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,\Omega_i(\nu',\nu_1)}{\nu'-\nu}d\nu' \qquad (23)$$

Область отрицательных ν в (23) можно исключить с помощью (2I). Метод исключения области $0<\nu<2M\mu+\mu^2-2\nu_1$ для амплитуды R дан в работе (I). См.также [4], [5.] В этой области эрмитова часть амплитуды R, D запишется в следующем виде

$$D=\sum_i\bar{u}(p')\hat{R}_i u(p)\Omega_i^0=-\bar{u}(p')\Big\{4(\hat{\mu}^2M+\hat{\mu}e\tau_p)R_1+$$

$$+(2\hat{\mu}^2M+\hat{\mu}e\tau_p)\hat{R}_4+\frac{1}{4\nu_1^{1/2}}(2\hat{\mu}M+e\tau_p)^2\hat{R}_5+\frac{\nu_1^{1/2}}{2}\hat{\mu}^2\hat{R}_6\Big\}u(p) \qquad (24)$$

$$\tau_p=\frac{1+\tau_3}{2},\quad \tau_n=\frac{1-\tau_3}{2}\qquad \hat{\mu}=\mu_p'\tau_p+\mu_n\tau_n$$

где μ_p' и μ_n - аномальные магнитные моменты протона и нейтрона. С учетом (2I) и (24), (23) запишется следующим образом

$$\mathrm{Re}\,\Omega_i(\nu,\nu_1)=\Omega_i^0+\frac{1}{\pi}P\int_{2M\mu+\mu^2-2\nu_1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu'-\nu}+\frac{1}{\nu'+\nu}\right)\mathrm{Im}\,\Omega_i(\nu',\nu_1)d\nu'. \qquad (25)$$

3. Дисперсионные соотношения для физических амплитуд M_i

Получение дисперсионных соотношений для релятивистских амплитуд Ω_i; является промежуточным этапом. С целью получения дисперсионных соотношений для физических амплитуд $\hat{M}_i\ (\nu,\nu_2\ )$

представим амплитуду комптоновского рассеяния разложенной по трехмерным структурам $\hat{r}_i$ (все выкладки в дальнейшем ведутся в системе центра масс):

$$\hat{R} = \sum_{i=1} M_i(\nu,\nu_1)\, r_i \qquad (26)$$

где

$$\hat{r}_1 = i[\bar{\sigma}(\vec{e}\times\vec{n})\bar{e}'\cdot\bar{n} - \sigma(\bar{e}'\times\bar{n}')\bar{e}\cdot\bar{n}'], \quad \hat{r}_2 = \bar{e}\cdot\bar{n}'\;\bar{e}'\cdot\bar{n}$$

$$\hat{r}_3 = i\bar{\sigma}(\bar{e}'\times\bar{n}')\times(\bar{e}\times\bar{n}), \qquad \hat{r}_4 = i\bar{\sigma}(\bar{n}'\times\bar{n})\bar{e}'\cdot\bar{e}$$

$$\hat{r}_5 = i\bar{\sigma}(\bar{e}\times\bar{e}'), \quad \hat{r}_6 = \bar{e}\cdot\bar{e}' \qquad \bar{n} = \frac{\bar{k}}{k_0}, \quad \bar{n}' = \frac{\bar{k}'}{k_0}$$

Заметим, что $\bar{U}(p')\hat{R}_i\, U(p) = R_i$ разлагаются по r_i следующим образом:

$$\bar{R}_1 = \frac{N^2(pn)}{p\cdot n\, p'n}\left\{\hat{r}_2 + p'n\delta^2\hat{r}_4 - p'n(1-\bar{n}\bar{n}'\delta^2)\,\hat{r}_6 - \delta^2\hat{r}_7\right\}$$

$$\bar{R}_2 = \frac{N^2(nn')^{1/2}}{p'n}\,\delta\left\{\hat{r}_1 + 2\hat{r}_2 - \hat{r}_8\right\}$$

$$\bar{R}_3 = \frac{N^2}{(nn')^{1/2}}\left\{2\delta\,\hat{r}_1 - 4\delta^2\hat{r}_2 + 4\delta\beta\,\hat{r}_3 - 4\delta\beta\,\hat{r}_4 - 4\beta\,\hat{r}_5 - 2\delta\,\hat{r}_8\right\}$$

$$\bar{R}_4 = \frac{N^2\beta}{p'n}\left\{\hat{r}_1 - 2\delta\,\hat{r}_2 + \delta\hat{r}_8\right\}$$

$$\bar{R}_5 = \frac{N^2(n\cdot n')^{1/2}}{p\cdot n\; p'\cdot n}\Big\{-4\delta(p\cdot n)\,\hat{r}_1 + 2\delta(\beta nn' - 4pn)\,\hat{r}_2 - 2\delta\beta nn'\hat{r}_3 + 4\delta\beta(p.n)\,\hat{r}_4$$
$$+ 2\beta nn'\hat{r}_5 + 2\beta(p+p'_1 n)(1+\bar{n}\bar{n}'\delta)\hat{r}_6 + 4\delta p.n\,\hat{r}_8\Big\}$$

$$\bar{R}_6 = \frac{N^2 4\beta}{p'n(n\cdot n')^{1/2}}\left\{(1-\delta p'n)\,\hat{r}_2 + \delta p'n\,\hat{r}_3 - \delta p'n\,\hat{r}_4 - p'n\,\hat{r}_5 + \delta\hat{r}_7\right\}$$

$$\hat{r}_7=\hat{r}_1+\bar{n}\cdot\bar{n}'\hat{r}_2-\bar{n}\cdot\bar{n}'\hat{r}_3+\bar{n}\cdot\bar{n}'\hat{r}_4-\hat{r}_5,\quad \hat{r}_8=\hat{r}_3-\hat{r}_4+\bar{n}\,\bar{n}'\,\hat{r}_5,$$

$$\delta=\frac{k_0}{E+M},\quad \beta=1+\delta,\quad pn=1+\frac{E}{k_0},\quad n\cdot n'=1-\bar{n}\cdot\bar{n}'$$

$$p'n=\frac{E}{k_0}+\bar{n}\,\bar{n}',\qquad N^2=\frac{E+M}{2E}$$

Подставляя (27) в (2) и сравнивая с (26), установим связь между M_i и Ω_i :

$$M_i(v,v_1)=\sum_k c_{ik}(v,v_1)\Omega_k(v,v_1) \tag{28}$$

$$M_1=\frac{N^2\delta}{p'n}\left\{-\delta\Omega_1+(n\cdot n')^{\frac{1}{2}}\Omega_2+2\frac{p'n}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_3+\frac{\beta}{\delta}\Omega_4-4(n\cdot n')^{\frac{1}{2}}\Omega_5+\frac{4\beta}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_6\right\}$$

$$M_2=\frac{N^2\delta}{p'n}\left\{\frac{1-\delta^2+\delta^2 nn'}{\delta}\Omega_1+2(n\cdot n')^{1/2}\Omega_2-4\delta\frac{p'n}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_3-2\beta\Omega_4+\right.$$
$$\left.+\frac{2(n\cdot n')^{1/2}(\beta nn'-4p\cdot n)}{p\cdot n}\Omega_5+\frac{4\beta}{\delta}\frac{(\beta-\delta pn)}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_6\right\}$$

$$M_3=\frac{N^2\delta}{p'n}\left\{\delta(1-n\cdot n')\Omega_1-(n\cdot n')^{1/2}\Omega_2+\frac{2(1+2\delta)p'n}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_3+\beta\Omega_4+\right.$$
$$\left.+\frac{2(n\cdot n')^{1/2}(-\beta n\cdot n'+2pn)}{p\cdot n}\Omega_5+\frac{4\beta(pn-1)}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_6\right\}$$

$$M_4=\frac{N^2\delta}{p'n}\left\{\delta(pn+1)\Omega_1+(n\cdot n')^{1/2}\Omega_2-2(1+2\delta)\frac{p'n}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_3-\beta\Omega_4+\right.$$
$$\left.+4\delta(n\cdot n')^{\frac{1}{2}}\Omega_5+\frac{4\beta(-pn+1)}{(nn')^{1/2}}\Omega_6\right\}$$

$$M_5=\frac{N^2\delta}{p'n}\left\{\delta\Omega_1-(1-n\cdot n')(n\cdot n')^{\frac{1}{2}}\Omega_2-\frac{2(2+3\delta-\delta n\cdot n')}{\delta}\frac{p'n}{(nn')^{1/2}}\Omega_3+\right.$$

$$+\beta(1-n\cdot n')\Omega_4-\frac{4\beta}{\delta}\frac{(\delta+p'n)}{(n\cdot n')^{1/2}}\Omega_6+\frac{2(n\cdot n')^{1/2}(\beta nn'+2\delta pn\bar{n}\bar{n}')}{pn\delta}\Omega_5\Big]$$

$$M_6=N^2\left\{-(1-\delta^2+\delta^2nn')\Omega_1+\frac{2\beta(n\cdot n')^{1/2}(\beta-\delta nn')(p+p'_1n)}{p\cdot n\, p'n}\Omega_5\right\}.$$

Можно получить и обратные соотношения

$$\Omega_i(\nu,\nu_1)=\sum_e B_{ie}(\nu,\nu_1)M_e(\nu,\nu_1)\qquad \Omega_1=\frac{1}{N^2\delta\beta}\left\{(\beta-\delta n\cdot n')(M_3+M_4)-\delta M_6\right\}\tag{29}$$

$$\Omega_2=\frac{p'n}{2N^2\beta(n\cdot n')^{1/2}}\left\{2M_1+\left[\frac{\beta+2\delta^2-pn\delta}{1-\delta^2}n\cdot n'+\frac{Pn-2\beta}{1-\delta}\right]M_2+\left[\frac{2p\cdot n}{p+p'_1n}\frac{1-\delta^2+2\delta^2pn}{\delta\beta}+\right.\right.$$

$$+\frac{Pn}{p'n}\frac{Pn\delta-\beta}{\delta\beta}\left(1-\frac{(Pn-2\beta)(Pn\delta-\beta)}{pn(1-\delta)}+\frac{\beta+2\delta^2-pn\delta}{1-\delta^2}-\frac{Pn(\beta+2\delta-pn\delta)}{1-\delta^2}\right]M_3+$$

$$+\left[\frac{2Pn}{p+p'_1n}\frac{1-\delta^2+2\delta^2pn}{\delta\beta}+\frac{Pn}{p'n}\frac{Pn\delta-\beta}{\delta\beta}\left(1-\frac{(Pn-2\beta)(Pn\delta-\beta)}{pn(1-\delta)}+\frac{2\beta}{\delta}\frac{\beta+2\delta^2-pn\delta}{1-\delta^2}-\right.\right.$$

$$-\frac{Pn(\beta+2\delta-pn\delta)}{1-\delta^2}-\frac{\beta+2\delta^2-pn\delta}{1-\delta^2}n\cdot n'\Big]M_4-\frac{\beta+2\delta^2-pn\delta}{1-\delta^2}M_5+\left[\frac{2pn}{p+p'_1n}\frac{\delta}{\beta}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{Pn}{p'n}\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{(Pn-2\beta)(Pn\delta-\beta)}{pn(1-\delta)}-\frac{\beta+2\delta^2-pn\delta}{1-\delta^2}\right]M_6\right\}$$

$$\Omega_3=\frac{(n\cdot n')^{1/2}}{4N^2\beta}\left\{\left[\frac{1-\delta+pn\delta}{1-\delta^2}n\cdot n'-\frac{Pn}{1-\delta}\right]M_2+\left[\frac{2Pn}{p+p'_1n}\frac{1-\delta^2+2\delta^2pn}{\delta\beta}+\frac{Pn}{p'n}\frac{(Pn-2)(Pn\delta-\beta)}{1-\delta^2}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\delta+pn\delta}{1-\delta^2}+\frac{Pn(-\beta+2\delta^2-pn\delta)}{1-\delta^2}\right]M_3+\left[\frac{2pn}{p+p'_1n}\frac{1-\delta^2+2\delta^2pn}{\delta\beta}+\frac{pn}{p'n}\cdot\frac{Pn-2}{1-\delta^2}\right.$$

$$\left.\cdot(pn\delta-\beta)-\frac{1-\delta+pn\delta}{1-\delta^2}n\cdot n'+\frac{Pn(\beta+2\delta^2-pn\delta)}{1-\delta^2}\right]M_4-\frac{1-\delta+pn\delta}{1-\delta^2}M_5+$$

$$\left.+\left[\frac{2pn}{p+p'_1n}\frac{\delta}{\beta}+\frac{Pn\delta(Pn-2)}{p'n(1-\delta^2)}-\frac{1-\delta+pn\delta}{1-\delta^2}\right]M_6\right\}.$$

$$\Omega_4 = \frac{1}{N^2\beta^3}\Big\{\beta p'_{} n M_1 - \delta p' n n' M_2 + [pn - \delta p n n n' + \delta n n'] M_3 +$$

$$+ n\cdot n'(\beta - \delta n\cdot n') M_4 + \delta p' n M_5 - \delta n n' M_6\Big\}$$

$$\Omega_5 = \frac{p n \overset{\circ}{p}{}' n}{2N^2\delta\beta^2 (n\cdot n')^{1/2}(p + p'_{,} n)}\Big\{(1 - \delta^2 \bar{n}\bar{n}')(M_3 + M_4) + \delta^2 M_6\Big\}$$

$$\Omega_6 = \frac{(n\cdot n')^{1/2}}{4N^2\beta^2(1-\delta)}\Big\{p' n(\beta - \delta n\cdot n') M_2 + \Big[\delta(\delta - pn) n\cdot n' + pn(2+\delta) - \frac{\beta}{\delta}(1+\delta^2)\Big] M_3$$

$$+ (\delta n n' - 1 - \delta^2)\frac{\beta - \delta n n'}{\delta} M_4 + \delta p' n M_5 - (\delta n n' - 1 - \delta^2) M_6\Big\}.$$

Учитывая (25), (28) и (29), можно написать дисперсионные соотношения для физических амплитуд M_i **:**

$$\mathrm{Re}\, M_i(\nu, \nu_1) = \sum_j c_{ij}(\nu, \nu_1)\Omega_j^0 + \frac{1}{\pi} P \int_{2M\mu + \mu^2 - 2\nu_1}^{\infty} d\nu' \, \frac{2\nu' \, \mathrm{Im}\, M_k(\nu', \nu_1)}{\nu'^2 - \nu^2} c_{ij}(\nu, \nu_1) b_{jk}(\nu', \nu_2) \qquad (30)$$

Из-за громоздкости матриц $C_{ik}, \ b_{ik}$ **формулы (30) явно не выписываются. Однако, в области энергий, где можно пренебречь членами порядка** $\left(\frac{k_0}{M}\right)^2$ **матрицы** $C_{ik}, \ b_{ik}$ **упрощаются и, удерживая главные члены разложения, получаем следующие приближенные уравнения для физических амплитуд.**

$$\mathrm{Re}\, M_1 = \frac{\omega}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' + \omega} \overset{f(\omega';\omega)}{\Big\{} \frac{2\,\mathrm{Im}\, M_1}{\omega' - \omega} + \frac{\mathrm{Im}\, M_2 - 2\,\mathrm{Im}\, M_4}{\omega'} + \Big[\Big(1 + 2\frac{\nu_1}{\omega\omega'}\Big)\frac{\mathrm{Im}\, M_1}{M} -$$

$$-\Big(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{3}{4}\frac{\nu_1}{\omega'^2} - \frac{\nu_1}{2\omega\omega'}\Big)\frac{\mathrm{Im}\, M_2}{M} - \frac{3}{4}\Big(1 + \frac{\nu_1}{3\omega'^2}\Big)\frac{\mathrm{Im}\, M_3}{M} + \Big(1 + 2\frac{\omega}{\omega'\omega'} - \frac{\nu_1}{\omega\omega'} + \frac{\nu_1}{2\omega'^2}\Big)\frac{\mathrm{Im}\, M_4}{M}$$

$$+ \frac{3\,\mathrm{Im}\, M_5 + 2\,\mathrm{Im}\, M_6}{4M}\Big]\Big\} + 2\omega\hat{\mu}_5(\hat{\mu} + \hat{\mu}_5)$$

$$\mathrm{Re}\,M_2=\frac{\omega}{\pi}P\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{\omega'-\omega}+\frac{2\,\mathrm{Im}\,M_4}{\omega'+\omega}+\frac{\omega'}{\omega'+\omega}\left[\frac{2\,\mathrm{Im}\,M_1}{M}+\frac{\nu_1}{\omega\omega'}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{M}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{2}+\frac{\nu_1}{\omega\omega'}+\frac{\nu_1}{2\omega'^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_3}{M}+2\left(1-\frac{\nu_1}{\omega'^2}+\frac{3}{2}\frac{\nu_1}{\omega\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_4}{M}-\frac{\mathrm{Im}\,M_5+2\,\mathrm{Im}\,M_6}{2M}\right]\right\}\rho(\omega';\omega)$$

$$+4\omega\hat{\mu}_5^2$$

$$\mathrm{Re}\,M_3=\frac{\omega}{\pi}P\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'+\omega}\rho(\omega';\omega)\left\{\frac{2\,\mathrm{Im}\,M_3}{\omega'-\omega}+\frac{-\mathrm{Im}\,M_2+2\,\mathrm{Im}\,M_4}{\omega'}+\left[-\frac{\mathrm{Im}\,M_1}{M}+\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{3}{4}\frac{\nu_1}{\omega'^2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\nu_1}{2\omega\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{M}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{\nu_1}{\omega'^2}+4\frac{\nu_1}{\omega\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_3}{M}-\left(1+2\frac{\omega}{\omega'}+\frac{3}{4}\frac{\nu_1}{\omega'^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_4}{M}+$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{Im}\,M_5-2\,\mathrm{Im}\,M_6}{4M}\right]\right\}-2\omega(\hat{\mu}+\hat{\mu}_5)^2$$

$$\mathrm{Re}\,M_4=\frac{\omega}{\pi}P\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,M_4}{\omega'-\omega}+\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{2(\omega'+\omega)}+\frac{\omega'}{\omega'+\omega}\left[\frac{\mathrm{Im}\,M_1}{M}-\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{3}{4}\frac{\nu_1}{\omega'^2}-\frac{\nu_1}{2\omega\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{M}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}\left(1-\frac{\nu_1}{\omega'^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_3}{M}+\left(1+2\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\nu_1}{\omega\omega'}+\frac{3}{2}\frac{\nu_1}{\omega'^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_4}{M}-\frac{\mathrm{Im}\,M_5-2\,\mathrm{Im}\,M_6}{4M}\right]\right\}\rho(\omega';\omega)$$

$$\mathrm{Re}\,M_5=\frac{\omega}{\pi}P\int_{\mu}^{\infty}\frac{d\omega'}{\omega'+\omega}\left\{\frac{2\,\mathrm{Im}\,M_5}{\omega'-\omega}-\left(1-\frac{\nu_1}{\omega^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{2\omega'}-\left(1+\frac{\nu_1}{\omega^2}+\frac{\nu_1}{\omega\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_4}{\omega'}+\right.$$

$$+\left[-\frac{\mathrm{Im}\,M_1}{M}+\left(\frac{\omega}{\omega'}-\frac{3}{2}\frac{\nu_1}{\omega\omega'}+\frac{3}{4}\frac{\nu_1}{\omega'^2}+\frac{\nu_1^2}{2\omega'\omega^3}+\frac{\nu_1^2}{4\omega^2\omega'^2}+\frac{\nu_1^2}{\omega\omega'^3}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_2}{M}+\right.$$

$$+\left(\frac{7}{4}+\frac{\nu_1}{4\omega^2}+\frac{\nu_1}{4\omega'^2}-\frac{\nu_1^2}{4\omega^2\omega'^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_3}{M}-\left(1+2\frac{\omega}{\omega'}-\frac{\nu_1}{\omega^2}-\frac{\nu_1}{2\omega'^2}-\frac{\nu_1^2}{\omega'\omega^3}+\frac{\nu_1^2}{2\omega^2\omega'^2}+\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\nu_1^2}{\omega\omega'^3}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_4}{M}-\left(\frac{7}{4}+\frac{\nu_1}{4\omega^2}+\frac{\nu_1}{\omega\omega'}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_5}{M}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu_1}{\omega^2}\right)\frac{\mathrm{Im}\,M_6}{M}\right]\right\}\rho(\omega';\omega) \qquad (31)$$

$$-2\omega\hat{\mu}_5(2\hat{\mu}+\hat{\mu}_5)$$

$$\operatorname{Re} M_6 = \frac{1}{\pi} P \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \left\{ \frac{2\omega'}{\omega'^2-\omega^2} \operatorname{Im} M_6 + \frac{\nu_1^2}{\omega'^2\omega^2} \underbrace{\frac{\operatorname{Im}(M_3+M_4)}{M}}_{} \right\} - \frac{e^2}{M}$$

$f(\omega',\omega)$

$$\hat{\mu}_5 = \frac{e}{2M}\tau_p \text{ — магнетон Бора.} \qquad f(\omega',\omega) = \left(1+\frac{\omega'-\omega}{\omega'+\omega}\right)\frac{\nu_1}{2M\omega'} - \frac{2\omega'^2}{M(\omega'+\omega)}$$

4. __Условие унитарности.__ Дисперсионные соотношения (30), (31) связывают эрмитову и антиэрмитову часть амплитуды реакции. Условие унитарности $S^+S = I$, записанное в одномезонном приближении, позволяет нам выразить антиэрмитову часть комптоновского рассеяния через амплитуды фоторождения. (Отметим, что одномезонное рассмотрение целиком оправдано в интервале $\mu < \omega < 2\mu$ [1]. Для $\omega > 2\mu$ оно может рассматриваться только как приближение). В итоге (30) и (32) приобретают смысл уравнений. Из $S^+S = I$ и $S = 1 + R$ в одномезонном приближении имеем

$$\langle\gamma'|R^+|\gamma\rangle + \langle\gamma'|R|\gamma\rangle = -\int \frac{d\bar{q}\,d\bar{p}''}{(2\pi)^6} \langle\gamma'|R^+|\pi\rangle\langle\pi|R|\gamma\rangle \tag{32}$$

$|\pi\rangle$ характеризует нуклон и мезон в промежуточном состоянии с импульсами p'' и q и прочими квантовыми числами.

Учитывая (18 $\frac{\delta}{}$) и определение амплитуды фоторождения [4],

$$\langle\pi|R|\gamma\rangle = i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{4K_0q_0}}\delta(k+p-p''-q)T \tag{33}$$

где

$$T = i\bar{\sigma}\bar{e}F_1 + \bar{\sigma}\cdot\bar{m}\,\bar{\sigma}(\bar{n}\times\bar{e})F_2 + i\bar{\sigma}\cdot\bar{n}\,\bar{e}\cdot\bar{m}F_3 + i\bar{\sigma}\cdot\bar{m}\,\bar{e}\,\bar{m}F_4$$

$$\bar{m} = \vec{q}/|\vec{q}|$$

после простых вычислений получим связь между $\operatorname{Im} M_i$ и F_i

$$\operatorname{Im} M_2 = (4\pi)^{-2}\lambda \int d\Omega \left\{ \frac{m_x}{n'_x}F_{12} + \beta F_{21} + \frac{m_x}{n'_x}F_{13} + \beta F_{31} \right.$$

$$- F_{22} + \frac{n'^2_z m_y^2 - m_x^2}{n'^2_x}F_{23} + (\alpha n'_z - \beta m_z)F_{32} + \alpha\Big[F_{14} + F_{41} +$$

$$\left. + n'_z F_{33} + \bar{n}'\cdot\bar{m}F_{34} + \bar{n}\cdot\bar{m}F_{43} + F_{44}\Big]\right\}.$$

$$\operatorname{Im} M_6 = (4\pi)^{-2}\lambda\int d\Omega\Big\{F_{11} - \bar{n}\cdot\bar{m}F_{12} - \bar{n}'\cdot\bar{m}F_{21} + n'_z F_{22} + m_y^2\big[F_{14} + F_{41} + n'_z F_{23} + n'_z F_{32} + n'_z F_{33} + \bar{n}'\cdot\bar{m}F_{34} + \bar{n}\cdot\bar{m}F_{43} + F_{44}\big]\Big\}$$

$$\operatorname{Im} M_1 n_x'^2 - \operatorname{Im} M_3 n'_z + \operatorname{Im} M_5 = (4\pi)^{-2}\lambda\int d\Omega\Big\{-F_{11} + \bar{n}\cdot\bar{m}F_{22} + \bar{n}'\cdot\bar{m}F_{21} - m_x^2 F_{14} - m_y^2 F_{41} - n'_z F_{22} + n'_x m_x\beta F_{23} - n'_z m_y^2 F_{32} + n'_x m_x F_{24} + n'_x m_x m_y^2 F_{34}\Big\}$$

$$\operatorname{Im} M_3 - n'_z \operatorname{Im} M_5 = (4\pi)^{-2}\lambda\int d\Omega\Big\{n'_z F_{11} - \bar{n}'\cdot\bar{m}F_{12} - \bar{n}\cdot\bar{m}F_{21} + n'_z m_y^2 F_{14} - n'_x m_x\beta F_{41} + F_{22} + m_y^2 F_{23} + n_x'^2\beta^2 F_{32} - n_x'^2\beta F_{31} - \beta n_x'^2 m_y^2 F_{34}\Big\}$$

$$2\operatorname{Im} M_1 + n'_z \operatorname{Im} M_3 + \operatorname{Im} M_5 = (4\pi)^{-2}\lambda\int d\Omega\Big\{-F_{11} + \Big(\beta - m_x\frac{n'_z}{n'_x}\Big)F_{12} - \Big(\beta n'_z - \frac{m_x}{n'_x}\Big)F_{21} - m_x\frac{n'_z}{n'_x}F_{13} - \beta n'_z F_{31} - \bar{n}'\cdot\bar{m}\frac{m_x}{n'_x}F_{14} - \bar{n}\cdot m\beta F_{41} + n'_z F_{22} + \Big(n'_z m_y^2 + \bar{n}\cdot\bar{m}\frac{m_x}{n'_x}\Big)F_{23} + \Big(n'_z m_y^2 + \beta\bar{n}'\cdot\bar{m}\Big)F_{32} + \frac{m_x}{n'_x}F_{24} + \beta F_{42} + \alpha n_x'^2 F_{33} + \alpha n_x'^2\Big(\beta F_{34} + \frac{m_x}{n'_x}F_{43}\Big)\Big\}$$

$$\operatorname{Im}(M_3 + M_4) = (4\pi)^{-2}\lambda\int d\Omega\Big\{-\frac{m_x}{n'_x}F_{12} - \beta F_{21} + F_{22} + m_y^2(F_{23} + F_{32}) + m_y^2 F_{33} + m_y^2\Big(\beta F_{34} + \frac{m_x}{n'_x}F_{43}\Big)\Big\}$$

Здесь $n'_x = \sin\theta,\ n'_z = \bar{n}\cdot\bar{n}' = \cos\theta,\ m_x = \sin\theta'\cos\varphi',$

$m_y = \sin\theta'\sin\varphi',\ m_z = \bar{n}\cdot\bar{m} = \cos\theta',\ \bar{n}'m = \cos\theta'' = \cos\theta\cdot\cos\theta' +$

$$+\sin\theta\cdot\sin\theta'\cos\varphi',\ d\Omega = \sin\theta' d\theta' d\varphi',\ F_{ik} = F_i^{+}(\bar{n}'\cdot\bar{m})F_k(\bar{n}\cdot\bar{m}) \qquad (34)$$

$$\beta = \frac{[\bar{m}\times\bar{n}']_y}{n'_x},\quad \alpha = \frac{1}{n'_x}\left[m_x m_z + \frac{n'_z}{n'_x}(m_y^2 - m_x^2)\right] \quad \lambda = \frac{\omega E_p}{W}$$

Отметим, что (34) могут быть легко проинтегрированы по θ', φ' в S и P приближении. В этом приближении $F_1 = a + b\cos\theta'$ $F_2 = c,\ F_3 = d,\ F_4 = 0^{[4 c]}$ (a, b, c, d) уже не зависят от углов. Подставляя (34) в (31) определяем $\Im_m M_i$.

В заключение выражаем глубокую благодарность академику Боголюбову Н.Н. и Логунову А.А. за ценные обсуждения и постоянный интерес к работе.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, ДАН СССР, 113, 9 (1957)
2. M. Kawaguchi and N. Mugbayashi Progr. of Theor. Phys.
3. А.А.Логунов и П.С.Исаев Nuclear Physic (в печати)
4. а) А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев и А.Н.Тавхелидзе Nuclear Physic
   б) А.А.Логунов, Б.М.Степанов и А.Н.Тавхелидзе, ДАН СССР, 112, 1 (1957).
   в) Л.Д.Соловьев „Nuclear Physic" (в печати).
5. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков "Введение в теорию квантованных полей". Гостехиздат, 1957.