3
Е-92
242

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Ефремов

Р-1242

АСИМПТОТИКА ГРАФОВ ФЕЙНМАНА 1

Дубна 1963

A.B. Ефремов

P - 1242

АСИМПТОТИКА ГРАФОВ ФЕЙНМАНА 1

1938/1

Дубна 1963

§ 1. Введение

В связи с изучением асимптотического поведения амплитуды рассеяния при больших энергиях и получением связанных состояний в рамках теории возмущений в последнее время особенно обострился интерес к асимптотике диаграмм Фейнмана, когда одна из переменных (энергия или передача импульса) много больше всех остальных. Знание асимптотики равно необходимо как при "ренормализационной идеологии" /1,2/, так и при прямом суммировании некоторых классов диаграмм /3,4,5/. Оно также может быть полезно и при потенциальном подходе к амплитуде рассеяния в теории поля /6/, и вообще, пока мы не имеем других методов в теории поля, кроме теории возмущений, знание асимптотики диаграмм может оказать большую услугу. Таким образом, мы приходим к математически довольно интересной задаче: как по топологической структуре графа можно определить его асимптотику. Для некоторых классов графов эта задача была решена в работах /3,4,5/. В настоящей работе разработан метод нахождения асимптотики для любых сходящихся и некоторого класса расходящихся диаграмм Фейнмана. Однако все рассмотрения проводятся только для скалярных частиц. Спинорным частицам мы надеемся посвятить одну из следующих работ.

В a – представлении каждому графу Фейнмана порядка n соответствует выражение /7/

$$T_n = g^n \frac{(-1)^{n-1}\, i^{\ell}}{(4\pi)^{n-2}} \int_0^{\infty} \prod^{\ell} \frac{d a_\nu}{a_\nu^2} \frac{1}{\Delta^2(a)} \exp\Big\{ i \sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{\Delta_{ik}(a)}{\Delta(a)} p_i p_k - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu (m_\nu^2 - i\delta)\Big\}, \tag{1.1}$$

где ℓ – число линий, p_i – внешний импульс, входящий в i –тую вершину, а матрица

$$\left(\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}\right)^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\ell} \frac{1}{a_\nu} \epsilon_{i\nu}\, \epsilon_{k\nu} \qquad i, k = 1,2 \dots n-1, \tag{1.2}$$

$\epsilon_{i\nu}$ – матрица инцидентности графа, т.е. матрица, которая после произвольной ориентации линий графа имеет вид:

$$\epsilon_{i\nu} = \begin{cases} 1, & \text{если линия } \nu \text{ выходит из вершины } i, \\ -1, & \text{если линия } \nu \text{ входит в вершину } i, \\ 0, & \text{если линия } \nu \text{ не инцидентна вершине } i. \end{cases}$$

Из (1.2) очевидно, что

$$\Delta = \det \Big| \sum_{\nu=1}^{\ell} \epsilon_{i\nu} \beta_\nu \epsilon_{k\nu} \Big| \qquad \beta_\nu = \frac{1}{a_\nu}, \tag{1.3}$$

а

$$\Delta_{pq} = (-)^{p+q} \det \left| \sum_{\nu=1}^{\ell} \epsilon_{i\nu} \; \beta_\nu \epsilon_{k\nu} \right| \qquad \begin{array}{l} i = 1,2 \dots p-1, \; p+1 \dots n-1 \\ k = 1,2 \dots q-1, \; q+1, \dots n-1 . \end{array} \tag{1.4}$$

Произведем замену

$$a_\nu \to \lambda a_\nu . \tag{1.5}$$

Интегрируя теперь по λ и вводя обозначения

$$D(a) = \Delta(a) \prod_{\nu=1}^{\ell} a_\nu , \qquad d_{ik} = \Delta_{ik} \prod_{\nu=1}^{\ell} a_\nu ,$$

получим :

$$T_n = g^n \frac{(2n-\ell-2)!}{(4\pi)^{n-2}} \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \frac{\delta\left(1-\sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu\right)}{D^2(a) \left[\sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{d_{ik}(a)}{D(a)} p_i p_k - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu m_\nu - i\delta \right]^{2n-\ell-2}} . \tag{1.6}$$

Как уже говорилось, мы в дальнейшем будем рассматривать в основном только сходящиеся графы, у которых $2n-\ell-2 \geq 1$ и отсутствуют циклы, состоящие из двух линий. Раздел 2 посвящен связи d_{ik} и D с топологией графа, в разделе 3 рассмотрен вопрос об асимптотике и связи ее с топологией графа. Общее правило нахождения асимптотики по топологии графа дано в разделе 4. Там же мы коротко касаемся асимпотики некоторого класса расходящихся графов. В конце работы приведено несколько примеров.

§ 2. Связь квадратичной формы с топологией графа

Остановимся сначала на некоторых понятиях и теоремах из теории графов.

Под графом мы будем понимать множество точек (вершин графа), соединенных линиями (ребрами). Степень вершины - число инцидентных ей линией. Если степень i -той вершины равна единице, то вершина называется висячей.

Цепь - последовательность ребер, причем начало последующего ребра совпадает с концом предыдущего.

Цикл - это цепь с совпадающими начальной и конечной точками, причем ни одно из ребер не входит в цикл дважды.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только связные графы, т.е. такие графы, любые две точки которых могут быть связаны цепью.

Связный подграф графа G, содержащий все его вершины и не содержащий циклов, назовем деревом графа G. Очевидно, что всякое дерево имеет не менее двух висячих вершин.

Подграф графа G, полученный из дерева графа удалением одного из ребер, назовем 2 - деревом. Очевидно, что 2 - дерево состоит из двух не связанных между собой компонент

Ребра, принадлежащие дереву (2-дереву), назовем ветвями дерева (2-дерева), а остальные ребра графа G – хордами дерева (2 – дерева). Очевидно, что дерево содержит $n-1$ ветвь, а 2-дерево – $n-2$. Под сечением графа G мы будем понимать совокупность таких ребер графа, снятие которых разделяет граф G на два не связанных между собой связных подграфа. Очевидно, что каждое 2-дерево может быть получено сечением графа G с последующим превращением каждой из частей в дерево.

Пусть $E=(\epsilon_{iv})$ – матрица инцидентности графа G с n узлами и ℓ ребрами. Удобно записать ее в виде ϵ_L^N, где $N=\{1,2\ldots n\}$, $L=\{1,2\ldots \ell\}$. При этом, если $I\subset N$ и $J\subset A$, то ϵ_J^I обозначает подматрицу матрицы E, полученную вычеркиванием тех строк и столбцов, номера которых не принадлежат I и J, соответственно.

Рассмотрим теперь граф G, у которого $n\geq \ell$. Пару, образованную ℓ ребрами и ℓ вершинами графа G, назовем линейной конфигурацией (она, вообще говоря, не является графом). Ей соответствует квадратная матрица ϵ_L^L, которая получается из ϵ_L^N вычеркиванием $n-\ell$ строк. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. /8/. Если линейная конфигурация содержит дуги некоторого цикла, то $\det \epsilon_L^L = 0$.

С помощью теоремы 1 можно доказать /8/ теорему 2: определитель матрицы ϵ_J^I, где I – совокупность $n-1$ номеров строк $(I\subset N)$, а J – совокупность $n-1$ номеров столбцов $(J\subset L)$, равен $+1$ или -1 тогда и только тогда, когда ϵ_J^N соответствует дереву графа G, и равен нулю в противном случае.

Аналогичным образом мы докажем теорему 3: определитель матрицы ϵ_M^K, где $K=N\setminus\{p,q\}$, а M – совокупность $n-2$ номеров столбцов $(M\subset L)$, равен $+1$ или -1 тогда и только тогда, когда ϵ_M^N соответствует 2-дереву с вершинами p и q, принадлежащим компонентам 2-дерева, и равен нулю в противном случае.

1°. Пусть ϵ_M^N определяет 2-дерево графа . Мы будем изменять нумерацию вершин и ребер, что изменяет только знак определителя (поскольку это соответствует перестановке строк и столбцов ϵ_M^N). Возможны два случая.

а) Вершины p и q находятся в одной компоненте (скажем, в той, порядок которой $n-k$). Обозначим тогда одну из висячих вершин другого дерева через 1 и инцидентное ей ребро-тоже через 1. Удалив их, опять найдем висячую вершину и инцидентное ей ребро, которым припишем номер 2, и т.д. Последняя k -тая вершина этого дерева будет инцидентна только ребрам с номерами, меньшими, чем k. Если во второй компоненте найдется висячая вершина, отличная от p и q, то припишем ей номер $k+1$, а инцидентному ей ребру – номер k. Повторяя теперь процесс, мы либо исчерпаем все вершины (кроме p и q), либо через r шагов придем к дереву, у которого висячими вершинами будут только p и q. Очевидно, что степень вершин такого дерева не превосходит 2. Припишем тогда какой-либо из вершин номер $k+r+1$ и двум инцидентным ей ребрам номера $k+r$ и $k+r+1$; удалив их, снова найдем висячую вершину, отличную от p q, которой вместе с инцидентным ей ребром припишем номер $k+r+2$, и т.д., пока не дойдем до вершин p и q. Определитель полученной таким образом квадратной матрицы равен нулю, поскольку равны нулю все наддиагональные элементы и диагональный элемент (k,k).

б) Вершины p и q находятся в разных компонентах 2-дерева. В этом случае в каждой из компонент найдется висячая вершина, отличная от p и q. Проводя теперь для каждого из деревьев процедуру переобозначений, получим квадратную матрицу, наддиагональные элементы которой равны нулю, а диагональные – ± 1. Определитель ее равен ± 1.

2°. Пусть ϵ_M^N определяет граф порядка n, у которого $\det \epsilon \neq 0$. В силу теоремы 1 он не содержит циклов, а поскольку он имеет $n-2$ ребер, то представляет собой 2-дерево. Кроме того, как следует из а), вершины p и q не могут одновременно входить в одну из компонент 2-дерева.

Перейдем теперь к вычислению определителей $D(a)$ и $d_{ik}(a)$. Применяя к (1.3) формулу Бине-Коши /9/, получим:

$$\Delta(a) = \sum_{\substack{J, J' \subset L \\ |J| = |J'| = n-1}} \det \epsilon_J^I \ \det B_J^{J'} \ \det \epsilon_{J'}^I ,$$

где $I = N \setminus \{n\}$, $B = (\beta_\nu \ \delta_{\mu\nu})$, $\beta_\nu = \dfrac{1}{a_\nu}$.

Воспользовавшись теперь диагональностью матрицы B и теоремой 2, получим:

$$\Delta(\alpha) = \sum_m \Delta_m(\alpha) ,$$

где Δ_m – произведение параметров β ветвей m-того дерева (сумма по всем деревьям графа G)

Совершенно аналогично

$$\Delta_{ik}(a) = \sum \det \epsilon_M^K \ \det B_M^M \ \det \epsilon_M^{K'}$$

$$M \subset L, \ |M| = n-2, \qquad K = N \setminus \{n,i\}, \qquad K' = N \setminus \{n,k\}.$$

В силу теоремы 3 (с учетом перестановки строк) произведение $\det \epsilon_M^K \ \det \epsilon_M^{K'} = (-1)^{i+k}$ тогда и только тогда, когда ϵ_M^N представляет собой 2 – дерево с вершинами $\{i,k\}$ и n, принадлежащими различным компонентам, и равно нулю в противном случае.

Таким образом,

$$\Delta_{ik}(a) = \sum_m \Delta_{ik}^m(a) ,$$

где Δ_{ik}^m – произведение параметров β ветвей 2-дерева с находящимися в различных компонентах вершинами i и k (сумма по всем таким 2-деревьям графа G).

Переходя теперь к параметрам $a = \dfrac{1}{\beta}$, получим:

$$D(a) = \sum_m D_m(a) ,$$

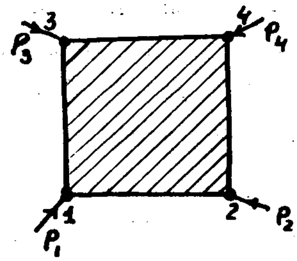
где
$$D_m(a) = \Delta_m(a) \cdot \prod_{\nu=1}^{\ell} a_\nu , \quad и \tag{2.1}$$

$$d_{ik}(a) = \sum_m d_{ik}^m(a) ,$$

где $d_{ik}^m(a) = \Delta_{ik}^m(a) \cdot \prod_{\nu=1} a_\nu .$

Как уже говорилось, эти 2-деревья можно получить из таких сечений графа G, у которых вершины $\{i,k\}$ и $\{n\}$ принадлежат различным частям рассеченного графа.

Перейдем теперь к определению коэффициента при S, который мы обозначим через A/D, для графа с четырьмя внешними импульсами.



$$S=(p_1+p_2)^2,\quad u=(p_1+p_3)^2,\quad t=(p_2+p_3)^2,\quad S+t+u=\sum_{i=1}^{4} p_i^2$$

Рис. 1.

Очевидно, что $A(a)=d_{12}-d_{13}$. Из этой разности выпадут все те 2-деревья, у которых вершины 1, 2, 3 входят в одну компоненту и, следовательно, /10/

$$A(a) = \sum_m A^m_{12}(a) - \sum_m A^m_{13}(a)\ ,$$

где A^m_{12} (A^m_{13}) – произведение параметров a хорд m-го 2-дерева графа G с вершинами $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$ ($\{1,3\}$ и $\{2,4\}$), принадлежащими различным компонентам.

Перечислим теперь некоторые свойства $A(a)$ и $D(a)$.

1°. $A(a)$, $(D(a))$ линейна по каждому из параметров a и однородна степени $\ell-n+2$, $(\{\ell-n+1\})$ по всем a.

2°. При $a_k=0$ A и D соответствуют графу, полученному из исходного стягиванием k-того ребра.

3°. Если $a_{k_1}=a_{k_2}=\dots a_{k_m}=0$ и ребра $k_1\dots k_m$ образуют цикл, то $A=D=0$.

§ 3. Асимптотика диаграммы рассеяния

Вклад произвольного графа Фейнмана порядка n в амплитуду рассеяния имеет вид:

$$T_n = g^n\,\frac{(2n-\ell-3)!}{(4\pi)^{n-2}}\,\epsilon^{2n-\ell-2}\int_0^\infty \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\ell} da_\nu\,\delta\,(1-\sum\limits_{\nu=1}^{\ell} a)}{D^2(a)\left[\dfrac{A(a)}{D(a)}+\epsilon\, f\,(a,m,t)\right]^{2n-\ell-2}} \tag{3.1}$$

где $\epsilon=1/S$, $A(a)$ и $D(a)$ определены в предыдущем параграфе. Мы будем интересоваться асимптотикой T_n при $\epsilon\to 0$ и фиксированном t. Очевидно, что, если $A^{2n-\ell-2}$ имеет интегрируемый нуль, то $T\approx\epsilon^{2n-\ell-2}$, однако, вообще говоря, нули A – не интегрируемые, что приводит к менее быстро спадающей асимптотике. Наиболее опасным является случай обращения A/D в нуль на нижнем пределе интегрирования, т.е. когда один или несколько параметров a обращаются в нуль. Нули в середине интервала интегрирования из-за наличия слагаемого $i\delta$ в f не являются опасными.

Назовем теперь классом графа G то минимальное число ребер, которое нужно стянуть (т.е. обратить соответствующие a в нуль), чтобы снять все сечения графа, отделяющие точки $\{1, 2\}$ от $\{3,4\}$ и $\{1,3\}$ от $\{2,4\}$. При этом $A(a)$, как видно из (2.2), обращается в нуль. Очевидно, что класс графа, состоящего из ℓ ребер, не может быть больше, чем $\ell - 1$.

Рассмотрим теперь граф k-того класса. Пусть $C_1 \dots C_q$ -множества, состоящие из k параметров a, обращение в нуль которых приводит к обращению в нуль $A(a)$. Из этих множеств можем выделить совокупности, не содержащие одинаковых параметров :

$$
\begin{array}{ccc}
C_1^1 & \dots & C_{\delta_1}^1 \\
C_1^2 & \dots & C_{\delta_2}^2 \\
\dots\dots & & \dots\dots \\
C_1^p & \dots & C_{\delta_p}^p ,
\end{array}
$$

причем $C_\beta^r \bigcap C_\gamma^r = 0$ и $C_\beta^r \bigcup_{\gamma=1}^{\delta_q} C_\gamma^q \neq 0$, $(q<r)$.

Для каждого множества C'_β введем параметр $\rho_{1\beta}$, равный сумме всех элементов C^1_β.

После замены

$$a_\nu \to \rho_{1\beta}\, a_\nu \qquad \text{для} \quad a_\nu \in C^1_\beta \tag{3.2}$$

получим :

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{\ell} d a_\nu\ \delta\Big(1-\sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu\Big) = \tag{3.3}$$
$$= \int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{\ell} d a_\nu \int_0^\infty \prod_{\beta=1}^{\delta_1} \Big[\rho_{1\beta}^{k-1} d\rho_{1\beta}\, \delta\Big(1-\sum a \in C^1_\beta\Big)\Big]\, \delta\Big(1-\sum R^{(1)}_{0\nu}\, a_\nu\Big),$$

где через $R^{(p)}_{q\nu}$ мы будем обозначать произведение всех параметров $\rho_{r\beta}$ множеств C^r_β с $p \le r < q$, которые содержат a_ν, причем $R^{(p)}_{q\nu} = 1$, если a_ν не входит ни в одно из указанных C^r_β. Как уже говорилось, наибольший вклад в асимптотику дает область интеграции вблизи нуля, если разделить область интеграции по каждому ρ на участки $(0,\delta)$ и (δ,∞), то из-за того что $A(a) \to \prod_{\beta=1}^{\delta} \rho_{1\beta}\, A(a\rho)$ при замене (3.2), асимптотика будет определяться теми слагаемыми, у которых число интеграций по интервалу $(0,\delta)$ наибольшее. Из-за δ-функций, вообще говоря, не все ρ могут одновременно обращаться в нуль. Наибольшую совокупность C^1_β, параметры $\rho_{1\beta}$ которых могут одновременно обращаться в нуль, мы назовем независимой (относящиеся к ним величины будем отмечать волнистой чертой). Эта независимая совокупность определяется из условия

$$C_0 \setminus \bigcup_\beta \tilde{C}^1_\beta \neq 0,$$

где C_0 – множество всех параметров a. Возвращаясь теперь для зависимых C^1_β к старым переменным, т.е. производя обратную замену $\rho^1_\beta a_\nu \to a_\nu$ и снимая интеграцию по ρ, с помощью δ-функции получим для (3.3) :

$$\int_0^\infty \prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \sum \int_0^\delta \prod \Big[\rho_{1\beta}^{k-1} d\rho_{1\beta}\, \delta\Big(1-\sum a \in \tilde{C}^1_\beta\Big)\Big]\, \delta\Big(1-\sum_{\nu=1}^{\ell} \tilde{R}^{(1)}_{0\nu}\, a_\nu\Big) + \tag{3.4}$$

по всем совокупностям независимых $\tilde{C}^1_\beta$

+ члены , содержащие интегрирование по ρ от δ до ∞ .

Перейдем теперь к учету множеств C^2_β. Вводя как и раньше параметры $\rho_{2\beta} = \sum a \in C^2_\beta$, произведем замену :

$$a_\nu \to \rho_{2\beta} a_\nu \qquad\qquad a_\nu \in C^2_\beta .$$

При этом из A выделится дополнительный множитель $\prod\limits_{\beta=1}^{\delta_2} \rho_{2\beta}$, а первый член в (2.4) примет вид:

$$\int\limits_0^\infty \prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \int\limits_0^\infty \prod_{\beta=1}^{\delta_2} [\rho^{k-1}_{2\beta}\, d\rho_{2\beta}\, \delta(1-\Sigma a \in \tilde{\tilde{C}}{}^2_\beta) \times$$

$$\times \Sigma \int\limits_0^\delta \prod_\beta [\rho_{1\beta}\, d\rho_{1\beta} \delta(1-\Sigma \tilde{\tilde{R}}{}^{(2)}_{1\nu} a_\nu \in \tilde{\tilde{C}}{}^1_\beta)]\, \delta(1-\sum_{\nu=1}^{\ell} \tilde{\tilde{R}}{}^{(2)}_{0\nu} a_\nu) .$$

по всем совокупностям независимых $\tilde{\tilde{C}}{}^1_\beta$

Проводя далее рассуждения ,аналогичные вышеизложенным, получим :

$$\int \prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu \;\Sigma \int\limits_0^\delta \prod_\beta [\rho^{k-1}_{1\beta}\, d\rho_{1\beta}\, \delta(1-\Sigma\, \tilde{\tilde{R}}{}^{(2)}_{1\nu}\, a_\nu \in \tilde{\tilde{C}}{}^1_\beta)] \times$$

по всем совокупностям независимых $\tilde{\tilde{C}}{}^1$, $\tilde{\tilde{C}}{}^2$

$$\times \prod_\beta [\rho_{2\beta}\, d\rho_{2\beta}\, \delta(1-\Sigma a_\nu \in \tilde{\tilde{C}}{}^2_\beta)]\, \delta(1-\sum_{\nu=1}^{\ell} \tilde{\tilde{R}}{}^{(2)}_{0\nu}\, a_\nu),$$

где совокупность независимых $\tilde{\tilde{C}}{}^2_\beta$ определяется из условия:

$$C_0 \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^1_\beta \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^2_\beta \neq 0$$

$$\tilde{\tilde{C}}{}^1_\gamma \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^2_\beta \neq 0 .$$

Распространяя эту процедуру на $C^3_,\ C^4 \dots C^p_,$ получим :

$$T_n = \frac{g^n(2n-\ell-2)!}{(4\pi)^{n-2}}\, \epsilon^{2n-\ell-t} \int\limits_0^\infty \prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu\, \Sigma \int\limits_0^\delta \frac{\tilde{\tilde{R}}{}^{k-1} \prod_{r\beta} [d\rho_{r\beta}\, \delta(1-\Sigma\, \tilde{\tilde{R}}_{r\nu}\, a_\nu \in \tilde{\tilde{C}}{}^r_\beta)] \delta(1-\Sigma\, \tilde{\tilde{R}}_\nu a_\nu)}{D^2(a,\rho)\, [\tilde{\tilde{R}}\, \dfrac{A'(a,\rho)}{D(a,\rho)} + \epsilon\, f\,]^{2n-\ell-2}}, \qquad (3.5)$$

где по всем совокупностям независимых $\tilde{\tilde{C}}{}^r_\beta$.

$$R = \prod_{r,\beta} \rho_{r\beta} \quad , \quad \tilde{\tilde{R}}_{r\nu} \equiv \tilde{\tilde{R}}{}^{(p)}_{r\nu} \quad , \quad \tilde{\tilde{R}}_\nu \equiv \tilde{\tilde{R}}{}^{(p)}_{0\nu},$$

а совокупность $\tilde{\tilde{C}}{}^r_\beta$ независимых определяется как такая совокупность, для которой

$$C_0 \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^1_\beta \setminus \dots \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^p_\beta = \Delta_0 \neq 0$$

$$\tilde{\tilde{C}}{}^1_\gamma \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^2_\beta \setminus \dots \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^p_\beta = \Delta^1_\gamma \neq 0$$

....

$$\tilde{\tilde{C}}{}^{p-1}_\gamma \setminus \bigcup_\beta \tilde{\tilde{C}}{}^{p}_\beta = \Delta^{p-1}_\gamma \neq 0$$

$$\tilde{\tilde{C}}{}^p_\gamma = \Delta^p_\gamma .$$

Докажем теперь, что любой из параметров a принадлежит какому-либо из множеств Δ и притом только одному из них. Действительно, пусть существует такое a , которое не входит ни в одно из Δ . Это означает, что оно принадлежит какому-то из пересечений $C_0 \cap \tilde{\tilde{C}}{}^1_\beta \cap \dots \cap C^p_\delta$, а следовательно, и Δ^p_δ . Пусть теперь a принадлежит одновременно двум множествам Δ^r_γ и $\Delta^q_\beta (r<q)$. Это означает, что $a \in \tilde{\tilde{C}}{}^r_\gamma$ C^q_β и, следовательно,

$a \notin \Delta^r_\gamma$. a не может также принадлежать одновременно Δ^r_γ и Δ^r_β , поскольку $C^r_\gamma \bigcap C^r_\beta = 0$.

Перейдем теперь к вычислению асимптотики T_n . Поскольку верхний предел δ может быть сделан сколь угодно малым, то можно положить $\rho = 0$ всюду, где это не существенно для асимптотики, т.е. в функциях A , f, D и δ –функциях. При этом $f(a, 0, t, m) = f'(a, t, m)$ и $D(a, 0) = D'(a)$ будут соответствовать графу, полученному из исходного графа G стягиванием тех ребер, для которых $a \in C_0 \setminus \Delta_0$. Интегрируя теперь по всем ρ_i получим (см. Приложение) :

$$T_n \approx \frac{g^n}{(4\pi)^{n-2}} \frac{(k-1)!}{S^k} \Big\{ \sum \int_0^\infty \prod_{\mu=1}^{\ell} da_\mu \frac{[\prod_{\gamma, r} \delta(1 - \Sigma\, a \in \Delta^r_\gamma)]\, \delta(1 - \Sigma\, a \in \Delta_0)}{D'^2(a)\,(f'(a,t,m))^{2n-\ell-k-2} \left(\dfrac{A'(a)}{D'(a)}\right)^k} \Big\} \times$$

по всем совокупностям независимых $\tilde{C}^r_\beta$

$$\times \begin{cases} \dfrac{1}{\nu!} \ln^\nu S & \text{при } 2n - \ell - 2 = k \\[2ex] \dfrac{(2n-\ell-3)!}{(\nu-1)!} \ln^{\nu-1} S & \text{при } 2n - \ell - 2 > k, \end{cases} \qquad (3.6)$$

где ν – наибольшее число независимых множеств из $C_1 \dots C_q$.

Рассмотрим теперь вопрос о сходимости интегралов в фигурных скобках формулы (3.6). Функции f' и D' не зависят от $a \in \bigcup_{r,\gamma} \Delta^r_\gamma$, $A'(a)$ линейна по параметрам a , принадлежащим одному и тому же Δ^r_γ (т.е. не имеет членов, в которые бы входило произведение двух параметров a , принадлежащих одному и тому же Δ^r_γ), и однородна по параметрам $a \in \Delta^p_\gamma$. Кроме того, с учетом связей, налагаемых δ -функциями, не существует таких k параметров a , обращение в нуль которых приводит к обращению в нуль $A'(a)$. Таким образом, все особенности подинтегрального выражения по $a \in \bigcup_{r,\gamma} \Delta^r_\gamma$ лежат в середине интервала интегрирования, и в силу линейности $A'(a)$ интеграл по $a \in \bigcup_{r,\gamma} \Delta^r_\gamma$ сходится (это утверждение, впрочем, строго доказать не удалось, но, по-видимому, оно справедливо). Интеграл по $a \in \Delta_0$ также будет сходится, если в результате сжатия ребер исходного графа не образуется циклов, содержащих не более двух ребер. Однако не всякий случай образования таких циклов является опасным, а только такой, когда сечения, которые не рассекают двух ребер, принадлежащих одному из независимых $\tilde{C}^r_\gamma$, либо вообще не рассекают ребра такого цикла Z , либо рассекают, по крайней мере, одно из его "уцелевших" после стягивания ребер. В этом случае обращение в нуль $D'(a)$ на нижнем пределе интегрирования по параметрам $a \in Z$ не может компенсироваться обращением в нуль D' в $\left(\frac{A'}{D'}\right)^k$, поскольку последнее компенсируется обращением в нуль A', и интеграл (3.6) расходится. Разумеется, если $k = 1$, то образование петли является всегда опасным. Чтобы ликвидировать эту расходимость, разберем историю ее возникновения. Пусть на некотором этапе, в результате предшествующих стягиваний, образуется цикл Z с ребрами $a_1 \dots a_m$, который в результате последующего стягивания ребер, принадлежащих $\tilde{C}^r_\gamma = (a_1 \dots a_s, \beta_1 \dots \beta_{k-s})$, будет содержать не более двух ребер, т.е.

$$m - s \leq 2 . \qquad (3.7)$$

Если, кроме того, выполняется вышеизложенное условие о сечениях, то $A'(a)$ имеет вид:

$$A' = \sum_{l=1}^{s} \sum_{q=s+1}^{m} A_{lq}\, a_l\, a_q + \sum_{\substack{p,q=s+1 \\ p \neq q}}^{m} A_{pq}\, a_p\, a_q + d, \qquad (3.8)$$

где d образуется из сечений, не рассекающих контура Z. Здесь мы воспользовались тем фактом, что каждое сечение имеет четное число ребер, общих с циклом. Последние два члена формулы (3.8) обращаются в нуль при $\beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_{k-s} = 0$, причем пусть обращение в нуль t из них, скажем, $\beta_1 \dots \beta_t$, обращает в нуль слагаемое d. Тогда из вида (3.8) следует, что

$$m - s > s. \tag{3.9}$$

Действительно, пусть u – число тех номеров q, для которых $\sum\limits_{l=1}^{s} A_{lq} a_q \neq 0$. Тогда очевидно, что $u + t \geq k$ (в противном случае мы имели бы граф, класс которого меньше чем k). Кроме того, $u \leq m - s$ и $t \leq k - s$. Справедливость (3.9) немедленно следует из этих трех неравенств.

Система (3.7), (3.9) имеет следующие целочисленные решения:

1°. $m = 4$, $s = 2$,

2°. $m = 3$, $s = 1$,

3°. $m = 2$, $s = 1$.

Ясно, что последнее решение не может осуществиться ни на каком шаге, кроме первого, т.е. когда цикл Z с самого начала состоит из двух ребер. В этом случае интеграл (3.1), соответствующий такому графу, расходится, и необходима регуляризация.

Для решения 1° $A'(a)$ имеет вид:

$$A' = A\, a_1 a_3 + B\, a_2 a_4 + C\, a_3 a_4 + d.$$

Отсюда следует, что среди $C_1 \dots C_q$ есть также множество $(a_3, a_4, \beta_1 \dots \beta_{k-2})$. Если теперь произвести замену $a_{1,2,3,4} \to r\, a_{1,2,3,4}$, $r = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, то, поскольку d и D' будут пропорциональны r и $\frac{\partial d}{\partial r} \neq 0$, $\frac{\partial D'}{\partial r} \neq 0$ при $r = 0$, $\frac{A'(a,r)}{D'(a,r)}$ исчезает при обращении в нуль множества $(r, \beta_1 \dots \beta_{k-2})$, что эквивалентно обращению в нуль $(a_3, a_4, \beta_1 \dots \beta_{k-2})$. При этом интеграл по r сходится. Таким образом, для этого случая формула (3.6) остается справедливой, причем D', f' будут соответствовать графу с полностью стянутым циклом Z.

Более интересно решение 2°. Для него

$$A' = A\, a_1 a_2 + B a_1 a_3 + C a_2 a_3 + d. \tag{3.10}$$

После проведения той же процедуры, что и для решения 1°, мы получим новое множество $(r, \beta_1 \dots \beta_{k-1})$, которое обращает $\frac{A'}{D'}$ в нуль, но которому нет эквивалента среди $C_1 \dots C_q$. Это приводит к возрастанию степени логарифма в (3.6) на единицу. Стягивание всех ребер, принадлежащих совокупности независимых множеств из $C_q \dots C_q$, как это видно из (3.10), делает из цикла Z или петлю (когда либо $A = 0$, либо $B = 0$), или цикл из двух ребер (когда $A \neq 0$ и $B \neq 0$).

Таким образом, справедливо следующее правило: образование петли (двойного цикла) в результате стягивания всех ребер из совокупности независимых $C_1 \dots C_q$ может приводить к увеличению степени логарифма на единицу и появлению $\delta(1-a_{2,3})$ $(\delta(1-a_2-a_3))$

в подинтегральном выражении формулы (3.6), где a_1 или a_2 (a_1, a_2) – параметр этой петли (двойного цикла). D' и f' при этом соответствуют графу со стянутой петлей (двойным циклом). Если же стягивание ребер приводит к полному исчезновению цикла, то никаких изменений нет.

В заключение этого раздела необходимо отметить, что, если все μ циклов исходного графа превращаются в петли или двойные циклы, то, поскольку из-за $\delta(1-\sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu)$ все циклы стянуть невозможно, степень логарифма увеличится на $\mu-1$.

§ 4. Заключение

Суммируя теперь все сказанное, можно сформулировать следующее правило:

Чтобы определить асимптотическое поведение сходящегося графа G при $S \to \infty$ и фиксированным t необходимо проделать следующие операции.

1.° Провести все сечения, отделяющие вершины {1,2} от вершин {3,4} и вершины {1,3} от {2,4}.

2.° Определить минимальное число ребер, через которые проходят все эти сечения. Пусть это число будет k.

3.° Найти все такие совокупности из k ребер $(C_1 \ldots C_q)$ и выделить из них независимые $\tilde{\tilde{C}}_1 \ldots \tilde{\tilde{C}}_{\nu}$, т.е. такие, что объединение всех последующих множеств не исчерпывает ни одного из предыдущих и объединение их всех не исчерпывает множества всех ребер C_0. Математически это выражается следующей системой:

$$C \setminus \bigcup_{r=1}^{\nu} \tilde{\tilde{C}}_r \neq 0, \quad \tilde{\tilde{C}}_1 \setminus \bigcup_{r=2}^{\nu} \tilde{\tilde{C}}_r \neq 0, \quad \tilde{\tilde{C}}_2 \setminus \bigcup_{r=3}^{\nu} \tilde{\tilde{C}}_r \neq 0 \qquad \text{и т.д.}$$

4.° Стягивая все ребра, принадлежащие $\bigcup_{r=1}^{\nu} \tilde{\tilde{C}}_r$, образовать граф G'.

5.° Выяснить, какие из петель и двойных циклов графа G' являются опасными, т.е. такими, что при $k > 1$ все сечения, которые не имеют двух общих элементов ни с каким из $\tilde{\tilde{C}}_r$, либо вообще не рассекают цикла Z диаграммы G, из которого в результате стягивания образовалась петля, либо рассекают в нем одну из граней двойного цикла или петли. При $k = 1$ все образовавшиеся петли являются опасными, а двойные циклы – неопасными.

После выполнения 1°–5° можно утверждать, что при $S \to \infty$ и фиксированном t вклад от графа G ведет себя как

$$T_n \approx \begin{cases} \dfrac{1}{S^{2n-\ell-2}} & \text{если} \quad 2n-\ell-2 < k \\[2ex] \dfrac{1}{S^k} \ln^{\nu+m} S & \text{если} \quad 2n-\ell-2 = k \\[2ex] \dfrac{1}{S^k} \ln^{\nu+m-1} S & \text{если} \quad 2n-\ell-2 > k, \end{cases}$$

где ℓ – число линий графа G; n – число вершин, $2n-\ell-2 \geq 1$, k определено в 2°, ν определено в 3°, а m – число опасных циклов, стягивание которых не сжимает диаграммы G в точку.

Остановимся теперь на некотором классе расходящихся графов, именно тех, для которых $\frac{\partial T}{\partial S}$ сходится. Дифференцируя формулу (1.1) и затем интегрируя по λ, получим:

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \pm g^{n} \frac{(2n-\ell-2)!}{(4\pi)^{n-2}} \int_{0}^{\infty} \prod_{\mu=1}^{\ell} d a_{\mu} \frac{\frac{A(a)}{D(a)}\, \delta \left(1-\sum_{\mu=1}^{\ell} a_{\mu}\right)}{D^{2}(a)\left[\frac{A(a)}{D(a)} S + f(t, m, a)\right]^{2n-\ell-1}} .$$

Сходимость этого выражения означает, что $2n-\ell-1 \geq 1$ и если исходный граф содержит двойные циклы, то все сечения рассекают их. Пусть диаграмма не содержит двойных циклов. Это означает, что $2n-\ell-2=0$, и, следовательно, $\frac{\partial T_n}{\partial S} \approx \frac{1}{S}$. Если существует q двойных циклов $Z_1 \ldots Z_q$, то, вводя $a^{1}_{1,2}=\rho_1 a^{1}_{1,2}$, $\rho_1 = a^{1}_{1} + a^{1}_{2}$, получим, что $\frac{A}{D} \to \rho_1 \ldots \rho_q \frac{A'}{D'}$ и $D \to \rho_1 \ldots \rho_q D'$. Используя теперь полученные нами правила, найдем, что

$$\frac{\partial T}{\partial S} \approx \begin{cases} \frac{1}{S} \ln^{q} S & \text{при} \quad 2n-\ell-2=0 \\ \frac{1}{S} \ln^{q-1} S & \text{при} \quad 2n-\ell-2>0 \end{cases}$$

(мы ограничимся здесь графами, степень вершин которых не превосходит четырех). Таким образом, для этого класса графов получаем:

$$T_n \approx \begin{cases} \ln^{q+1} S & \text{при} \quad 2n-\ell-2=0 \\ \ln^{q} S & \text{при} \quad 2n-\ell-2>0. \end{cases}$$

К асимптотике других расходящихся графов мы надеемся вернуться в одной из следующих работ.

В заключение автор благодарит Д.И.Блохинцева, А.А.Логунова, И.Тодорова и Н.А.Черникова за плодотворные обсуждения.

Примеры

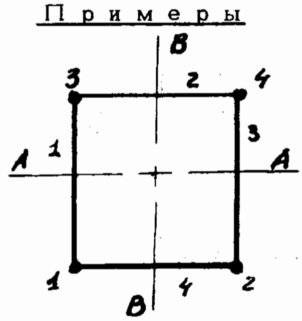


Рис. 2.

Граф имеет два сечения (AA) и (BB). Класс диаграммы равен двум $C_1=\{1,2\}$, $C_2=\{1,4\}$, $C_3=\{2,3\}$, $C_4=\{4,3\}$. Независимые совокупности $C_1\ C_2$; C_1, C_3 : C_2 , C_4 и C_3, C_4.
После сжатия диаграмма примет вид :

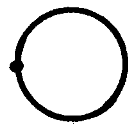


Рис. 3.

Откуда асимптотика с учетом того, что $2n-\ell-2=2$, $-\frac{1}{S^2}\ \ell n^2 S$.

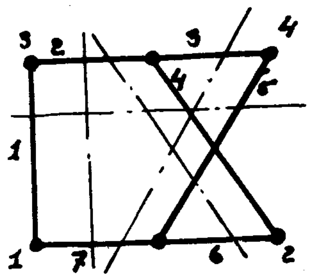


Рис. 4.

Граф второго класса $C_1=\{2,4\}$, $C_2=\{5,7\}$, и оба являются независимыми. После сжатия 2, 4, 5, 7 получим :

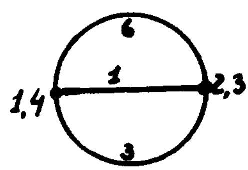


Рис. 5.

Однако ни один из образовавшихся двойных циклов не будет опасным, поскольку сечение $\{1, 4, 5\}$ не проходит через ребра 3, 6 , а сечение $\{2, 7\}$ не проходит через ребра 1,6 и 1,3 . Следовательно, асимптотика $-\frac{1}{S^2}\ \ell n\ S$. $(2n-\ell-2=3)$.

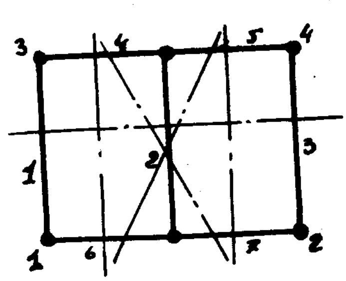


Рис. 6.

Граф третьего класса

$C_1 = \{1,4,5\}$, $C_2 = \{2,4,5\}$, $C_3 = \{3,4,5\}$, $C_4 = \{1,6,7\}$

$C_5 = \{2,6,7\}$, $C_6 = \{3,6,7\}$; $C_7 = \{2,6,5\}$, $C_8 = \{2,4,5\}$.

Одной из независимых совокупностей будет, например, C_1, C_3 , C_2 , C_7. После сжатия получим :

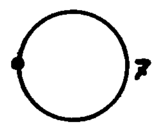


Рис. 7.

а поскольку $2n - \ell - 2 = 3$, то асимптотика $\sim \frac{1}{S^3} \ell n^4 S$.

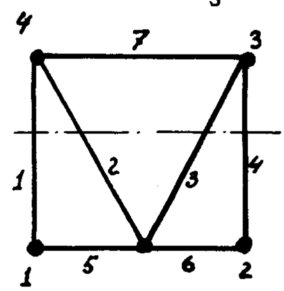


Рис. 8.

Граф первого класса $C_{1,2,3,4} = \{a_{1,2,3,4}\}$ и все C_i независимы. В результате сжатия получим :

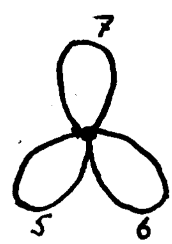


Рис. 9.

Поскольку граф первого класса, то все петли опасные. Асимптотика $\sim \frac{1}{S} \ell n^6 S$.

Рассмотрим теперь три примера расходящихся графов .

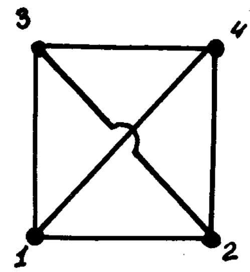


Рис. 10.

Поскольку двойных контуров нет, то асимптотика $-\ell n\ S$. $(2n-\ell-2=0)$.

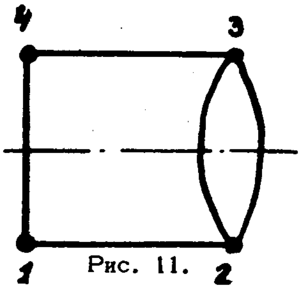


Рис. 11.

Граф содержит один двойной цикл и $2n-\ell-2=1$. Асимптотика $-\ell n\ S$.

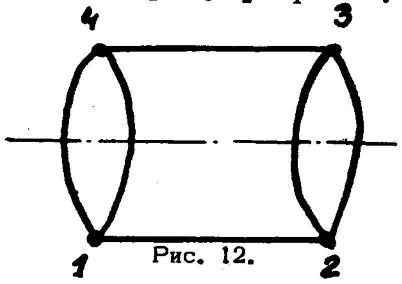


Рис. 12.

Граф содержит две двойные петли и $2n-\ell-2=0$. Асимптотика $-\ell n^3\ S$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим интеграл

$$I_\nu^{m,k}(\epsilon, A)=\int_0^\delta \frac{dx_1 \dots dx_\nu (x_1 \dots x_\nu)^{k-1}}{(x_1 \dots x_\nu A+\epsilon f)^{m+1}} \qquad \text{при} \quad m-k+1\geq 0 .$$

Очевидно, что

$$I_\nu^{m,k}=\frac{(-)^{k+1}}{m(m-1)\dots(m-k+2)}\,\frac{\partial^{k-1}}{\partial A^{k-1}}\, I_\nu^{m-k+1,1} . \qquad (П.1)$$

В свою очередь,

$$I_\nu^{m-k+1,1}=\frac{(-)^{m-k+1}}{f^{m-k+1}(m-k+1)!}\,\frac{\partial^{m-k+1}}{\partial \epsilon^{m-k+1}}\, I_\nu^{0,1} . \qquad (П.2)$$

Но для $I_\nu^{0,1}$ нетрудно показать справедливость следующего рекуррентного соотношения :

$$\frac{\partial I_\nu^{0,1}}{\partial\ \ell n\,\epsilon}=-\ I_{\nu-1}^{0,1} , \qquad (П.3)$$

причем

$$I_0^{0,1}=\frac{1}{A+\epsilon f} . \qquad (П.4)$$

Рассмотрим теперь асимптотику этих функций при $\epsilon \to 0$. Из $(П.4)$ получим, что

$$I_0^{0,1} \approx \frac{1}{A} \,.$$

Используя теперь $(П.3)$, найдем, что :

$$I_\nu^{0,1} \approx \frac{(-)^\nu}{A \;\nu!} \ln^\nu \epsilon \,. \qquad (П.5)$$

Подставляя этот результат в $(П.2)$ и затем в $(П.1)$, получим :

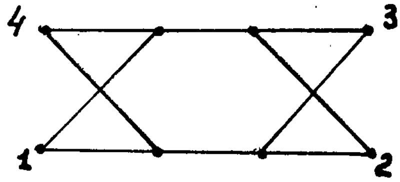
$$I_\nu^{m,k} \approx \frac{(k-1)!}{m!\,\epsilon^{m-k+1}} \; \frac{1}{A^k \, f^{\,m-k+1}} \begin{cases} \dfrac{1}{\nu!} \ln^\nu \dfrac{1}{\epsilon} & m+1=k \\[2mm] \dfrac{(m-k)!}{(\nu-1)!} \ln^{\nu-1} \dfrac{1}{\epsilon} & m+1>k \,. \end{cases}$$

Литература

1. B.A.Arbuzov, A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, R.N.Faustov. Phys. Lett. 2, 150 (1962).
2. D.V.Shirkov . Preprint ИМ АН СССР ТФ-8,1962.
3. I.C.Polkinghorne. High Energy Behaviour in Perturbation Theory. Preprint, 1962.
4. P.G.Federbush, M.T.Grisaru. The High Energy Behaviour of Scattering Amplitudes in Perturbation Theory. Preprint,1962.
5. I.G.Halliday. High Energy Behaviour in Perturbation Theory. Preprint,1963.
6. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров, О.А.Хрусталев. Квазипотенциальная природа амплитуды рассеяния. Препринт ОИЯИ Д-1191, Дубна, 1962.
7. А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Н.А.Черников. Годишник на Софийския университет, 5, 117 (1962). См. также препринт ОИЯИ Р-889, Дубна, 1962.
8. К.Берж. Теория графов и ее применение, ИЛ, 1962.
9. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц, стр. 17. Техиздат, 1953.
10. Этот результат впервые, но другим методом был получен Y.Shimamoto. Nuovo Cim, 25, 1292 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1963 г.

Замечания при корректуре. 1. Я очень признателен В.Ваксу и А.Ларкину за указание на то, что изложенный метод фактически дает асимптотику реальной части, которая может не совпадать с асимптотикой всего графа. Это имеет место, например, для графа



у которого реальная часть имеет асимптотику $\frac{1}{S^2}\ln^5 S^1$, а мнимая $1/S$. Все результаты работы, однако, заведомо справедливы для тех графов, у которых либо $d_{13}=0$, либо $d_{12}=0$.

2. Во время нахождения препринта в печати вышла работа Тиктопулоса / A.Tiktopoulos, preprint EFINS 63 - 13/, в которой аналогичным методом получены все результаты, относящиеся к сходящимся графам.