ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

Р-1241

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ СО СПИНОМ 1 И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Дубна 1963 год

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

Р-1241

ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ ПОЛЯ СО СПИНОМ 1 И СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Дубна 1963 год

А н н о т а ц и я

Дано определение теорий класса A, в которых взаимодействующие поля обладают определенным спином. Установлена глубокая связь законов сохранения числа барионов, странности, изотопического спина, а также электрического заряда с пространственно-временным свойством векторных полей со спином 1 - свойством обладать определенным спином. Так существование истинно нейтральных полей со спином 1 /например, фотона или ω -мезона/ влечет за собой инвариантности, соответствующие сохранению аддитивных квантовых чисел /например, электрического заряда или странности/. Существование заряженных полей со спином 1 /например, ρ - мезона/ приводит к инвариантностям типа изотопической, и т.д. Доказательство проводится путем анализа наиболее общего локального релятивистски инвариантного лагранжиана для произвольной системы любого числа взаимодействующих полей со спинами 1, 1/2 и 0. Единственное /временное/ ограничение - безразмерность констант связи. В теориях класса A каждое взаимодействующее массивное векторное поле должно удовлетворять условию Лоренца - условию выделяющему спин и тесно связанному с неоднородной группой Лоренца. Для векторных полей с массой 0, вместо этого, требуется произвольность их 4 дивергенций. Как следствие матрицы, составленные из констант связи, с необходимостью образуют алгебры Ли, что и влечет за собой указанные выше свойства симметрии. Структурными коэффициентами алгебр служат константы связи для самодействия векторных полей.

1. Введение

1.1. В сильных взаимодействиях элементарных частиц сохраняются такие величины, как изотопический спин, странность и число барионов. На первый взгляд, эта группа законов сохранения и соответствующих им инвариантностей никак не связана со свойствами пространства - времени Минковского. В то же время другие законы сохранения - энергии-импульса, момента количества движения - явно связаны со свойствами пространства-времени: однородностью и изотропностью.

Сделанное в аннотации утверждение о внутренней связи первой группы законов сохранения с пространственно-временным свойством векторных полей обладать определенным спином звучит неожиданно, и мы попробуем пояснить его. В теориях класса A /1/, которые обсуждаются в § 2, из уравнений движения для векторных полей

$$\Box b^{l}_{\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu} b^{l}_{\nu} - m^{2}_{l} b^{l}_{\mu} = - j^{l}_{\mu} \qquad /1/$$

/токи j^{l}_{μ} суть некоторые комбинации из полей, включая поля b^{l}_{μ} / должно следовать, что спин каждого поля равен 1, т.е., что выполняется альтернатива /см. § 2, а также /1-3/ /.

$$\partial_{\mu} b^{l}_{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{если } m^{2}_{l} \neq 0 \\ \text{произвольно,} & \text{если } m^{2}_{l} = 0 . \end{cases} \qquad /2/$$

Тогда токи должны сохраняться, $\partial_{\mu} j^{l}_{\mu} = 0$, а это означает инвариантность теории относительно некоторых фазовых преобразований.

1.2. Какие именно инвариантности возможны и какова структура взаимодействий - этот вопрос исследуется нами путем непосредственного анализа полевых уравнений в рамках лагранжева формализма. Лагранжиан выписывается с неопределенными коэффициентами /константами связи/, и, как следствие требования /2/, возникают некоторые алгебраические соотношения, которым должны удовлетворять эти коэффициенты. Эти соотношения означают, что определенные матрицы, составленные из констант связи, должны образовывать алгебры Ли.

Мы исходим из наиболее общего локального релятивистски инвариантного лагранжиана для произвольной системы любого числа взаимодействующих полей со спинами 1,1/2 и 0. При этом заранее не предполагается ни сохранение четности, ни сохранение числа спинорных частиц. Единственное ограничение, которое принято нами в настоящей работе, - безразмерность всех констант связи /в единицах $\hbar = c = 1$ /. Это просто означает, что на данном этапе исследования мы ограничиваемся первым членом разложения лагранжиана по размерности констант связи. Имеются основания полагать, что все существенные выводы, относящиеся к свойствам инвариантности, останутся неизменными и после включения в лагранжиан членов с размерными константами связи. Взаимодействия класса A с безразмерными константантами связи естественно назвать минимальными взаимодействиями[x].

1.3 В работе доказано, что взаимодействия класса A, когда спин векторных полей всегда равен 1, исчерпываются следующими случаями:

а/ Когда векторные поля нейтральны и взаимодействуют через сохраняющиеся токи, например, через токи, соответствующие сохранению странности или числа барионов. Пример подобных полей – вектон Фуджии[5] и Кобзарева-Окуня[6]. Разумеется, такие теории будут инвариантны относительно соответствующих фазовых преобразований.

б/ Простейшей возможностью для описания заряженного векторного поля является случай, когда три векторные поля объединяются в триплет с равными массами. При этом, если сделать предположение о сохранении числа спинорных частиц, то вся теория в целом будет изотопически инвариантна, а векторный триплет будет b -мезоном Янга-Миллса[7]. Если число спинорных частиц не сохраняется, то теория будет инвариантна относительно некоторой новой группы фазовых преобразований, изоморфной изотопической.

в/ Далее, более богатые мультиплеты векторных полей влекут за собой более высокие симметрии взаимодействий, соответствующие классическим группам преобразований: $SU(\nu)$ $(\nu = 3, 4, \dots)$, $O(\nu)$ $(\nu = 5, 6, \dots)$, $Sp(\frac{\nu}{2})$ $(\nu = 4, 6, \dots)$ и пяти исключительным группам G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 /см. обзоры[8-10] и цитируемую там литературу/. Теории поля, в которых постулировались такого рода симметрии, обсуждали Глешоу и Гелл-Манн[4].

1.4. Таким образом, законы сохранения первой группы действительно связаны с пространственно-временными свойствами: изотопическая инвариантность – со спином 1 у ρ-мезона; сохранение барионного числа и странности со спином 1 – у двух нейтральных векторных мезонов /по-видимому, ω -мезона и еще одного не открытого пока нейтрального мезона/. Если бы существовал октет векторных мезонов с равной массой, то ему соответствовала бы инвариантность относительно группы $SU(3)$ / например, 'eightfold way' / и так далее.

Обратно, при наличии того или иного закона сохранения есть место для частицы, обуславливающей его возникновение, и можно ставить вопрос о поиске такой частицы. В более широком плане это касается не только векторных законов сохранения, но и других, например, законов сохранения 4 -импульса, момента и т.д. В качестве примера укажем на абсолютный закон сохранения числа фермионов, благодаря которому имеется место для истинно- нейтрального мезона со спином 1. Существование такого "фермионного" мезона индуцировало бы универсальное векторное взаимодействие через сохраняющиеся нейтральные векторные токи, и могло бы, в принципе, привести к различию масс у электрона и мюона.

---

[x] Это определение минимальности в случае электродинамики однозначно выделяет взаимодействие $j_\mu A_\mu$ и этим оно лучше обычного правила замены в свободном лагранжиане $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$, не являющегося однозначным, как отмечено Глешоу и Гелл-Манном[4].

1.5. Отметим, что найденные группы преобразований оставляют инвариантным, в частности, и свободный лагранжиан спинорных полей при соответствующем выборе масс. Их можно рассматривать как обобщения группы Паули[11] и Гюрси[12] на случай многих спинорных полей.

1.6. Полученный нами вид взаимодействия векторных полей в основном такой же, как и у авторов многочисленных работ, которые трактуют векторные поля на основе так называемого "калибровочного" принципа[7,13,4] /другие ссылки см. в[3,14]/. Это сходство не случайно и обусловлено тем, что они, постулируя с самого начала свойства симметрии /например, изотопическую инвариантность/ и полагая массу векторных полей, равной нулю, требуют далее "локальных" свойств симметрии, что равносильно требованию произвольности $\partial_\mu b_\mu$ и также выделяет спин 1[2,3]. В то же время мы никаких симметрий не предполагаем, мы их выводим. Принципиальное отличие наших результатов и подхода ясно видно из следующей таблицы

	У авторов калибровочно-инвариантных теорий	У нас
Существование векторных полей	"Выводится" /фактически постулируется//см. нашу критику[3]/	Постулируется
Инвариантности относительно преобразований с независящими от x фазами /например, изотопическая/	Постулируются	Выводятся
Основной принцип	Калибровочная инвариантность с зависящими от x фазами	Выделение спина 1: $\partial_\mu b_\mu = \begin{cases} 0 & \text{для массивного векторного поля} \\ \text{Произвольно} & \text{в случае массы } 0 \end{cases}$
Масса векторного поля	0	Любая
Вид взаимодействия	Выводится	Выводится

Вся соль именно в векторных полях; именно для того, чтобы они имели спин 1, необходимы те или иные свойства симметрии. Простота и изящество свойств симметрии, присущих теориям класса А, внушает надежду, что если бы удалось построить аппарат, адекватный неоднородной группе Лоренца с соответствующей классификацией взаимодействующих полей, при которой поля не были бы обременены лишними компонентами, то эти свойства симметрии стали бы просто очевидными.

1.7. В § 2 обсуждаются вопросы, связанные со спином взаимодействующего поля и определяются теории класса А. Последующие параграфы посвящены перечислению всех теорий класса А. В § 3 подробно рассматривается простой пример, который иллюстрирует применяемый подход. Замечания об общей методике сделаны в § 4. В § 5 рассмотрено взаимодействие произвольного числа векторных полей друг с другом /"самодействие"/. Взаимодействия с полями со спинами 1/2 и 0 и их свойства симметрии исследованы в §§ 6 и 7. В заключительном § 8 обсуждаются полученные результаты.

В Приложениях I и II приведены некоторые конкретные реализации алгебр Ли и соответствующие взаимодействия. В числе рассмотренных примеров с несохранением числа спинорных частиц отметим взаимодействие "дейтонного поля". О таком взаимодействии можно было бы говорить, набравшись смелости описывать дейтон –стабильный бозон со спином 1 и барионным зарядом $B = 2$ – полем в лагранжевом формализме. Тогда мы с необходимостью пришли бы к "триплету" полей с равными массами, состоящему из дейтона /1^+, B = + 2/, нейтрального бозона /1^-, B=0/ и антидейтона /1^+, B =–2/. Эта симметрия нарушается π –мезонными /а также и некоторыми другими/ сильными взаимодействиями. Поэтому масса нейтрального бозона, распадающегося на 3 пиона /подобно ω –частице/ и на 5 пионов, может на несколько сотен Мэв отличаться от массы дейтона. Однако это указание на существование такого резонансного состояния очень спорно и может рассматриваться только как наводящее.

2. Спин взаимодействующего поля

2.1. В теории поля операторы поля классифицируют по неприводимым представлениям (j, k) однородной группы Лоренца /скаляры, спиноры, векторы и т.д./. В то же время физические величины /импульс, масса, спин/ являются понятиями неоднородной группы Лоренца /группы Пуанкаре/, причем операторы квадрата спина и массы являются инвариантами этой группы [15].

С этим связана трудность введения полей с определенным спином в рамках однородной группы Лоренца: приходится использовать величины, обладающие большим числом компонент, чем необходимо. Лишние степени свободы у таких величин /лишние компоненты/ устраняются путем наложения соответствующих дополнительных условий /см., например, [16] /.

Подчеркнем, что наложение обычных дополнительных условий на свободные поля фактически приводит к величинам, преобразующимся по неприводимым представлениям неоднородной группы Лоренца, т.е. являющимся собственными функциями операторов квадрата спина $\hat{s}^2$ и квадрата массы $\hat{\mu}^2$ с заданными собственными значениями. Эти операторы для поля записываются[x]

$$\hat{s}^2 = \tfrac{1}{2} m_{\rho\sigma} m_{\rho\sigma} - p^{-2} m_{\lambda\rho} m_{\lambda\sigma} p_\rho p_\sigma = \tfrac{1}{2} s_{\rho\sigma} s_{\rho\sigma} - p^{-2} s_{\lambda\rho} s_{\lambda\sigma} p_\rho p_\sigma \qquad /3/$$

$$\hat{\mu}^2 = - p^2 \equiv \Box . \qquad /4/$$

Они построены из генераторов преобразований оператора поля

$$p_\lambda = - i\partial_\lambda \quad ; \quad m_{\rho\sigma} = x_\rho p_\sigma - x_\sigma p_\rho + s_{\rho\sigma} , \qquad /5/$$

где $s_{\rho\sigma}$ –генераторы лоренцовых вращений компонент поля. Например, для спинорного оператора поля

$$s_{\rho\sigma} = \tfrac{1}{2} \sigma_{\rho\sigma} , \qquad /6/$$

а для векторного

---

x/ Оператор квадрата спина для замкнутых квантово-механических систем хорошо известен [15,17-19] и интенсивно используется при исследовании неоднородной группы Лоренца.

$$(s_{\rho\sigma})_{\mu\nu} = -i(\delta_{\rho\mu}\,\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\rho\nu}\,\delta_{\sigma\mu})\,. \qquad /7/$$

Можно доказать [1], что налагаемые обычно в свободном случае дополнительные условия эквивалентны требованию, чтобы поле, предназначаемое для описания спина s, было собственной функцией оператора $\hat{s}^2$ с собственным значением $s(s+1)$.

2.2 Заметим, что у взаимодействующих полей почти все квантовые числа /например, заряд, изоспин, четность и т.д./ совпадают с квантовыми числами свободных полей и соответствующих физических одночастичных состояний. Исключение составляют масса и, вообще говоря, спин.

Масса взаимодействующего поля обязательно должна быть размыта. Иначе не были бы возможны взаимодействия полей, их взаимопревращения. Поэтому оператор взаимодействующего поля с необходимостью должен быть суперпозицией собственных функций одного инварианта неоднородной группы Лоренца – оператора квадрата массы $\hat{\mu}^2$ – с различными собственными значениями. В соответствии с этим оператор взаимодействующего поля в импульсном пространстве отличен от нуля и при времене-подобных, и при пространственно-подобных, и при изотропных, и при нулевых 4-импульсах. Таким образом, взаимодействующее поле заведомо не преобразуется по одному неприводимому представлению неоднородной группы Лоренца.

Что касается второго инварианта неоднородной группы Лоренца – спина, то, вообще говоря, взаимодействующее поле может иметь компоненты, соответствующие некоторому спектру собственных значений $\hat{s}^2$. Например, взаимодействующее псевдовекторное поле обладает и спином 0 и спином 1. В то же время в ряде случаев взаимодействующее поле имеет только одно значение спина: скалярное поле всегда имеет спин 0, спинорное – 1/2, спин нейтрального векторного поля, взаимодействующего с сохраняющимся током /в частности, электромагнитного/, равен 1; у этих полей все квантовые числа, кроме массы, такие же, как у соответствующих физических одночастичных состояний.

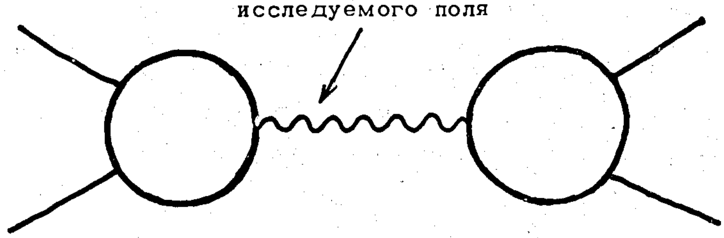
2.3 Это обсуждение приводит нас к естественному делению теорий поля на два класса:

<u>А/ Теории, в которых каждое взаимодействующее поле имеет определенный спин;</u>

<u>В/ Теории, в которых взаимодействующим полям нельзя приписать одного определенного спина.</u>

Определение теорий класса А означает определенный физический принцип ограничения числа степеней свободы, присущих взаимодействующему полю-принцип, основанный на неоднородной группе Лоренца. Ограничение числа спиновых степеней свободы, лишенное физической окраски, делалось во всех известных вариантах теории поля /см., например, [20]/. А именно, фактически всегда используются взаимодействующие поля, преобразующиеся по конечномерным неприводимым представлениям далекой от физики однородной группы Лоренца. Такие поля, обладая конечным числом компонент, могут иметь только конечное число спинов.

2.4. Смысл понятия "спин взаимодействующего поля" и различие между теориями класса А и класса В можно проиллюстрировать при помощи диаграммы, изображенной на рис.1, где конечное и начальное состояние соединены одной виртуальной линией ис-



Р и с. 1.

следуемого поля /в общем случае со всеми радиационными поправками/. Если промежуточная частица является скалярной, т.е. имеет спин 0, /или спинорной - со спином 1/2/, то она переносит только один момент количества движения: 0 /или 1/2/. Это проявляется в том, что амплитуда данного процесса содержит парциальные волны, соответствующие одному единственному полному моменту количества движения 0 /или 1/2/. Подобным же образом в теориях класса А каждое поле с любым спином переносит только один момент количества движения, равный спину поля. В то же время в теориях класса В поля способны переносить по нескольку моментов.

2.5. Различие между теориями класса А и класса В проявляется в форме записи дополнительных условий[x/]. В теориях класса В дополнительные условия для взаимодействующих полей отличны от дополнительных условий в свободном случае. Например, в простейшей псевдовекторной теории дополнительное условие выглядит

$$m^2 \partial_\mu A_\mu = 2iMg\bar{\psi}\gamma_5\psi \ , \qquad /8/$$

где g -константа связи псевдовекторного поля A_μ с массой m со спинорным полем ψ с массой M .

Для теорий класса А характерно, что в них дополнительные условия выглядят точно так же, как в свободном случае. Это прямое следствие того, что в теориях класса А каждое поле должно быть собственной функцией своего оператора $\hat{s}^2$ с заданным собственным значением $s(s+1)$. Поля с произвольными спинами обсуждены нами в[/1/]. Здесь мы приведем только результаты, касающиеся интересующих нас сейчас полей со спином 1.

2.6. Если потребовать, чтобы векторное поле $b_\mu(x)$ обладало только спином $s = 1$, т.е. было собственной функцией оператора $\hat{s}^2$ с собственным значением 1/1+1/=2, то отсюда, в частности, следует, что

[x/] Вопрос о различии дополнительных условий для свободных и взаимодействующих векторных полей обсуждался Байерлс и Пайерлсом[/21/] и Кеммером[/22/].

$$\hat{s}^2 < 0 | b_\mu(x) | \Phi_P > \equiv 2(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\Box}) < 0 | b_\nu(x) | \Phi_P > =$$

$$= 2 < 0 | b_\mu(x) | \Phi_P > \qquad /9/$$

при всех возможных физических состояниях Φ_P с полным импульсом P_μ. Анализ условия /9/ позволяет заключить, что ему эквивалентно условие

$$< 0 | \partial_\mu b_\mu(x) | \Phi_P > = 0 \qquad \text{при} \quad P^2 < 0, \; P_0 > 0, \qquad /10/$$

при выполнении которого поле b_μ на диаграмме рис. 1 переносит только момент количества движения 1. Выясним, какие ограничения для самих операторов b_μ должны вытекать из уравнений движения, чтобы выполнялось условие /10/.

а/ Если состояния Φ_P образуют полную систему /т.е. нет состояний с $P^2 = 0$ /, то на основании обычных гипотез о локальности, ковариантности и положительной определенности по теореме Федербуша и Джонсона /23-24/ в условии /10/ можно снять обкладки и записать его в операторной форме

$$\partial_\mu b_\mu = 0 . \qquad /11/$$

Если условие /11/ вытекает из уравнений движения, то тогда поле b_μ будет заведомо переносить на диаграмме рис. 1 только момент 1 /обладать спином 1/.

б/ Если векторное поле обладает массой 0, то среди состояний Φ_P есть состояния с $P^2 = 0$, и поэтому в условии /10/ нельзя снять обкладки. Вместе с тем векторное поле будет обладать спином 1 и в том случае, когда b_μ не определяется из уравнений движения, т.е. когда из последних не возникает никаких ограничений на $\partial_\mu b_\mu$ и, следовательно,

$$\partial_\mu b_\mu \quad \text{совершенно произвольно} \qquad /12/$$

Тогда никакие физические выводы не могут зависеть от величины $\partial_\mu b_\mu$ в силу ее полной произвольности. Величиной $\partial_\mu b_\mu$ мы можем распоряжаться по своему усмотрению, и, в частности, выбрать ее так, чтобы выполнялось условие /10/. Отсюда ясно, что векторное поле, для которого верно /12/ также описывает только спин 1.

2.7. Итак, условие /12/ есть альтернативный способ выделения спина 1. Оно эквивалентно требованию калибровочной инвариантности, назначение которой только и сводится к выделению спина 1 /и которая не имеет отношения к массе векторного поля /2,3/x/ /. Использование различных способов /11/ и /12/ диктуется соображениями практического удобства: в случае ненулевой массы удобнее применять /11/, в случае нулевой - /12/ /альтернатива /2//.

---

x/ К сделанному в /2/ выводу, что калибровочная инвариантность не требует равенства нулю массы векторного поля позднее пришел Швингер /25/ в результате анализа динамических моделей. Совсем недавно то же утверждение снова было повторено Фелдманом и Мэтьюсом /26/.

В соответствии с вышесказанным, теории класса А для векторного поля суть такие теории, в которых выполнена альтернатива /2/. Отметим, что электродинамика всегда есть теория класса А по отношению к электромагнитному полю, благодаря калибровочной инвариантности.

Мы приступаем теперь к перечислению всех теорий класса А для взаимодействия скалярных, спинорных и векторных полей.

3. Простой пример

3.1. Чтобы проследить характерные черты применяемой методики, рассмотрим в качестве иллюстративного примера взаимодействие одного нейтрального векторного поля A_μ с одним спинорным полем ψ. Самый общий лагранжиан с безразмерными константами связи есть

$$\mathcal{L}(x) = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A_\mu + a\,\partial_\nu A_\mu \cdot A_\nu A_\mu + \beta A_\mu A_\mu A_\nu A_\nu - \qquad /13/$$

$$- \bar\psi(\gamma\partial + M)\psi + i\bar\psi\gamma_\mu(g_1 + \gamma_5 g_2)\psi A_\mu + \frac{i}{2} f\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi_C A_\mu + \frac{i}{2} f^*\bar\psi_C\gamma_\mu\gamma_5\psi A_\mu ,$$

где $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, ψ_C – зарядово-сопряженный спинор: $\psi_C = C\bar\psi$. Свободная часть лагранжиана для A_μ и ψ выписана в стандартном виде, так, чтобы в свободном случае из уравнения для A_μ следовала альтернатива /2/. При написании лагранжиана /13/ мы требуем только релятивистскую инвариантность и не накладываем заранее никаких ограничений, связанных с сохранением четности и числа спинорных частиц. Член $\bar\psi\gamma_\mu\psi_C A_\mu$ /и эрмитовски сопряженный ему/ отсутствует, так как он тождественно равен нулю в силу статистики Ферми для ψ и свойств матрицы зарядового сопряжения C.

Из лагранжиана /13/ вытекают следующие уравнения движения

$$\Box A_\mu - \partial_\mu\partial_\nu A_\nu - m^2 A_\mu + a\,\partial_\mu A_\nu \cdot A_\nu - a A_\mu \partial_\nu A_\nu + 4\beta A_\nu A_\nu A_\mu +$$

$$+ i\bar\psi\gamma_\mu(g_1 + \gamma_5 g_2)\psi + \frac{i}{2} f\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi_C + \frac{i}{2} f^*\bar\psi_C\gamma_\mu\gamma_5\psi = 0 \qquad /14/$$

$$(\gamma\partial + M)\psi - i\gamma_\mu(g_1 + \gamma_5 g_2)\psi A_\mu - if\gamma_\mu\gamma_5\psi_C A_\mu = 0. \qquad /15/$$

Возьмем дивергенцию от уравнения /14/ и заменим в полученном выражении $\Box A_\mu$ согласно уравнению /14/, а производные от ψ – согласно уравнению /15/. В результате получим:

$$-m^2\partial_\mu A_\mu + a\,\partial_\mu A_\nu \cdot \partial_\mu A_\nu - a\,\partial_\mu A_\mu \cdot \partial_\nu A_\nu - a A_\mu \cdot \partial_\mu\partial_\nu A_\nu + 8\beta\,\partial_\mu A_\nu \cdot A_\nu A_\mu +$$

$$+ 4\beta A_\nu A_\nu \partial_\mu A_\mu + a A_\mu \{ m^2 A_\mu + \partial_\mu\partial_\nu A_\nu - a\,\partial_\mu A_\nu \cdot A_\nu + a A_\mu \partial_\nu A_\nu - 4\beta A_\nu A_\nu A_\mu \qquad /16/$$

$$- i\bar\psi\gamma_\mu(g_1 + \gamma_5 g_2)\psi - \frac{i}{2} f\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi_C - \frac{i}{2} f^*\bar\psi_C\gamma_\mu\gamma_5\psi \} + iM\{ 2g_2\bar\psi\gamma_5\psi +$$

$$+ f\bar\psi\gamma_5\psi_C + f^*\bar\psi_C\gamma_5\psi \} = 0 .$$

3.2. Рассмотрим сначала массивное поле $(m \neq 0)$. В этом случае мы требуем, чтобы из /16/ следовало условие Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0 . \qquad /17/$$

Докажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha = \beta = 0, \quad M g_2 = M f = 0. \qquad /18/$$

Достаточность условий /18/ очевидна. Необходимость. Пусть $\partial_\mu A_\mu = 0$. Тогда /16/ можно переписать в виде

$$\alpha\, \partial_\mu A_\nu\, \partial_\mu A_\nu + 8\beta\partial_\mu A_\nu \cdot A_\nu A_\mu +$$

$$+ \alpha A_\mu [m^2 A_\mu - \alpha\partial_\mu A_\nu \cdot A_\nu - 4\beta A_\nu A_\nu A_\mu - i\psi\gamma_\mu (g_1 + \gamma_5 g_2)\psi - \frac{i}{2} f\bar\psi\gamma_\mu\gamma_5\psi_c - \qquad /16'/$$

$$- \frac{i}{2} f^* \bar\psi_c \gamma_\mu \gamma_5 \psi] + iM[2g_2\bar\psi\gamma_5\psi + f\bar\psi\gamma_5\psi_c + f^*\bar\psi_c\gamma_5\psi] = 0$$

где остались только производные поля A_μ не выше первой и нет членов с производными поля ψ. Если бы равенство /16'/ не выполнялось тождественно, то оно представляло бы собой еще одно дополнительное условие /вдобавок к условию /17/ и условию, которым является уравнение /14/ при $\mu = 4$ /. Это означало бы, что у A_μ и ψ меньше степеней свободы, чем необходимо для описания спинов 1 и 1/2, что недопустимо. Поэтому в равенстве /16'/ каждый член независимой структуры должен быть равен нулю сам по себе, т.е. должны выполняться соотношения /18/. Так, имеется единственный член вида $\alpha\partial_\mu A_\nu \cdot \partial_\mu A_\nu$. Он должен быть равен нулю, откуда следует, что $\alpha = 0$. После исключения членов с α остается один член вида $8\beta\,\partial_\mu A_\nu \cdot A_\nu A_\mu$, и, следовательно $\beta = 0$. Продолжая такой анализ, завершаем доказательство необходимости условий /18/.

3.3. Среди компонент A_μ не все независимы. Поэтому придирчивый читатель может задать вопрос, действительно ли условие /16'/ излишне ограничивает число степеней свободы, почему необходимо почленное приравнивание нулю и почему из равенства нулю отдельных членов следует, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

В качестве ответа на этот вопрос мы покажем, что в классической теории поля при наличии равенства /16'/ с α, β, g и $f \neq 0$ невозможно было бы произвольно задавать начальные значения компонент полей $\psi(\vec{x}, 0)$, $A_m(\vec{x}, 0)(m = 1, 2, 3)$ и сопряженных к последним импульсов $\Pi_m(\vec{x}, 0)$

$$\Pi_m = \partial_4 A_m - \partial_m A_4 + \alpha A_m A_4 . \qquad /19/$$

Сперва выберем начальные условия в виде:

$$\psi(\vec{x}, 0) = 0, \quad A_m(\vec{x}, 0) = 0$$

$$\Pi_m(\vec{x}, 0) = i a_m \sin(\vec{k}\vec{x}), \quad / (\vec{a}\vec{k}) = 0, \quad \vec{a}^2 = 1 /^{*)} \qquad /20/$$

Тогда уравнение /14/ при $\mu = 4$, носящее характер дополнительного условия, примет вид:

$$-m^2 A_4 + 4\beta A_4^3 = 0,$$

а с учетом этого равенства, условие /16'/ запишется

x/ Для нас существенно только свойство $\partial_m \Pi_m(\vec{x}, 0) = 0$.

$$a\Pi_m(\vec{x},0)\Pi_m(\vec{x},0)=0$$

откуда ясно, что a должно быть равно нулю.

После этого система дополнительных условий /при $\psi(\vec{x},0)=0$ / примет вид:

$$-\partial_m\Pi_m - m^2 A_4 + 4\beta A_\mu A_\mu A_4 = 0 \qquad /14'/$$

$$\beta\,\partial_\nu (A_\mu A_\mu) A_\nu = 0 \qquad /16''/$$

$$\partial_\mu A_\mu = 0 . \qquad /17/$$

Теперь зададим начальные условия так, чтобы

$$A_m(\vec{x},0)A_m(\vec{x},0) = const \neq 0, \quad \partial_m \Pi_m(\vec{x},0) = const \neq 0, \quad \partial_m A_m(\vec{x},0)=0, \qquad /21/$$

например, в виде

$$\vec{A}(\vec{x},0) = \vec{a}\cos([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{x}) + \vec{b}\sin([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{x})$$

$$(\vec{a}\vec{b})=0 \qquad \vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}=1 \qquad /22/$$

$$\vec{\Pi}(\vec{x},0)=\vec{x} .$$

В силу /21/ из /14'/ можно заключить, что $A_4(\vec{x},0)=const\neq 0$ и что, следовательно, $A_\mu(\vec{x},0)A_\mu(\vec{x},0)=const$. Тогда условие /16''/ запишется

$$2\beta\Pi_m(\vec{x},0)A_m(\vec{x},0)=0,$$

т.е. β также должно быть равно нулю. Задавая соответствующим образом ненулевые начальные условия для ψ, убеждаемся в необходимости остальных соотношений /18/.

Аналогичным образом, в квантовой теории поля требование непротиворечивости уравнений движения, условия Лоренца /17/ и одновременных коммутаторов /заменяющих начальные условия/ привело бы к тем же соотношениям /18/.

3.4. До сих пор анализ касался массивного поля $(m\neq 0)$. При $m=0$, вместо выполнения условия Лоренца следует потребовать полной произвольности $\partial_\mu A_\mu$.
Из /16/ совершенно очевидно, что снова должны быть выполнены соотношения /18/.

3.5. Таким образом доказано, что в теориях класса А нейтральное векторное поле а/ связано с сохраняющимся током, б/ у него нет самодействия и, в зависимости от значений масс, осуществляются следующие возможности:

1/ Массы спинорного и векторного полей отличны от нуля: $M\neq 0$ и $m\neq 0$.
Лагранжиан имеет вид:

$$\mathfrak{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2}A_\mu A_\mu - \bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi + ig_1\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu . \qquad /23/$$

Замечательно, что в этом случае для выполнения условия Лоренца наряду с а/ и б/, потребовалось, чтобы в/ сохранялось число спинорных частиц и теория была инвариантна относительно преобразования $\psi \to e^{ia}\psi$; и чтобы г/ сохранялась четность.

2/ $M \neq 0$, $m = 0$. Лагранжиан снова записывается в форме /23/, но с $m=0$. Такая теория есть максвелловская электродинамика. 4- дивергенция $\partial_\mu A_\mu$ в этом случае совершенно произвольна и, в соответствии с этим, появляется калибровочная инвариантность. Выводы а/-г/ по-прежнему верны.x/

3/ $M = 0$, $m \neq 0$. К лагранжиану добавляются члены с g_2 и f

$$\mathfrak{L} = -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A_\mu - \bar{\psi}\gamma\partial\psi + j_\mu A_\mu ,$$

где

$$j_\mu = i\bar{\psi}\gamma_\mu (g_1 + \gamma_5 g_2)\psi + \frac{i}{2} f \bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \psi_c + \frac{i}{2} f^* \bar{\psi}_c \gamma_\mu \gamma_5 \psi . \qquad /24/$$

Выводы в/ и г/ теперь теряют силу – ни четность, ни число спинорных частиц теперь не обязаны сохраняться. Сохранению тока j_μ соответствует любопытное обобщение фазовой инвариантности, а именно, инвариантность относительно однопараметрической группы преобразований /подгруппы группы Паули-Гюрси /11,12/

$$\psi' = e^{i\omega g_2 \gamma_5} \{ [\cos(\omega a) + i \sin\phi \cdot \sin(\omega a)]\psi + \frac{if}{|f|}\gamma_5 \cos\phi \cdot \sin(\omega a)\psi_c \}, \qquad /25/$$

где ω – параметр преобразования, а a и ϕ есть функции констант связи

$$a = \sqrt{g_1^2 + |f|^2} \; ; \; \sin\phi = \frac{g_1}{a} \; ; \; \cos\phi = \frac{|f|}{a} .$$

4/ $M = 0$; $m = 0$. Сюда относится все сказанное в пункте 3/. Этот случай интересен тем, что он открывает некоторую специфическую возможность взаимодействия безмассовых спинорных частиц с электромагнитным полем.

4. Замечания об общем подходе

В дальнейшем нам придется исследовать взаимодействие любого числа векторных, спинорных и скалярных полей. При этом мы будем руководствоваться следующими простыми соображениями, которые ясны из рассмотренного выше простого примера:

1/ Уравнения движения не должны давать лишних /сверх необходимых/ ограничений на число степеней свободы полей, причем из них должно следовать либо равенство нулю 4- дивергенций векторных полей, либо произвольность последних. Поэтому в дополнительных условиях, получаемых путем взятия 4-дивергенции от уравнений движения векторных полей, всегда будет необходимо и достаточно обратить в нуль члены независимой структуры. Как и в простом примере § 3, необходимость следует из того, что в противном случае нельзя было бы задать нужные начальные условия в задаче Коши произвольным образом /а в квантовой теории – непротиворечиво задать одновременные перестановочные соотношения/ .

x/ На сохранение четности в электродинамике из-за калибровочной инвариантности в предположении перенормируемости, т.е. фактически безразмерности констант связи, указывал В.Г. Соловьев /27/.

2/ Ограничения на константы связи можно получать последовательно: сперва рассмотреть взаимодействие векторных полей между собой, затем перейти к исследованию взаимодействия со спинорными полями, и, наконец, к анализу взаимодействий векторных и спинорных полей со скалярными. Каждый последующий этап будет давать новые соотношения, не изменяя полученных ранее. Это можно проследить на простом примере § 3: можно было бы сначала рассмотреть самодействие векторного поля и убедиться, что $\alpha = \beta = 0$, а затем, исследуя взаимодействие со спинорным полем, получить остальные соотношения /18/.

5. Взаимодействие векторных полей между собой

5.1. В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе, начнем со взаимодействия векторных полей. Пусть имеется некоторое число n таких полей $b_\mu^i (i = 1,\dots n)$. Наиболее общий лагранжиан, описывающий все мыслимые взаимодействия с безразмерными константами связи, можно записать в виде:

$$\mathfrak{L}_I(x) = -\tfrac{1}{4} f_{\mu\nu}^i f_{\mu\nu}^i - \tfrac{1}{2}(m^2)_{ij} b_\mu^i b_\mu^j + a_{ijk}\, \partial_\nu b_\mu^i b^j b_\nu^k +$$

$$+ \beta_{ijk\ell}\, b_\mu^i b_\mu^j b_\nu^k b_\nu^\ell + \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,(\gamma_{ijk}\, \partial_\mu b_\nu^i b_\lambda^j b_\rho^k + \delta_{ijk\ell}\, b_\mu^i b_\nu^j b_\lambda^k b_\rho^\ell), \qquad /26/$$

где $f_{\mu\nu}^i = \partial_\mu b_\nu^i - \partial_\nu b_\mu^i$, а a_{ijk}, $\beta_{ijk\ell}$, γ_{ijk} и $\delta_{ijk\ell}$ – вещественные/ для обеспечения эрмитовости лагранжиана/ числовые коэффициенты – константы связи. По повторяющимся индексам всегда подразумевается суммирование. Симметричную эрмитову матрицу $\|(m^2)_{ij}\|$ естественно считать диагонализуемой и обладающей неотрицательными собственными значениями. Заранее не предполагается, что она кратна единичной; поэтому у разных полей массы могут быть как одинаковыми, так и неодинаковыми. Свободная часть лагранжиана /26/ с самого начала записана в таком виде, чтобы в отсутствие взаимодействия каждое поле удовлетворяло обычному уравнению для векторного поля со спином 1. Отметим также, что члены с γ и δ учитывают возможность несохранения четности. Из самих определений нелинейных членов следуют свойства

$$\beta_{ijk\ell} = \beta_{jik\ell} = \beta_{ij\ell k} = \beta_{k\ell ij} \qquad /27/$$

$$\gamma_{ijk} = -\gamma_{ikj} \qquad /28/$$

$\delta_{ijk\ell}$ полностью антисимметричен по всем индексам /29/

С учетом этих свойств из лагранжиана /26/ получаем уравнения движения

$$\Box\, b_\mu^i - \partial_\mu \partial_\nu b_\nu^i - (m^2)_{ij} b_\mu^j - a_{ijk}\partial_\nu (b_\mu^j b_\nu^k) + a_{jik}\, \partial_\nu b_\mu^j b_\nu^k +$$

$$+ a_{jki}\, \partial_\mu b_\nu^j b_\nu^k + 4\beta_{ijk\ell}\, b_\mu^j b_\nu^k b_\nu^\ell + \qquad /30/$$

$$+ 2(\gamma_{ijk} - \gamma_{jki})\,\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \partial_\nu b_\lambda^j b_\rho^k + 4\delta_{ijk\ell}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, b_\nu^j b_\lambda^k b_\rho^\ell = 0 .$$

Беря 4-дивергенцию от этого уравнения и исключая в полученном соотношении $\Box\, b^j_\mu$ с помощью уравнения /30/, найдем

$$
\begin{aligned}
&-(m^2)_{ij}\,\partial_\mu b^j_\mu - a_{ijk}(\partial_\mu \partial_\nu b^j_\mu b^k_\nu + b^j_\mu \partial_\mu \partial_\nu b^k_\nu + \partial_\mu b^j_\mu \partial_\nu b^k_\nu + \partial_\nu b^j_\mu \partial_\mu b^k_\nu) + \\
&+ a_{jik}(\partial_\mu \partial_\nu b^j_\mu \cdot b^k_\nu + \partial_\nu b^j_\mu \cdot \partial_\mu b^k_\nu) + a_{mni}\, b^n_\mu \{ \partial_\mu \partial_\nu b^m_\nu + (m^2)_{mj} b^j_\mu + \\
&+ a_{mjk}(\partial_\nu b^j_\mu b^k_\nu + b^j_\mu \partial_\nu b^k_\nu) - a_{jmk} \partial_\nu b^j_\mu b^k_\nu - a_{jkm}\, \partial_\mu b^j_\nu \cdot b^k_\nu - \\
&- 4\beta_{mjk\ell}\, b^j_\mu b^k_\nu b^\ell_\nu - 2(\gamma_{mjk} - \gamma_{jkm})\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \partial_\nu b^j_\lambda b^k_\rho - \\
&- 4\delta_{mjk\ell}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, b^j_\nu b^k_\lambda b^\ell_\rho \} + a_{jki}\, \partial_\mu b^j_\nu \cdot \partial_\mu b^k_\nu + \\
&+ 4\beta_{ijk\ell}\,(\partial_\mu b^j_\mu \cdot b^k_\nu b^\ell_\nu + 2 b^j_\mu b^k_\nu \partial_\mu b^\ell_\nu) - 2\gamma_{jki}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu b^j_\lambda \partial_\mu b^k_\rho + \\
&+ 12\delta_{ijk\ell}\, \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \partial_\mu b^j_\nu \cdot b^k_\lambda b^\ell_\rho = 0
\end{aligned}
\qquad /31/
$$

5.2. Мы требуем, чтобы выполнялась альтернатива /2/. Так же, как и в простом примере и как было сформулировано в § 4, для этого необходимо и достаточно, чтобы каждая комбинация членов одинаковой структуры тождественно равнялась нулю. Отсюда мы найдем свойства коэффициентов a_{ijk}, $\beta_{ijk\ell}$, γ_{ijk} и $\delta_{ijk\ell}$. Рассмотрим сначала члены, не содержащие $\partial_\mu b^i_\mu$. Имеется только один член вида $a_{jki}\, \partial_\mu b^j_\nu \partial_\mu b^k_\nu$. Приравнивая его нулю, найдем, что

$$a_{jki} = - a_{kji}\,. \qquad /32/$$

Далее, приравнивание нулю комбинации

$$-a_{ijk}\; \partial_\nu b^j_\mu\, \partial_\mu b^k_\nu + a_{jik}\, \partial_\nu b^j_\mu\, \partial_\mu b^k_\nu$$

с учетом /32/ дает

$$a_{ijk} = - a_{ikj}\;, \qquad /33/$$

что вместе с соотношением /32/ означает полную антисимметричность коэффициентов a_{ijk}. Приравнивая нулю 4 члена 3-ей степени по полю, обладающих структурой $\partial_\nu b_\mu b_\mu b_\nu$, получаем с учетом /32/, что

$$8\beta_{ijk\ell} + 2a_{mki}\, a_{m\ell j} - a_{mji}\, a_{\ell km} = 0\,. \qquad /34/$$

Симметризуя и антисимметризуя равенство /34/ по i и j и принимая при этом во внимание свойство симметрии коэффициентов β /27/ и доказанную выше полную антисимметрию a, находим

$$8\beta_{ijk\ell} + a_{mki}\, a_{m\ell j} + a_{mkj}\, a_{m\ell i} = 0 \qquad /35/$$

и

$$a_{mij}\, a_{k\ell m} + a_{mki}\, a_{j\ell m} + a_{mjk}\, a_{i\ell m} = 0. \qquad /36/$$

Приравнивание нулю единственного члена четвертой степени по полю b_μ, но без $\epsilon_{\mu\gamma\lambda\rho}$, дает условие

$$a_{mni}\, \beta_{mjk\ell} + a_{mji}\, \beta_{mnk\ell} + a_{mki}\, \beta_{m\ell nj} + a_{m\ell i}\, \beta_{mknj} = 0, \qquad /37/$$

которое, как можно проверить, автоматически выполняется как следствие соотношений /35/ и /36/, /32/, /33/. Рассмотрим теперь члены, нарушающие четность. Приравнивание нулю члена структуры $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \partial_\nu b_\lambda\, \partial_\mu b_\rho$ приводит к соотношению

$$\gamma_{jki} = -\gamma_{kji}\ . \qquad /38/$$

Соотношения /28/ и /38/ доказывают полную антисимметричность коэффициента γ_{ijk}. В результате члены с γ_{ijk} вообще выпадают из уравнения движения /30/. И это понятно, так как член в лагранжиане, содержащий γ_{ijk}, при полной антисимметрии γ_{ijk} есть 4-дивергенция, и, следовательно, несущественен.

После исчезновения членов с γ_{ijk} остается только один член структуры $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, \partial_\mu b_\nu\, b_\lambda\, b_\rho$ и требование равенства его нулю дает

$$\delta_{ijk\ell} = 0\ . \qquad /39/$$

Этим исключается необходимость рассмотрения других членов, содержащих $\delta_{ijk\ell}$.

Таким образом, доказано, что члены не сохраняющие четность, несовместимы с условием Лоренца.

Легко убедиться, что с учетом полученных свойств коэффициентов связи /32/,/33/ и /35/ тождественно обращаются в нуль члены, содержащие $\partial_\mu b^i_\mu$ /кроме члена $(m^2)_{ij}\, \partial_\mu b^j_\mu$ /, что существенно для доказательства достаточности, а при нулевых массах также и необходимости.

Наконец, нам осталось рассмотреть член $a_{mni}\, b^n_\mu\, (m^2)_{mj}\, b^j_\mu$. Приравнивая и его нулю, получим последнее условие, определяющее выбор масс

$$a_{mnj}\, (m^2)_{mj} = -\, a_{mji}\, (m^2)_{mn}\ . \qquad /40/$$

5.3. Итак, доказано, что теория взаимодействия между векторными полями с безразмерными константами связи будет теорией класса A тогда и только тогда, когда

1/ лагранжиан имеет вид:

$$\mathfrak{L}(x) = -\tfrac{1}{4}\, G^i_{\mu\nu}\, G^i_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}(m^2)_{ij}\, b^i_\mu\, b^j_\mu\ , \qquad /41/$$

где с учетом того, что $\beta_{ijk\ell}$ выражается через a_{ijk} согласно /35/, введено компактное обозначение

$$G^i_{\mu\nu} = \partial_\mu b^i_\nu - \partial_\nu b^i_\mu + a_{ijk}\, b^j_\mu\, b^k_\nu\ ; \qquad /42/$$

2/ a_{ijk} полностью антисимметрично /43/

3/ a_{ijk} удовлетворяет структурному соотношению /36/, которое, вводя матрицы $(a_i)_{jk} = a_{ijk}$, можно записать в матричной форме

$$[a_i, a_j] = -a_{ijk}\, a_k ; \qquad /44/$$

4/ массы ограничены условием /40/, которое удобно записать в виде

$$[a_i, m^2] = 0 . \qquad /45/$$

5.4. Следствия:

а/ Соотношения /43/ и /44/ означают, что матрицы a_i образуют регулярное представление алгебры Ли. /Регулярным представлением алгебры Ли называют представление матрицами, матричные элементы которых суть структурные константы алгебры a_{ijk}./

б/ Отсюда ясно, и это легко непосредственно проверить, что такая теория инвариантна относительно группы преобразований, инфинитезимальный вид которых /параметры ω_j/ следующий

$$b^{i\prime}_{\mu} = b^{i}_{\mu} + a_{ijk}\, \omega_j\, b^{k}_{\mu} \qquad /46/$$

/величина $G^{i}_{\mu\nu}$ преобразуется по тому же закону/.

в/ Любое представление разбивается на неприводимые, а векторные поля - на соответствующие мультиплеты. Преобразование /46/ преобразует поля, входящие в тот или иной мультиплет, только друг через друга. Если представление неприводимо, то из коммутации матрицы m^2 со всеми матрицами a_i /45/ по лемме Шура следует, что m^2 кратна единичной матрице. Поэтому внутри каждого мультиплета массы полей одинаковы.

г/ Во взаимодействии сохраняется четность и векторным полям следует приписать спин-четность 1^-.

§ 6. Взаимодействие полей со спинами 1 и 1/2

В качестве следующего шага рассмотрим взаимодействие векторных полей b^{i}_{μ} со спинорными ψ^{r} $(r = 1, \dots m)$, которые удобно объединить в столбец

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi^{1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi^{m} \end{bmatrix} \qquad /47/$$

где каждое ψ^{r} -обычный четырехкомпонентный дираковский спинор. Наиболее полный лагранжиан системы полей запишется

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{1/2,1} = \mathfrak{L}_1 - \bar{\psi}(\gamma\partial + M)\psi + i\bar{\psi}\gamma_{\mu}(T^{(1)}_j + \gamma_5 T^{(2)}_j)\psi b^{j}_{\mu} + \\ + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma_{\mu}(T^{(3)}_j + \gamma_5 T^{(4)}_j)\psi_C b^{j}_{\mu} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_C\gamma_{\mu}(T^{(3)+}_j + \gamma_5 T^{(4)+}_j)\psi b^{j}_{\mu} \end{aligned} \qquad /48/$$

В этом выражении + означает эрмитовское сопряжение; $\mathfrak{L}_1$ –лагранжиан самодействия векторного поля /26/; ψ_c – зарядово-сопряженный спинор; M –массовый оператор, сопоставляющий каждому спинору ψ^r свою массу и представляемый диагонализуемой матрицей с неотрицательными собственными значениями[x/]. Матрицы $T_j^{(\;)}$ суть компактная запись соответствующих констант связи. Они перепутывают спиноры ψ^r, но не действуют на компоненты каждого такого спинора. В силу эрмитовости лагранжиана

$$T_j^{(1)} \text{ и } T_j^{(2)} \text{ эрмитовы,}$$
$$T_j^{(3)} \text{ – антисимметричны, } T_j^{(4)} \text{ –симметричны}^{xx/} \qquad /49/$$

Члены с матрицами $T_j^{(3)}$ и $T_j^{(4)}$ описывают возможные взаимодействия с несохранением числа спинорных частиц /например, взаимодействия с векторными бозонами, обладающими барионным зарядом/.

Лагранжиан /48/ удобно записать в более компактной форме. Введем для этого столбец удвоенной размерности

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi + \psi_c \\ i(\psi - \psi_c) \end{pmatrix} \qquad /50/$$

со свойством

$$\overline{\Psi} = \Psi C^{-1} \qquad /51/$$

и матрицы

$$\hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right) \qquad /52/$$

$$\hat{T}_j^{(1)} = \tfrac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} T_j^{(1)} - \tilde{\tilde{T}}_j^{(1)} + T_j^{(3)} + T_j^{(3)+} & -i(T_j^{(1)} + \tilde{\tilde{T}}_j^{(1)} - T_j^{(3)} + T_j^{(3)+}) \\ \hline i(T_j^{(1)} + \tilde{\tilde{T}}_j^{(1)} + T_j^{(3)} - T_j^{(3)+}) & T_j^{(1)} - \tilde{\tilde{T}}_j^{(1)} - T_j^{(3)} - T_j^{(3)+} \end{array}\right) \qquad /53/$$

$$\hat{T}_j^{(2)} = \tfrac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} T_j^{(2)} + \tilde{\tilde{T}}_j^{(2)} + T_j^{(4)} + T_j^{(4)+} & -i(T_j^{(2)} - \tilde{\tilde{T}}_j^{(2)} - T_j^{(4)} + T_j^{(4)+}) \\ \hline i(T_j^{(2)} - \tilde{\tilde{T}}_j^{(2)} + T_j^{(4)} - T_j^{(4)+}) & T_j^{(2)} + \tilde{\tilde{T}}_j^{(2)} - T_j^{(4)} - T_j^{(4)+} \end{array}\right), \qquad /54/$$

где значок $\approx$ означает транспонирование.

---

x/ Массы всех спинорных полей можно считать неотрицательными, так как этого всегда можно добиться заменами $\psi^r \to \gamma_5 \psi^r$.

xx/ Симметричные части у матриц $T_j^{(3)}$ и антисимметричные части у $T_j^{(4)}$ автоматически дают нуль. В самом деле, с учетом антикоммутативности полей ψ при произвольной матрице T

$$\bar{\psi}\gamma_\mu T \psi_c = -\bar{\psi}\gamma_\mu \tilde{\tilde{T}} \psi_c, \quad \bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 T \psi_c = \bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \tilde{\tilde{T}} \psi_c.$$

Тогда $\mathfrak{L}_{1/2,1}$ примет вид

$$\mathfrak{L}_{1/2,1} = \mathfrak{L}_1 - \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}(\gamma\partial + \hat{M})\Psi + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu(\hat{T}_j^{(1)} + \gamma_5 \hat{T}_j^{(2)})\Psi\, b_\mu^j \; . \qquad /55/$$

В соответствии с конструкцией члена взаимодействия в /55/ и свойствами Ψ относительно зарядового сопряжения /51/

матрицы $\hat{T}_j^{(1)}$ антисимметричны, $\hat{T}_j^{(2)}$ симметричны,
и, кроме того, и те и другие эрмитовы. /56/

Из лагранжиана /55/ следуют уравнения движения

$$\text{ЛЧУ}(30) + \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma_\mu(\hat{T}_l^{(1)} + \gamma_5 \hat{T}_l^{(2)})\Psi = 0 \qquad /57/$$

$$-(\gamma\partial + \hat{M})\Psi + i\gamma_\mu(\hat{T}_j^{(1)} + \gamma_5 \hat{T}_j^{(2)})\Psi\, b_\mu^j = 0 . \qquad /58/$$

Здесь и ниже ЛЧУ заменяет слова "левая часть уравнения".

Теперь 1/ возьмем 4-дивергенцию от уравнения /57/, в полученном равенстве 2/ исключим $\Box b_\mu^l$ при помощи /57/, и, наконец, 3/ от производных спинорного поля избавимся с помощью /58/. В результате получим

$$\text{ЛЧУ}(31) - i a_{kjl}\, b_\mu^j \bar{\Psi}\gamma_\mu(\hat{T}_k^{(1)} + \gamma_5 \hat{T}_k^{(2)})\Psi - \qquad /59/$$

$$- i\bar{\Psi}[\hat{T}_l^{(1)}, \hat{M}]\Psi + i\bar{\Psi}\gamma_5[\hat{T}_l^{(2)}, \hat{M}]_+\Psi - \bar{\Psi}\gamma_\mu[\hat{T}_l^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_l^{(2)}, \hat{T}_j^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_j^{(2)}]\Psi\, b_\mu^j = 0$$

/ [,] означает коммутатор, а $[\ ,\ ]_+$ –антикоммутатор/.

Чтобы векторные поля обладали только спином 1 /принадлежность к классу A /, должна выполняться альтернатива /2/. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в выражении /59/ суммы членов одинаковой структуры тождественно обращались в нуль /ср. § 3/.

Нетрудно понять, что соотношения для констант связи самодействия векторных полей, найденные в § 4 путем анализа членов, входящих в ЛЧУ /31/, не изменятся. Анализируя новые члены, получим соотношения для матриц связи $\hat{T}$ и матрицы массы $\hat{M}$:

$$[\hat{T}_l^{(1)}, \hat{M}] = 0 \qquad /60/$$

$$[\hat{T}_l^{(2)}, \hat{M}]_+ = 0 \qquad /61/$$

$$[\hat{T}_l^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_l^{(2)}, \hat{T}_j^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_j^{(2)}] = i a_{ljk}(\hat{T}_k^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_k^{(2)}) . \qquad /62/$$

Соотношения /58/ – /60/ исчерпывают ограничения на матрицы $\hat{T}$ и $\hat{M}$, вытекающие из требования, чтобы соблюдалась альтернатива /2/. Соотношение /62/ означает, что матрицы $\hat{T}_k^{(1)} + \gamma_5\hat{T}_k^{(2)}$ образуют представление алгебры Ли. Поэтому теория инвариантна относительно группы преобразований с инфинизимальными преобразованиями вида

$$b^{i'}_{\mu} = b^{i}_{\mu} + a_{ijk}\,\omega_j\, b^{k}_{\mu}\ ; \quad \Psi' = \Psi - i\,\omega_j\,(\hat{T}^{(1)}_j + \gamma_5\,\hat{T}^{(2)}_j)\Psi \qquad /63/$$

/ ω_j - инфинитезимальные параметры/.

Для приложений, а также для анализа общего случая, когда среди спинорных полей есть поля с нулевыми и ненулевыми массами, удобно расписать соотношения /60/-/62/ непосредственно через матрицы $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ и $T^{(4)}$, стоящие в лагранжиане /48/

$$[\,T^{(1)}_i, M\,] = 0 \qquad /64/$$

$$[\,T^{(2)}_i, M\,]_+ = 0 \qquad /65/$$

$$[\,T^{(3)}_i, M\,] = 0 \qquad /66/$$

$$[\,T^{(4)}_i, M\,]_+ = 0 \qquad /67/$$

$$[\,T^{(1)}_i, T^{(1)}_j\,] + [\,T^{(2)}_i, T^{(2)}_j\,] + T^{(3)}_i\,T^{(3)+}_j - T^{(3)}_j\,T^{(3)+}_i + \qquad /68/$$

$$+ T^{(4)}_i T^{(4)+}_j - T^{(4)}_j\,T^{(4)+}_i = i a_{ijk}\,T^{(1)}_k$$

$$[\,T^{(1)}_i, T^{(2)}_j\,] + [\,T^{(2)}_i, T^{(1)}_j\,] + T^{(3)}_i\,T^{(4)+}_j - T^{(3)}_j\,T^{(4)+}_i + \qquad /69/$$

$$+ T^{(4)}_i\,T^{(3)+}_j - T^{(4)}_j\,T^{(3)+}_i = i a_{ijk}\,T^{(2)}_k$$

$$T^{(1)}_i\,T^{(3)}_j - T^{(1)}_j\,T^{(3)}_i + T^{(2)}_i\,T^{(4)}_j - T^{(2)}_j\,T^{(4)}_i - \qquad /70/$$

$$- T^{(3)}_i\,\overset{\approx}{T}{}^{(1)}_j + T^{(3)}_j\,\overset{\approx}{T}{}^{(1)}_i + T^{(4)}_i\,\overset{\approx}{T}{}^{(2)}_j - T^{(4)}_j\,\overset{\approx}{T}{}^{(2)}_i = i a_{ijk}\,T^{(3)}_k$$

$$T^{(1)}_i T^{(4)}_j - T^{(1)}_j\,T^{(4)}_i + T^{(2)}_i\,T^{(3)}_j - T^{(2)}_j\,T^{(3)}_i - \qquad /71/$$

$$- T^{(4)}_i\,\overset{\approx}{T}{}^{(1)}_j + T^{(4)}_j\,\overset{\approx}{T}{}^{(1)}_i + T^{(3)}_i\,\overset{\approx}{T}{}^{(2)}_j - T^{(3)}_j\,\overset{\approx}{T}{}^{(2)}_i = i a_{ijk}\,T^{(4)}_k .$$

Закон преобразования спинорных полей /63/ соответственно запишется

$$\psi' = \psi - i\,\omega_j[\,T^{(1)}_j\psi + T^{(3)}_j\,\psi_C + \gamma_5\,(\,T^{(2)}_j\psi + T^{(4)}_j\,\psi_C)] . \qquad /72/$$

Покажем теперь, что между спинорными полями без массы и спинорными полями с массой в теориях класса A нет прямого взаимодействия. Действительно, если имеются и те, и другие поля, то массовая матрица представима в блочном виде

$$M = \left(\begin{array}{c|c} M' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) , \qquad /73/$$

где матрица M' приводима к диагональному виду с положительными, отличными от нуля, элементами. Представляя матрицы $T^{/1/}$, $T^{/2/}$, $T^{/3/}$ и $T^{/4/}$ в таком же блочном виде и анализируя их перестановочные соотношения /64/-/67/ с массовой матрицей M, легко выяснить, что они обязаны иметь вид

$$T_i^{(1)} = \left\{\begin{array}{c|c} A_i^{(1)} & 0 \\ \hline 0 & B_i^{(1)} \end{array}\right\}; \quad T_i^{(2)} = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B_i^{(2)} \end{array}\right\}; \quad T_i^{(3)} = \left\{\begin{array}{c|c} A_i^{(3)} & 0 \\ \hline 0 & B_i^{(3)} \end{array}\right\}; \quad T_i^{(4)} = \left\{\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & B_i^{(4)} \end{array}\right\} \qquad /74/$$

Это означает, что спинорные поля с массой не взаимодействуют прямо со спинорными полями без массы. Те и другие можно рассматривать порознь:

а/ Для полей с нулевыми массами ($M = 0$) соотношения /60/ /или /68/-/71// и закон преобразования /63/ /или /72// справедливы в своей наиболее общей форме. Группа преобразований /63/ /или /72// является обобщением группы Паули[/11/] и Гюрси[/12/] на случай многих спинорных полей с массой 0.

б/ Если массы всех спинорных полей отличны от нуля, то из /61/ с учетом диагонализуемости матрицы M следует, что

$$\hat{T}_i^{(2)} = 0 \qquad /\text{т.е.} \quad T_i^{(2)} = T_i^{(4)} = 0/, \qquad /75/$$

и тогда соотношения /62/ и закон преобразования Ψ упрощаются

$$[\hat{T}_i^{(1)}, \hat{T}_j^{(1)}] = i a_{ijk} \hat{T}_k^{(1)} \qquad /76/$$

$$\Psi' = \Psi - i\omega_j T_j^{(1)} \Psi \qquad \psi' = \psi - i\omega_j (T_j^{(1)}\psi + T_j^{(3)}\psi_c). \qquad /77/$$

Этот класс преобразований есть максимальное обобщение фазового преобразования $\psi \to e^{i\Lambda}\psi$ в случае многих полей с ненулевой массой. Относительно таких преобразований, в частности, всегда инвариантны свободные лагранжианы для мультиплетов полей с равными массами.

Выводы, сделанные в пунктах а/ и б/, непосредственно ясны из /74/.

Система полей ψ может быть разбита на неприводимые мультиплеты, преобразующиеся по неприводимым представлениям соответствующих групп. Внутри каждого неприводимого мультиплета массы полей ψ^r с необходимостью одинаковы. В случае ненулевых масс это следствие коммутации матрицы $\hat{M}$ со всеми матрицами неприводимого представления $\hat{T}_j^{(1)}$ /лемма Шура/.

§ 7. Взаимодействие полей со спинами 0, 1/2 и 1

Наконец, включим взаимодействия с полями со спином 0 – скалярными полями ϕ^a / $a = 1, \dots \ell$ /. Наиболее полный локальный релятивистский лагранжиан, охватывающий все возможные взаимодействия полей со спинами 0, 1/2 и 1, при условии безразмерности констант связи имеет вид

Соотношение /91/ показывает, что матрицы связи η^{i}. также реализуют представление алгебры Ли со структурными коэффициентами a_{ijk}. Теория инвариантна относительно группы преобразований /63/, если одновременно скалярные поля преобразуются по закону

$$\phi^{a'} = \phi^{a} + \omega_j \eta^{j}_{ab} \phi^{b} . \qquad /99/$$

Соотношения /89/–/94/ обеспечивают инвариантность всех членов лагранжиана при таких преобразованиях. Скалярные поля также разбиваются на неприводимые мультиплеты, причем в силу /90/ массы внутри каждого мультиплета равны. В наиболее важном случае – когда массы всех спинорных полей отличны от нуля – соотношение инвариантности /93/ записывается особенно просто

$$[\hat{T}^{(1)}_{j}, \hat{G}^{(1)}_{a} + i\gamma_5 \hat{G}^{(2)}_{a}] = - i\eta^{j}_{ab} (\hat{G}^{(1)}_{b} + i\gamma_5 \hat{G}^{(2)}_{b}). \qquad /100/$$

Наконец, если к тому же число спинорных частиц сохраняется, то /100/ справедливо для матриц без крышек:

$$[T^{(1)}_{j}, G^{(1)}_{a} + i\gamma_5 G^{(2)}_{a}] = - i\eta^{j}_{ab}(G^{(1)}_{b} + i\gamma_5 G^{(2)}_{b}) . \qquad /101/$$

Как мы видим, во взаимодействиях спинорных и скалярных полей в теориях класса A четность не обязана сохраняться.

8. Заключение

8.1. Итак, в принятых нами предположениях:

1/ лагранжев формализм,

2/ безразмерность констант связи,–

наиболее общая теория класса A /теория полей с определенными спинами/ системы полей со спинами 1, 1/2 и 0 описывается лагранжианом

$$\mathfrak{L}_{0,1/2,1} = -\tfrac{1}{4} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} b_{\mu} m^{2} b_{\mu} - \qquad /102/$$

$$-\tfrac{1}{2}\bar{\Psi}\{\gamma_{\mu}[\partial_{\mu} - i(\hat{T}^{(1)}_{j} + \gamma_5 \hat{T}^{(2)}_{j}) b^{j}_{\mu}] + \hat{M}\}\Psi - \tfrac{1}{2}(\partial_{\mu} - \eta^{i} b^{i}_{\mu})\phi \cdot (\partial_{\mu} - \eta^{j} b^{j}_{\mu})\phi -$$

$$-\tfrac{1}{2}\phi\mu^{2}\phi + \xi_{abcd}\phi^{a}\phi^{b}\phi^{c}\phi^{d} + \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}(\hat{G}^{(1)}_{a} + i\gamma_5 \hat{G}^{(2)}_{a})\Psi\phi^{a} .$$

В выражении /102/, где только возможно, употреблена компактная матричная запись. "Тензор векторного поля" $G_{\mu\nu}$ дается формулой /42/. Матрицы связи a, $\hat{T}$, η ξ и $\hat{G}$ и массовые матрицы m^{2}, $\hat{M}$ и μ^{2} должны удовлетворять соотношениям /43/–/45/, /56/, /60/–/62/, /80/, /85/, /89/–/93/. В том случае, когда массы всех спинорных полей отличны от нуля $\hat{T}^{(2)} = 0$ и лагранжиан и все соотношения для матриц связи соответственно упрощаются.

8.2. Указанные соотношения означают, что теория инвариантна относительно групп фазовых преобразований

$$b^{i\,\prime}_{\mu} = b^{i}_{\mu} + a_{ijk}\,\omega_j\, b^{k}_{\mu}\;;\;\Psi' = \Psi - i\omega_j\,(\hat{T}^{(1)}_j + \gamma_5\,\hat{T}^{(2)}_j)\Psi\;;$$

$$\phi^{a\,\prime} = \phi^{a} + \omega_j\,\eta^{j}_{ab}\,\phi^{b}, \qquad /103/$$

/если массы всех спинорных полей отличны от нуля, то член с $\gamma_5\hat{T}^{(2)}$ отсутствует/. Ключевую роль при этом играют соотношения /44/, /62/ и /91/, которые показывают, что матрицы a, η и $\hat{T}^{(1)}+\gamma_5\hat{T}^{(2)}$ образуют представления алгебры Ли. Структурными коэффициентными служат константы самодействия векторных полей.

Представления алгебры Ли раскладываются на неприводимые. В соответствии с этим все поля ϕ, ψ и b_μ разбиваются на мультиплеты, преобразующиеся по неприводимым представлениям, причем векторные поля всегда преобразуются по регулярному представлению. Внутри каждого мультиплета массы полей с необходимостью одинаковы, что является следствием соотношений /45/, /60/ и /90/ на основании леммы Шура.

Подчеркнем, что источником симметрий служат векторные поля.

8.3. В этой связи особо остановимся на практически наиболее интересном случае, когда число спинорных частиц сохраняется[x/] и массы спинорных полей отличны от нуля /т.е. когда $T^{(2)}_i = T^{(3)}_i = T^{(4)}_i = 0$ /. Возникающие упрощения фактически сводятся к заменам $\hat{T}^{(1)}_i + \gamma_5\hat{T}^{(2)}_i \to T^{(1)}_i$, $\hat{G}^{(1)}_a \to G^{(1)}_a$ и $\hat{G}^{(2)\prime} \to G^{(2)}_a$, а лагранжиан принимает вид

$$\mathfrak{L}_{0,\frac12,1} = -\tfrac14 G_{\mu\nu}G_{\mu\nu} - b_\mu m^2 b_\mu - \bar\psi\{\gamma_\mu(\partial_\mu - iT^{(1)}_j b^j_\mu) + M\}\psi -$$

$$-\tfrac12(\partial_\mu - \eta^i b^i_\mu)\phi\cdot(\partial_\mu - \eta^j b^j_\mu)\phi - \tfrac12\phi\mu^2\phi + \qquad /104/$$

$$+\xi_{abcd}\,\phi^a\phi^b\phi^c\phi^d + \bar\psi\,(G^{(1)}_a + i\gamma_5 G^{(2)}_a)\psi\phi^a .$$

В преобразованиях /103/, относительно которых инвариантна теория, закон преобразования спинорного поля сведется к

$$\psi' = \psi - i\omega_j\,T^{(1)}_j\psi . \qquad /105/$$

Пусть теперь имеется одно или несколько истинно нейтральных векторных полей со спином 1. Тогда $a_{ijk} = 0$, так что матрицы связи $T^{(1)}_i$ коммутируют между собой /см. /62//, и то же самое можно сказать о матрицах η^i /см. /91//. Следовательно, они одновременно приводятся к диагональному виду, и в этом проявляется истинная нейтральность векторного поля. Каждое такое поле – источник инвариантности относительно преобразований типа $\psi^r \to e^{i\Lambda_r}\psi^r$.

Заряженное векторное поле без нейтрального партнера существовать не может. Простейшая возможность – триплет векторных полей /например, ρ – мезон/. Тогда,

x/ Если бозонные поля не несут барионного заряда, то сохранение числа спинорных частиц было бы следствием существования нейтрального векторного мезона, обеспечивающего сохранение барионного заряда.

как следствие предположения о спине 1 у триплета, $a_{ijk} = g\epsilon_{ijk}$ $(i,j,k=1,2,3;$ ϵ_{ijk} – единичный абсолютно антисимметричный тензор, g –константа связи/. Существование триплета служит источником изотопической инвариантности, причем векторные поля составляют изотопический псевдовектор, а другие поля преобразуются по тем или иным представлениям группы изотопических вращений. В этом случае мы приходим к теории Янга–Миллса, но масса векторных полей может иметь любое значение.

Более богатые мультиплеты векторных полей ведут к более высоким симметриям. Мультиплеты различных полей преобразуются по неприводимым представлениям классических групп, упомянутых во Введении. Такие теории суть обобщения теории Янга-Миллса /4/, но без всяких ограничений на массы векторных полей. После триплета сразу идет октет[x/], соответствующий группе $SU(3)$. Отметим, что если бы число спинорных частиц не сохранялось, то векторные поля со спином 1 порождали бы инвариантность относительно групп преобразований, изоморфных указанным выше, при которых перепутывались бы барионы с антибарионами. /Примеры см. в Приложении II /.

8.4. Из сказанного ясно, что симметрии сильных взаимодействий находят свое естественное объяснение в теориях класса А. Замечательно, что в теориях класса A такие далекие от обычного пространства понятия, как например, барионный и гиперонный заряды, изотопический спин и соответствующие законы сохранения порождаются пространственно-временным свойством векторных полей – свойством обладать определенным спином.

Включение электромагнитных взаимодействий нарушает как изотопическую инвариантность, так и пространственно-временное условие /2/ для заряженных векторных полей, которое приводило к этой инвариантности. Эти два факта тесно связаны.

Естественно спросить: "имеет ли смысл говорить о пространственно-временном свойстве /спине векторного поля/, которое нарушается какими-либо взаимодействиями?" Да, имеет. Например, пространственная четность есть хорошее квантовое число только в рамках сильных и электромагнитных взаимодействий, но в пренебрежении слабыми. Аналогично, спин заряженного векторного поля /а стало быть и изотопическая инвариантность/ есть хорошее квантовое число только в рамках сильных взаимодействий, но в пренебрежении электромагнитными и слабыми.

8.5. Вместе с тем, теории класса A очень похожи на электродинамику, так как последняя из-за калибровочной инвариантности всегда есть теория класса A по отношению к электромагнитному полю. В частности, сходство проявляется в том, что все взаимодействия с векторными полями входят только через "ковариантные производные": $\partial_\mu - \frac{1}{2} a_j b^j_\mu$, $\partial_\mu - iT_j b^j_\mu$ и $\partial_\mu - \eta^j b^j_\mu$ в применении к полям b_ν, ψ и ϕ, соответственно.

8.6. Обращает на себя внимание универсальность константы взаимодействия с каждым неприводимым мультиплетом векторных полей – всюду входит константа самодей-

[x/] В Приложении 1 проиллюстрировано, как произвольный квартет полей разлагается на неприводимые части – синглет и триплет.

ствия. Это сразу видно из соотношений структуры алгебр Ли /62/ и /91/. Так, если $a_{ijk} = g\epsilon_{ijk}$ и сохраняется число спинорных частиц /изотопическая инвариантность/, то матрица $T_i^{(1)}$ связи с изоспинорным полем реализуется в виде $g\frac{\tau_i}{2}$.

8.7. Далее в теориях класса A при сохранении числа спинорных частиц векторные мезоны должны иметь спин-четность 1^- /быть векторами, а не псевдовекторами/ и четность во взаимодействиях с ними должна сохраняться.

8.8. Наконец, остановимся на сформулированных в начале настоящего параграфа предположениях. Они не равноценны. Первое из них касается динамики, и авторы могут только выразить надежду, что связь между свойствами симметрии и спином 1 может быть установлена и вне рамок лагранжева формализма. Что касается второго предположения, то эта связь сохраняется и после включения в лагранжиан, наряду с членами с безразмерными константами связи, членов с константами связи последующих размерностей.

Авторы искренне признательны М.А. Маркову за интерес к работе и Б.Н. Валуеву и Л.Б. Окуню за ценные обсуждения.

Приложение 1. Разложение квартета полей на неприводимые части

В случае 4-х векторных полей всегда можно записать

$$a_{ijk} = \epsilon_{ijk\ell}\, g_\ell \qquad (i,j,k = 1,2,3,4) \tag{П.1}$$

/ $\epsilon_{ijk\ell}$ – единичный абсолютно антисимметричный "тензор"/, т.е. a_{ijk} определяется константами связи g_1, g_2, g_3, g_4. Если сделать ортогональное преобразование $b_\mu^{i'} = r_{ij}\, b_\mu^j$, $r_{ij}\, r_{ik} = \delta_{jk}$, то

$$a'_{ijk} = r_{ii'}\, r_{jj'}\, r_{kk'}\, a_{i'j'k'}\,. \tag{П.2}$$

Свертывая /П.2/ с $r_{\ell\ell'}\epsilon_{ijk\ell}$ и учитывая /П.1/, легко найти, что

$$g'_i = r_{ij}\, g_j$$

т.е. g_ℓ претерпевают поворот в 4-мерном эвклидовом пространстве. При любых начальных g_ℓ всегда найдется такой поворот $\| r_{ij} \|$, после которого, например, $g'_1 = g'_2 = g'_3 = 0$, а $g'_4 = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2}$, так что a'_{ijk} распадается на два ящика:

$$a'_{ijk} = \begin{cases} g'_4\,\epsilon_{ijk} & \text{если} \quad i,j,k \neq 4 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Это означает, что $b_\mu^{1'}$, $b_\mu^{2'}$ и $b_\mu^{3'}$ образуют триплет взаимодействующих полей, а $b_\mu^{4'}$ –синглет, не взаимодействующий с этим триплетом.

Приложение II . Примеры реализации общих соотношений структуры /68/-/71/

Приведем несколько примеров необычных взаимодействий, не сохраняющих число спинорных частиц. Рассмотрим возможные реализации соотношений /68/-/71/ 2x2 матрицами при двух выборах a_{ijk}. Это означает, что имеется только два спинорных поля. Предположим, что их массы отличны от нуля, так что $T_i^{(2)} = T_i^{(4)} = 0$.

Пусть $a_{ijk} = g\epsilon_{ijk}$ $(i,j,k = 1,2,3)$. Перечислим все возможности:

1/ $T_i^{(1)} = \frac{g}{2}\tau_i$, $T_i^{(3)} = 0$ – обычное изотопически инвариантное взаимодействие

$$i\frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\tau_i\psi b_\mu^i . \qquad /П.3/$$

Любопытно, что благодаря векторности оно дополнительно инвариантно относительно трехпараметрической группы преобразований:

$$b_\mu^{i\prime} = b_\mu^i \; ; \; \psi' = (\cos\omega - i\frac{\omega_3}{\omega}\sin\omega)\psi - \frac{i\omega_1 + \omega_2}{\omega}\sin\omega\;\psi_G , \qquad /П.4/$$

где $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$, $\psi_G = i\tau_2\psi_C$

2/ $$T_j^{(1)} = -\frac{g}{2}(\xi^+\tau_j\xi) \; ; \; T_j^{(3)} = \frac{g}{2}(\xi\tau_2\tau_j\xi)\tau_2^{*)} ,$$

где ξ -двухкомпонентная величина, зависящая от трех параметров $\xi = (\sin\theta\, e^{i\phi_1}, \cos\theta\, e^{i\phi_2})$. Тот или иной выбор параметров закрепляет реализацию алгебры Ли. В частности, при $\theta = 0$, $\phi_2 = 0$

$$T_1^{(1)} = T_2^{(1)} = 0 \; ; \; T_3^{(1)} = \frac{g}{2} \; ; \; T_1^{(3)} = \frac{ig}{2}\tau_2 \; ; \; T_2^{(3)} = \frac{g}{2}\tau_2 \; ; \; T_3^{(3)} = 0 .$$

В этом случае взаимодействие векторного поля со спинорным имеет вид

$$\frac{ig}{2\sqrt{2}}[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi_G b_\mu^+ + \bar{\psi}_G\gamma_\mu\psi b_\mu^- + \sqrt{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi b_\mu^3] , \qquad /П.5/$$

где ψ_G — G- сопряженный спинор: $i\tau_2\psi_C$, а

$$b_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\mu^1 - ib_\mu^2), \quad b_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_\mu^1 + ib_\mu^2).$$

Это взаимодействие инвариантно не только относительно группы преобразований[xx/]

$$b_\mu^{i\prime} = b_\mu^i + g\epsilon_{ijk}\omega_j b_\mu^k \qquad /П.6/$$

$$\psi' = \psi - i\frac{g}{2}\omega_3\psi - \frac{g}{2}(i\omega_1 + \omega_2)\psi_G , \qquad /П.7/$$

но и относительно обычных изотопических преобразований поля ψ ,

если считать поля b_μ^i изоскалярами. Заметим, что переход к спинорам $\chi = \frac{1}{2}[(1+\tau_3)\psi + (1-\tau_3)\psi_C]$ придает взаимодействию /П.5/ вид /П.3/.

---

x/ Матрицы $T^{(3)}$ по определению антисимметричны и поэтому они с необходимостью кратны матрице τ_2 .

xx/ Конечное преобразование над ψ записывается в виде /П.4/ с заменой там $\vec{\omega} \to \frac{g}{2}\vec{\omega}$.

3/ Наконец, остается последняя возможность

$$T_1^{(1)} = \frac{g}{2}[\tau_1 - (\xi^+ \tau_1 \xi)]; \quad T_1^{(3)} = \frac{g}{2}(\xi \tau_2 \tau_1 \xi)\tau_2. \qquad /П.8/$$

Этот случай есть вполне определенная комбинация взаимодействий типа 1/ и 2/. В частности, при $\theta = 0$, $\phi_2 = 0$

$$i\frac{g}{2}[\bar\psi\gamma_\mu \tau_1 \psi b^1_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar\psi\gamma_\mu \psi_G b^+_\mu + \bar\psi_G \gamma_\mu \psi b^-_\mu + \sqrt{2}\bar\psi\gamma_\mu \psi b^3_\mu)]. \qquad /П.9/$$

Взаимодействие /П.9/ инвариантно относительно преобразований b_μ согласно /П.6/ и ψ согласно

$$\psi' = \exp(-\frac{i}{2} g \vec\omega \vec\tau)\{[\cos(\frac{g}{2}\omega) - i\frac{\omega_3}{\omega}\sin(\frac{g}{2}\omega)]\psi - \qquad /П.10/$$
$$- \frac{i\omega_1 + \omega_2}{\omega}\sin(\frac{g}{2}\omega)\psi_G\}.$$

Пусть теперь имеется 6 векторных полей, причем $a_{123} = g$, $a_{456} = f$, a_{ijk}, не сводящиеся к этим, равны нулю. Это представление приводимо; имеется инвариантность относительно двух трехмерных групп. Матрицы связи с дублетом спинорных полей можно выбрать в виде

$$T_i^{(1)} = \frac{g}{2}\tau_i \ (i = 1, 2, 3); \quad T_4^{(1)} = T_5^{(1)} = 0; \quad T_6^{(1)} = \frac{f}{2}$$
$$T_i^{(3)} = 0 \ (i = 1, 2, 3); \quad T_4^{(3)} = \frac{if}{2}\tau_2; \quad T_5^{(3)} = \frac{f}{2}\tau_2; \quad T_6^{(3)} = 0.$$

Этому выбору матриц соответствует взаимодействие

$$\frac{ig}{2}\sum_{i=1}^{3}\bar\psi\gamma_\mu \tau_i \psi b^i_\mu + \frac{if}{2\sqrt{2}}[\bar\psi\gamma_\mu \psi_G B^+_\mu + \bar\psi_G \gamma_\mu \psi B^-_\mu + \sqrt{2}\bar\psi\gamma_\mu \psi B^0_\mu], \qquad /П.11/$$

где

$$B^+_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^4_\mu - ib^5_\mu); \quad B^-_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(b^4_\mu + ib^5_\mu); \quad B^0_\mu = b^6_\mu.$$

Такая теория инвариантна, когда b_μ преобразуются по закону /46/, а ψ по закону

$$\psi' = \exp(-\frac{i}{2} g \vec\omega \vec\tau)\{[\cos(\frac{f}{2}\Omega) - i\frac{\omega_6}{\Omega}\sin(\frac{f}{2}\Omega)]\psi - \qquad /П.12/$$

$$- \frac{i\omega_4 + \omega_5}{\Omega}\sin(\frac{f}{2}\Omega)\psi_G\},$$

где $\vec\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$; $\Omega = \sqrt{\omega_4^2 + \omega_5^2 + \omega_6^2}$. Таким образом, теория обладает инвариантностью относительно изотопических вращений, при которых триплет b^i_μ $(i = 1, 2, 3)$ преобразуется как изопсевдовектор, а триплет B_μ остается неизменным. Кроме того, имеется инвариантность относительно 3-параметрической группы преобразований /изоморфной изотопической группе/, при которых B_μ преобразуются подобно изотопическому триплету, а триплет B_μ не преобразуется. При этом, как видно из /П.12/, ψ и ψ_c преобразуются друг через друга. Подобные преобразования затрагивались Стрельцовым /28/.

Существование такой двойной инвариантности обусловлено векторностью взаимодей-