ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Е. Червонко

Р - 1215

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ИЗОТРОПНОГО АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Дубна 1963 год

Е. Червонко

Р - 1215

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ИЗОТРОПНОГО АНТИФЕРРОМАГНЕТИКА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

Дубна 1963 год

§ 1. Введение

Обобщение метода Боголюбова и Тябликова[1,2] для ферромагнетика со спином, высшим чем 1/2, дано Тахир-Кхели и Тер-Харом[3] и автором[4,5].

Теперь рассмотрим антиферромагнетик, решетка которого делится на две подрешетки, такие, что ближайшие соседи атомов одной подрешетки принадлежат только другой.

При помощи метода, развитого в[5], обобщим результаты работ Пу Фу-чо[6,7] и нашей[8], при внешнем магнитном поле $\vec{h}$, перпендикулярном $\vec{M}_1 - \vec{M}_2$ в первом случае и параллельном $\vec{M}_1 - \vec{M}_2$ — во втором. Здесь $\vec{M}_1$ и $\vec{M}_2$ обозначают векторы среднего магнитного момента обоих подрешеток. Отметим, что параллельно ориентированные спины неустойчивы. Однако полученную при рассмотрении такой системы параллельную восприимчивость при $|\vec{h}| \to 0$ можно отождествить с параллельной восприимчивостью при $|\vec{h}| \to 0$ и исчезающей анизотропии /см. работу Зимана[9]/.

Введем операторы σ, S, S^+, с условиями коммутации:

$$[S, S^+] = -2\sigma\, ;\; [S, \sigma] = S\, ;\;\; [S^{\;}, \sigma] = -S^+ . \qquad /1.1/$$

Воспользуемся частными случаями данного Тябликовым[10] выражения компонент момента количества движения в операторах /1.1/. При продольном внешнем поле это выражение имеет вид:

$$S_j^x = \tfrac{1}{2}(S_j^+ + S_j)\, ;\;\; S_j^y = \frac{i}{2}(-1)^{a_j}(S_j^+ - S_j)\, ;\;\; S_j^z = -(-1)^{a_j}\sigma_j\, ;\; \vec{h}\,\|\,0z\, , \qquad /1.2/$$

а при перпендикулярном –

$$S_j^x = \tfrac{1}{2}(S_j^+ + S_j)\, ;\;\; S_j^y = \sigma_j \sin\gamma + (-1)^{a_j}\frac{i}{2}(S_j^+ - S_j)\cos\gamma\, ;$$
$$S_j^z = \frac{i}{2}(S_j^+ - S_j)\sin\gamma - (-1)^{a_j}\sigma_j\cos\gamma\, ;\;\; \vec{h}\,\|\,0y\, , \qquad /1.3/$$

где $a_j = 1,2$ для j, принадлежащего первой и второй подрешетке соответственно. Обменный гамильтониан после преобразований /1,2/ и /1.3/ примет вид:

$$H_{\|} = \Sigma_j\, h(-1)^{a_j}\sigma_j + J\Sigma_{(jk)}\,\{-\sigma_j\sigma_k + \tfrac{1}{2}(S_j S_k + S_j^+ S_k^+)\}\, ; \qquad /1.4/$$

$$H_{\perp} = -\Sigma_j\, hu\sigma_j - \Sigma_j\, h(1-u^2)^{1/2}\frac{i}{2}(S_j^+ - S_j) +$$
$$+ J\Sigma_{(jk)}[-(1-2u^2)\sigma_j\sigma_k + \tfrac{1}{2}(1-u^2)(S_j^+ S_k^+ + S_j S_k) + u^2 S_j^+ S_k]\, ;\;\; u = \sin\gamma\, , \qquad /1.5/$$

где суммирование по j пробегает всю решетку, а по (jk) – все пары ближайших соседей.

Из вида H_{11} следует, что средние по каноническому ансамблю от произведений $S^{\pm}_{m_1}\ S^{\pm}_{m_2} \ldots\ S^{\pm}_{m_N}$ будут только тогда ненулевыми, когда

$$\pm (-1)^{a m_1} \pm (-1)^{a m_2} \pm \ldots \pm (-1)^{a m_N} = 0 , \qquad /1.6/$$

где $S^{\pm}$ обозначает S^{+} или S. Доказательство этого аналогично доказательству в[4].

Из /1.6/ получается, что мы имеем только 2ℓ линейно независимых одночастичных моментов, где ℓ –максимальный спин атома.

Для $H_{\perp}$ утверждения типа /1.6/ нельзя доказать за исключением случая $u = 0$ или 1. Для исключения параметра u из $H_{\perp}$ пользуемся условием минимальности термодинамического потенциала, которое вместе с условием пространственной однородности даст:

$$h < \sigma_j > = Jzu \{ 2 < \sigma_j \sigma_{j+\eta} > - < S_j S_{j+\eta} > + < S^{+}_j S_{j+\eta} > \} , \qquad /1.7/$$

$$< S_j > = < S^{+}_j > ,$$

где $<\ldots>$ обозначает усреднение по каноническому ансамблю, z –число ближайших соседей, η –вектор, разделяющий ближайших соседей. Поскольку $H_{\perp}$ получается из обменного гамильтониана путем унитарного преобразования, то /1.7/ должно быть тождеством, если в /1.7/ нет квазисредних. Так как здесь присутствуют квазисредние /см.[11]/, то /1,7/ может и не быть тождеством.

§ 2. Термодинамические функции Грина

Запаздывающие и опережающие функции Грина определим, согласно Боголюбову и Тябликову[1]:

$$\ll A(t) | B \gg_{\substack{ret\\adv}} = \pm\ \theta(\pm t) < [A(t), B] > , \qquad /2.1/$$

где $[\ldots,\ldots]$ обозначает коммутатор, $\theta(t)$ –функцию Хевисайда, $A(t), B \equiv B(0)$ операторы в представлении Гейзенберга. Для получения уравнений для независимых одночастичных моментов введем, согласно[4,5], функции:

$$Q_r(t; m-k) \equiv \ll P_{rm}(t) | S^{+}_k \gg, \quad q_r(t; m-k) \equiv \ll P^{+}_{rm}(t) | S^{+}_k \gg, \qquad /2.2/$$

где $P_{rm} \equiv S_m \sigma^r_m + \sigma^r_m S_m$.
Можно доказать[5], что:

$$[P_{rm}, S^{+}_m] \equiv T_{rm} = -2\sigma^{r+1}_m + \ell(\ell+1)[(\sigma_m + 1)^r - (\sigma_m - 1)^r] + \qquad /2.3/$$

$$+\sigma_m[(\sigma_m-1)^{r+1}-(\sigma_m+1)^{r+1}];\ [P_{rm},\sigma_m]=P_{rm};\qquad /2.3/$$

$$S_m^+P_{rm}+S_mP_{rm}^+\equiv\Phi_{rm}=[S_m^+,P_{rm}]_+=\ell(\ell+1)[(\sigma_m+1)^r+(\sigma_m-1)^r+2\sigma_m^r]$$

$$-\sigma_m[(\sigma_m+1)^{r+1}+(\sigma_m-1)^{r+1}+2\sigma_m^{r+1}],\qquad /2.4$$

где ℓ максимальное собственное значение σ_m. Аналогично тому, как это сделано в /12/, напишем уравнения для фурье-образов функций /2.2/, сразу в суперпозиционном приближении, состоящем в отождествлении $\langle\langle A_m(t)B_\ell(t)|S_k^+\rangle\rangle$ с $\langle B_\ell\rangle\langle\langle A(t)|S_k^+\rangle\rangle$ если $\langle A\rangle=0$ и $\ell\neq m$. Здесь A_m, B_ℓ операторы, действующие на спины в узлах m и ℓ.

При рассмотрении системы с гамильтонианом $H_\perp$ вряд ли можно пользоваться суперпозиционным приближением, так как заведомо нельзя найти класс операторов, средние величины которых равны нулю, из-за присутствия в $H_\perp$ члена линейного в $S-S^+$. Именно это приводит к функциям вида $\langle\langle T_{rm}(t)|S_k^+\rangle\rangle$ в уравнениях для Q_r и q_r. Поэтому, следуя Пу Фу-чо /6/, будем в дальнейшем употреблять $H_\perp$ без упомянутого члена.

Для гамильтониана H_{II} в принятом приближении имеем:

$$[E-(-1)^a h+Jz\sigma_{3-a}]Q_r(m-k)=\frac{i}{2\pi}T_{ra}\,\delta(m-k)+\frac{J}{4}T_{ra}\,\Sigma\,\eta\, q_0(m+\eta-k),$$
$$/2.5/$$
$$[E+(-1)^a h-Jz\sigma_{3-a}]q_0(m-k)=J\sigma_a\Sigma\eta Q_0(m+\eta-k),$$

где $a=a_m$, $\sigma_a=\langle\sigma_m\rangle$, $T_{ra}=\langle T_{rm}\rangle$,
а суммирование пробегает векторы между ближайшими соседями η. Для решения /2.5/ проведем преобразование:

$$Q_r(a,\gamma;\rho,E)=\Sigma_m\exp(-i\rho m)Q_r(m),$$

где суммируем по всем векторам, разделяющим a- и γ- подрешетки. Из /2.5/ получается:

$$[E-(-1)^a h+Jz\sigma_{3-a}]Q_r(a,\gamma;\rho,E)=\frac{i}{2\pi}T_{ra}\,\delta_{a\gamma}+\frac{Jz}{4}T_{ra}\,A(\rho)q_0(3-a,\gamma;\rho,E),$$

$$[E+(-1)^a h-Jz\sigma_{3-a}]q_0(a,\gamma;\rho,E)=Jz\sigma_a A(\rho)Q_0(3-a,\gamma;\rho,E),$$

где $A(\rho)=z^{-1}\Sigma\eta\exp(i\rho\eta)$.
Отсюда:

$$Q_r(a,\gamma;\rho,E)=\frac{iT_{ra}\,\delta_{a\gamma}}{4\pi\Delta}\left\{\frac{X^+}{E-E_a^-}-\frac{X^-}{E-E_a^+}\right\}$$

$$q_0(a,\gamma,\rho,E)=\frac{2i\sigma_1\sigma_2A(\rho)\delta_{3-a,\gamma}}{\pi\Delta}\left\{\frac{1}{E-E^-_{3-a}}-\frac{1}{E-E^+_{3-a}}\right\} \qquad /2.6/$$

$$E^{\pm}_a=\frac{Jz}{2}\{(-1)^a[2\chi-\sigma_1+\sigma_2]\pm\Delta\},\quad X^{\pm}=\sigma_1+\sigma_2\pm\Delta,$$

где

$$\Delta=\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+4\sigma_1\sigma_2[1-A^2(\rho)]\}^{1/2},\quad \chi=h/Jz.$$

Фурье-образы от функции $\langle\langle P^+_{rm}\,|\,S_k\rangle\rangle$ и $\langle\langle P_{om}\,|S_k\rangle\rangle$ будут равны $Q_r(a,\gamma;\rho,-E)$ и $q_0(a,\gamma;\rho,-E)$ соответственно. Вычисляя спектральные плотности от /2.6/ для $\pm E$ и вычисляя среднее /см.[1]/, получим:

$$\Phi_{ra}\equiv\langle\Phi_{rm}\rangle=\tfrac{1}{2}T_{ra}\frac{v}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3\rho}{\Delta}\left\{X^+\mathrm{cth}\frac{E^-_a}{2\theta}-X^-\mathrm{cth}\frac{E^+_a}{2\theta}\right\}\equiv-T_{ra}V_a \qquad /2.7/$$

$$\langle S_m S_{m+\eta}\rangle=\langle S^+_m S^+_{m+\eta}\rangle=\frac{v\sigma_1\sigma_2}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,\frac{A^2(\rho)}{\Delta}\left\{\mathrm{cth}\frac{E^-_{3-a}}{2\theta}-\mathrm{cth}\frac{E^+_{3-a}}{2\theta}\right\}, \qquad /2.8/$$

где $a=a_m$, v – плотность атомов в решетке, а Φ_{rm} определен в /2.4/. Легко увидеть, что /2.7/ вообще не зависит от индекса подрешетки, a , поскольку $E^-_a=-E^+_{3-a}$.

Уравнения /2.7/ или $r=0,\dots,2\ell-1$ определяют независимые одночастичные моменты антиферромагнетика со спином ℓ . Можно доказать, что /2.7/ для $r\geq 2\ell$ будут линейными комбинациями уравнений для $r<2\ell-1$.

При гамильтониане $H_\perp$ без члена линейного в S^+-S средние $\langle T_{rm}\rangle$ и $\langle\Phi_{rm}\rangle$ вообще не зависят от индекса подрешетки. В этом случае имеем:

$$\Phi_r=-T_r\frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,\frac{\chi u+\sigma(1-2u^2)+\sigma u^2A(\rho)}{W}\,\mathrm{cth}\frac{W}{\tau}\equiv-T_rV \qquad /2.9/$$

$$\langle S_j S_{j+\eta}\rangle=\langle S^+_j S^+_{j+\eta}\rangle=\sigma^2(1-u^2)\frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,\frac{A^2(\rho)}{W}\,\mathrm{cth}\frac{W}{\tau},$$

$$\langle S^+_j S_{j+\eta}\rangle=\frac{\sigma v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,\frac{[\chi u+\sigma(1-2u^2)+\sigma u^2A(\rho)]A(\rho)}{W}\,\mathrm{cth}\frac{W}{\tau}, \qquad /2.10/$$

$$W=\{[\chi u+\sigma(1-2u^2)+\sigma u^2A(\rho)]^2-\sigma^2(1-u^2)^2A^2(\rho)\}^{1/2},\quad \tau=2\theta/Jz.$$

Параметр u определяется уравнением /1.7/. В суперпозиционном приближении в нем следует вместо $\langle\sigma_j\sigma_{j+\eta}\rangle$ положить σ^2 и подставить /2.10/. Легко заметить, что при $h\to 0$ уравнения /2.7/ и /2.9/–/2.7/ совпадают. При $h=0$ из уравнений /2.7/ – /2.9/ для $r=\theta$ можно подсчитать, пользуясь приемом работы[4], температуру Кюри для всякого ℓ , получая

$$r_c = \frac{2\ell(\ell+1)}{3}\left\{\frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,[1 - A^2(\rho)]^{-1}\right\}^{-1} = \frac{2\ell(\ell+1)}{3}\left\{\frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,[1 - A(\rho)]^{-1}\right\}^{-1}. \qquad /2.11/$$

При выводе последней формулы использовано то обстоятельство, что интеграл $A^{2n+1}(\rho)$ исчезает, что связано с возможностью разделения решетки на две подрешетки.

§ 3. Уравнения для независимых моментов

Запишем уравнения /2.7/–/2.9/ для моментов $<\sigma^r_m>$. В этих уравнениях при $r = 2\ell + 1$ будет выступать член $<\sigma^{2\ell+1}_m>$ Поскольку σ^r_m при $r > 2\ell$ является линейной комбинацией σ^r_m при $r \le 2\ell$, мы можем выразить этот момент через другие при всяком конкретном ℓ. Обозначая:

$$Q = <\sigma^2_m>;\quad X = <\sigma^3_m>,\quad Y = <\sigma^4_m>,\quad Z = <\sigma^5_m>$$

запишем уравнения для независимых моментов в виде:

$$2V\sigma = 1, \quad \ell = ½. \qquad /3.1/$$

$$V\sigma = 2 - Q, \quad V(3Q - 2) = \sigma, \quad \ell = 1. \qquad /3.2/$$

$$4V\sigma = 15 - 4Q, \quad 3V(5 - 4Q) = 8X - 26\sigma, \qquad /3.3/$$
$$4V(13\sigma - 8X) = 4Q - 39, \quad \ell = 3/2.$$

$$V\sigma = 6 - Q, \quad 3V(2 - Q) = 2X - 11\sigma, \qquad /3.4/$$
$$V(11\sigma - 4X) = 2Y - 9Q - 6, \quad V(14Q - 5Y + 6) = 4X - 25\sigma, \quad \ell = 2.$$

$$4V\sigma = 35 - 4Q, \quad V(35 - 12Q) = 8X - 66\sigma, \qquad /3.5/$$
$$2V(33\sigma - 8X) = 8Y - 58Q - 35, \quad V(89Q - 20Y + 35) = 8Z - 46X - 101\sigma,$$
$$16V(50X - 12Z + 68\sigma) = 320Y + 2556Q - 55, \quad \ell = 5/2.$$

Здесь вместо V следует подставить V_α, определенное в /2.7/, или V, определенное в /2.9/. В первом случае все моменты будут зависеть от номера подрешетки. В виде /3.1/–/3.5/ можно также записать уравнения для ферромагнетиков, подставляя вместо V интеграл:

$$\frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\, cth\,\frac{\chi + \sigma[1 - A(\rho)]}{r}. \qquad /3.6/$$

Первое уравнение $(r = 0)$ /2.7/ и /2.9/ можно записать в виде: $V\sigma = \ell(\ell + 1) - Q$. Поскольку $Q = <\sigma^2_m> \ge \sigma^2$, отсюда можно вывести неравенство:

$$\sigma \le ½\{[(2\ell + 1)^2 + V^2 - 1]^{½} - V\}. \qquad /3.7/$$

Эта оценка нетривиальна при $V \geq 1$, что соответствует действительности. /3.7/ может быть полезно для оценки намагниченности подрешеток при $\chi = r = 0$, так как при этих условиях интеграл вычислен Тябликовым[/12/] и автором для простой и объемноцентрированной кубической решетки, соответственно, и равен 1,156 и 1,119.

Легко можно увидеть, что уравнения /3.1/–/3.5/ допускают решения со всеми состояниями, равновероятными при $h = 0$ и r, равном /2.11/. Можно проверить, что при $r \to r_c$ отношения моментов нечетного порядка и отношения $A(r) - A(r_c)$ к квадрату моментов нечетного порядка, где $A(r)$ есть произвольный момент четного порядка, стремятся к отличным от нуля величинам. Эти пределы можно легко вычислить из /3.1/–/3.5/. По-видимому, упомянутое свойство имеет место и при $\ell > 5/2$.

Уравнения /2.7/–/2.9/ при $V = 1$ имеют единственное решение, отвечающее полному насыщению спинов в подрешетках. Но в слабых полях в антиферромагнетике $V > 1$ и состояние полного насыщения спинов недостижимо. При исключении высших моментов получается:

$$\sigma = \frac{1}{2V}, \quad \ell = ½ . \qquad /3.1/$$

$$\sigma = 4V[3V^2 + 1]^{-1}, \quad \ell = 1 . \qquad /3.2/$$

$$\sigma = [5V^2 + 1][2V^3 + 2V]^{-1}, \quad \ell = 3/2 . \qquad /3.3/$$

$$\sigma = [20V^3 + 12V][5V^4 + 10V^2 + 1]^{-1}, \quad \ell = 2 . \qquad /3.4/$$

$$\sigma = [35V^4 + 42V^2 + 3][6V^5 + 20V^3 + 6V]^{-1}, \quad \ell = 5/2 . \qquad /3.5/$$

Эти уравнения при V, заданном через /3.6/, равносильны уравнениям Тахир-Кхели и Тер-Хара[/3/]. При помощи /3.1'/–/3.5'/ можно вычислить σ при $\chi = r = 0$, подставляя вместо V 1,156 и 1,119 для простой и объемноцентрированной кубической решетки соответственно.

§ 4. Решение уравнений, заключительные замечания

Уравнения /3.1'/–/3.5'/ будут решены в исчезающем магнитном поле при низких и околокритических температурах. Для $\ell = ½$ уравнения /2.9/ рассмотрены подробно для простой кубической решетки в работе Пу Фу-чо[/7/]. При этом критическое магнитное поле определяется условием $u = 1$, что следует из /1.3/. По соображениям, выдвинутым во введении, имеет смысл рассматривать уравнения /2.7/ только в приближении, линейном по χ. С этой точностью:

$$V_a = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\rho}{\epsilon(\rho)} \, cth \frac{\sigma\epsilon(\rho)}{r} + (-1)^a \frac{(1-\phi)\chi v}{r(2\pi)^3} \int d^3\rho \, sh^{-2} \frac{\sigma\epsilon(\rho)}{r} \equiv V + (-1)^a [1-\phi]\chi R, \qquad /4.1/$$

где $\epsilon(\rho) = [1 - A^2(\rho)]^{½}$ и ϕ определяется из соотношения $\sigma_a = \sigma - (-1)^a \phi\chi$

откуда 2ϕ есть параллельная восприимчивость для пробного поля в единицах Jz. Используя /3.1/–/3.5/, можем выразить ϕ через V и R.

Вблизи точки Кюри решение имеет вид:

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} t^{n+1/2} a_n , \quad t = (1 - r/r_c) . \qquad /4.2/$$

Число a_0 дается для ℓ от 1/2 до 5/2:

$$\tfrac{1}{2}(3/a)^{1/2} \; ; \; 4[3(1+a)]^{-1/2} ; \; \frac{5\sqrt{15}}{2}(12 + 5a)^{-1/2} ; \; 4\sqrt{15}(21 + 5a)^{-1/2} ;$$

$$\frac{33\sqrt{15}}{6}(32 + 5a)^{-1/2} ,$$

где

$$a = \frac{v}{(2\pi)^3} \int d^3\rho \, [1 - A(\rho)]^{-1} = 1{,}5164 \qquad 1{,}3932$$

для простой и объемноцентрированной кубической решетки соответственно.

a_0 для ферромагнетиков имеет тоже вид /4.2/. Отрицательные коэффициенты a_1 мы не будем приводить из-за громоздкости. Численные значения a_0 и $-a_1$ приведены в таблице 1. Здесь же приводятся коэффициенты $-a_1$ для ферромагнетиков. Для ферромагнетика гранецентрированной кубической структуры можно a_0 написать в виде /4.2/ при $a =$ 1,3446.

Из /3.1'/ и /3.5'/ следует, что параллельная восприимчивость стремится в точке Кюри к ненулевому пределу как $a + \beta t$. Для решения в низких температурах разлагаем подинтегральную функцию в V в ряд по $exp(-\sigma\epsilon(\rho)/r)$. Асимптотическая оценка $\frac{v}{(2\pi)^3} \int d^3\rho \, \epsilon^{-1}(\rho) \exp(-a\epsilon(\rho))$ дает

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{6}{a^4} + \frac{117}{a^6} \right) + 0(a^{-8}) \qquad \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{6}{a^4} + \frac{116}{a^6}\right) + 0(a^{-8}) \qquad /4.3/$$

для простой и объемноцентрированной кубической решетки соответственно. Отсюда получаем оценку V в виде:

$$1{,}156 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}\pi^2}{120}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^4 + \frac{13\sqrt{3}\pi^4}{3360}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^6 + 0(r^8) \qquad /4.4/$$

$$1{,}119 + \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2 + \frac{\pi^2}{30}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^4 + \frac{29\pi^4}{1890}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^6 + 0(r^8) \, .$$

Использовав /4.3/ можно оценить интеграл R из /4.1/.

$$R = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{16}\left(\dfrac{r^2}{6\sigma^3} + \dfrac{r^4\pi^2}{30\sigma^5} + \dfrac{13\pi^4 r^6}{460\sigma^7} \right) + 0(r^8) \\[2ex] \tfrac{1}{4}\left(\dfrac{r^2}{6\sigma^3} + \dfrac{r^4\pi^2}{30\sigma^5} + \dfrac{29\pi^4 r^6}{1260\sigma^7} \right) + 0(r^8) \end{cases}$$

откуда можно получить вывод, что параллельная восприимчивость ведет себя при $r \to 0$ как r^2.

Решение уравнения для σ запишем в виде:

$$\sigma = \sigma_0 - \sum_{n \geq 1} \sigma_n (\tau/\ell)^{2n} , \qquad /4.5/$$

где σ_0 дается формулами /3.1/–/3.5/ при $V = 1.156$ и 1.119 для п.к. и о.ц.к. решеток. σ_1 можно записать для ℓ с 1/2 до 5/2:

$$\frac{a}{2} , \quad \frac{a(3K^2-1)}{\sigma_0(3K^3+K)} , \quad \frac{9a}{4K\sigma_0}\left[\frac{3K^2+1}{K^2+1} - \frac{10K^2}{5K^2+1}\right],$$

$$\frac{4a}{K\sigma_0}\left[\frac{20K^2(K^2+1)}{5K^4+10K^2+1} - \frac{3(5K^2+1)}{5K^2+3}\right], \quad \frac{25a}{4\sigma_0 K}\left[\frac{3(5K^4+10K^2+1)}{3K^4+10K^2+3} - \frac{28K^2(5K^2+3)}{35K^4+42K^2+3}\right],$$

где $a = \sqrt{3}/12$ и $1/3$, а $K = \frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,[1 - A^2(\rho)]^{-1/2} = 1{,}156$ $1{,}119$ для п.к. и о.ц.к. соответственно. Остальные коэффициенты даны в численной форме в таблице 2.

Легко проверить, что σ_0 получается всегда согласно оценке 3.7/.

Решения уравнений /3.1/–/3.5/ для V, заданного через /3.6/ /ферромагнетик/, имеют вид, совпадающий с решением Дайсона /14/ с точностью до членов порядка $\tau^{5/2}$ включительно. Это имеет место, поскольку $V = 1 + a(\tau/\ell)^{3/2} + b(\tau/\ell)^{5/2} \equiv 1 + A$, где коэффициенты a и b зависят только от вида решетки. С той же точностью получаем $V = 1 + nA$ и отсюда выводим, что $\sigma = \ell - A/2$. Убедиться в совпадении коэффициентов a и b тоже легко, так как в обоих теориях они определяются как коэффициенты разложения $\frac{v}{(2\pi)^3}\int d^3\rho\,\mathrm{cth}\,\frac{\chi + \ell[1 - A(\rho)]}{\tau}$ и асимптотический ряд.

Следует обратить внимание на существенное различие решения ферромагнетика и антиферромагнетика. В последнем случае зависимость от ℓ более сложна. Это в некоторой степени связано с отличием K от единицы, но даже при $V = 1 + a(\tau/\sigma)^2 + b(\tau/\sigma)^4$ в решении уравнений /3.1/–/3.5/ типа /4.5/ только член σ_1 не будет зависеть от ℓ . С другой стороны в решении для антиферромагнетика /4.5/, по-видимому, нет членов вида $1/\ell$.

Автор благодарен С.В. Тябликову и Д.Н. Зубареву за полезную дискуссию.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, С.В. Тябликов. ДАН СССР 126,53 /1959/.
2. С.В. Тябликов. Укр. мат. журнал II , 287 /1959/.
3. R.A.Tahir-Kheli, D.Ter Haar. Phys. Rev. 127, 88 (1962).
4. Е. Червонко. ДАН СССР, 147, 88 /1962/.
5. J.Czerwonko. Bull. Pol. Acad. Sci. Cl . III, X, 589 (1962).

6. Пу Фу-чо. ДАН СССР 136, 1244 /1960/.

7. Пу Фу-чо. ДАН СССР 131, 546 /1960/.

8. J.Czerwonko. Acta Phys. Pol. XXIII, 23 (1963).

9. J.M.Ziman. Proc. Phys. Soc. 65, 548 (1952).

10. Пу Фу-чо, С.В. Тябликов, Т. Шиклош. Acta Phys. Acad. Sci. Hang XI, 323 (1960).

11. Н.Н. Боголюбов. Препринт ОИЯИ Д-781 /1961/.

12. С.В. Тябликов, В.Л. Бонч-Бруевич. Теория возмущений для двухмерных температурных функций Грина, Москва, 1962.

13. С.В. Тябликов. Физика металлов и металловедение, II , 198, /1956/.

14. F.Dyson. Phys. Rev. 102, 1217, 1230 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1963 г.

Таблица I

l	a_0		$-a_I$			
			антиферромагнетик		ферромагнетик	
	п.к.	о.ц.к.	п.к.	о.ц.к.	п.к.	о.ц.к.
1/2	o.704	0.733	0.263	0.278	0.192	0.277
1	1.456	1.493	0.443	0.459	0.354	0.398
3/2	2.188	2.224	0.689	0.686	0.655	0.670
2	2.898	2.930	1.260	1.267	1.237	1.254
5/2	3.593	3.622	6.124	5.275	5.595	4.962

Таблица II

l	σ_0		σ_0/l		σ_1		σ_2		σ_3	
	п.к.	о.ц.к.	п.к.	о.ц.к.	п.к.	о.ц.к.	п.к.	о.ц.к.	п.к.	о.ц.к
1/2	0.433	0.447	0.865	0.894	0.072	0.167	0.107	0.268	1.330	2.721
1	0.923	0.941	0.923	0.941	0.081	0.183	0.121	0.263	0.551	2.091
3/2	1.422	1.441	0.948	0.960	0.080	0.184	0.519	0.267	0.388	0.727
2	1.919	1.937	0.954	0.968	0.078	0.177	0.090	0.219	0.455	1.954
5/2	2.422	2.440	0.969	0.976	0.076	0.173	0.133	0.196	0.292	1.223