1179

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем

В.П. Зрелов

Р-1179

РАСЧЕТ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ

ЖЭТФ, 1963, т45, в2, с 291-293.

Дубна 1963 год

В.П. Зрелов

Р-1179

РАСЧЕТ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ВАВИЛОВА-ЧЕРЕНКОВА С УЧЕТОМ ДИСПЕРСИИ

Направлено в ЖЭТФ

Дубна 1963 год

Аннотация

Показано, что пренебрежение дисперсией среды при расчете интенсивности излучения Вавилова-Черенкова вблизи порога излучения приводит к существенным ошибкам. Даются формулы для правильного расчета.

V.P.Zrelov

CALCULATION OF VAVILOV–CERENKOV RADIATION INTENSITY WITH ACCOUNT OF DISPERSION

Abstract

It is shown that in calculating the intensity of Vavilov – Cerenkov radiation near the radiation threshold the neglect of the medium dispersion leads to essential errors. Formulae for a correct calculation are given.

Формула Тамма-Франка[1] для энергии излучения Вавилова-Черенкова на единице пути для однозарядной частицы имеет вид:

$$\frac{dW}{d\ell} = \frac{e^2}{c^2}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right)\omega\, d\omega = \frac{e^2}{c^2}\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{Sin}^2\theta(\omega)\omega\, d\omega\,. \qquad /1/$$

В укоренившейся практике расчетов потерь энергии заряженными частицами за счет излучения Вавилова-Черенкова обычно зависимостью $n(\omega)$ пренебрегают и выносят скобку $\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\omega)}\right)$ за интеграл /причем n берется для некоторой средней длины волны $\bar{\lambda}$ /, т.е. при вычислениях пользуются формулой:

$$\frac{dW}{d\ell} \approx 2\pi^2 e^2 \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{\lambda_1^2\,\lambda_2^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\bar{\lambda})}\right). \qquad /2/$$

При больших углах черенковского излучения это не вносит существенной ошибки в определение $\frac{dW}{d\ell}$, однако, пренебрежение дисперсией среды сильно искажает результат вычисления при малых углах излучения /вблизи порога/.

Действительно, если принять, что $n(\lambda)$ определяется двучленной формулой Коши, которая достаточно хорошо описывает зависимость $n(\lambda)$ в области нормальной дисперсии:

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}\,, \qquad /3/$$

то изменение угла излучения θ от длины волны будет определяться производной

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3\, n\, tg\,\theta}\,. \qquad /4/$$

У порога излучения $(\theta \approx 0)$ производная /4/ велика /и особенно в синей части спектра/.

Таким образом, вблизи порога углы излучения будут существенно отличаться для различных λ, а поэтому потери энергии, согласно формуле /1/, будут существенно зависеть от λ.

С зависимостью $n(\lambda)$ вида /3/ можно получить простую формулу для энергии излучения на единицу пути в диапазоне длин волн от λ_1 до λ_2 :

$$\frac{dW}{d\ell} = 2\pi^2 e^2 \frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{\lambda_1^2\,\lambda_2^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n(\lambda_1)n(\lambda_2)}\right). \qquad /5/$$

Из сравнения формул /2/ и /5/ видно, что учет зависимости $n(\lambda)$ в выражении для энергии излучения привел лишь к простой замене $n^2(\bar{\lambda})$ на $n(\lambda_1)\,n(\lambda_2)$.

Учет дисперсии в виде формулы /3/ в выражении для числа черенковских фотонов $\frac{dN}{d\ell}$, излучаемых частицей на единице пути, приводит к более сложному выражению:

$$\frac{dN}{d\ell} = 2\pi a \left\{ \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{\lambda_2 n(\lambda_2)-\lambda_1 n(\lambda_1)}{2a\lambda_1\lambda_2 n(\lambda_1)n(\lambda_2)} + \frac{1}{2a\sqrt{ab}}\left(\mathrm{arctg}\frac{a\lambda_2}{\sqrt{ab}} - \mathrm{arctg}\frac{a\lambda_1}{\sqrt{ab}}\right)\right]\right\}. \qquad /6/$$

Второй член в квадратных скобках формулы /6/ с точностью до нескольких процентов / ≈ 5%/ равен первому. Поэтому приближенно формулу /6/ можно записать так:

$$\frac{dN}{d\ell} \approx 2\pi a\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\lambda_2 n(\lambda_2)-\lambda_1 n(\lambda_1)}{a\lambda_1\lambda_2\, n(\lambda_1)\,n(\lambda_2)}\right)\right]$$

$$\frac{dN}{d\ell} \approx 2\pi a\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\left[1 - \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{\lambda_2 n(\lambda_2)-\lambda_1 n(\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)\,n(\lambda_1)\,n(\lambda_2)}\right)\right], \qquad /7/$$

где $2\pi a = 0{,}04585$, $\lambda_2 > \lambda_1$.

При $n(\lambda_2) = n(\lambda_1) = n(\bar{\lambda})$ и $a \approx n(\bar{\lambda})$ формулы /7/ принимают обычный вид:

$$\frac{dN}{d\ell} \approx 2\pi a\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2(\bar{\lambda})}\right). \qquad /8/$$

Чтобы почувствовать, насколько формулы /6/ и /8/ дают отличные результаты, мы произвели расчет числа фотонов по этим формулам при нескольких β и конкретной зависимости $n(\lambda)$, соответствующей стеклу К7 ($n_D = 1{,}5142$):

$$n(\lambda) = 1{,}5020 + \frac{0{,}42085\cdot 10^{-10}}{\lambda^2},$$

где λ в см.

В диапазоне длин волн от $\lambda_1 = 3000\ \mathring{A}$ до $\lambda_2 = 6563\ \mathring{A}$ расчет по формуле /6/ при $\beta = 0{,}66$ дает 13,4 фотона/см, тогда как расчет по формуле /8/ для $\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2/2$ дает всего 5,7 фотона/см, т.е. отличие получается в 2,3 раза. При больших скоростях разница в числе фотонов, рассчитываемых по различным формулам, уменьшается, что видно из таблицы 1.

Как показывают расчеты, ошибка в определении $\frac{dN}{d\ell}$ по простой формуле /8/ может быть уменьшена, если показатель преломления в нее подставлять для средней длины волны, определяемой следующим образом:

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\lambda \, d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda^2}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} . \qquad /9/$$

Величины $\frac{dN}{d\ell}$ для $\bar{\lambda}$, определяемой формулой /9/, приведены в последней колонке таблицы 1.

Правильный расчет интенсивности излучения Вавилова-Черенкова особенно важен при конструировании дифференциальных /угловых/ черенковских счетчиков, работающих при углах $\theta = 5^{\circ} \div 10^{\circ}$, где ошибка в $\frac{dN}{d\ell}$ может приводить либо к неоправданному увеличению длины счетчика, либо к пониженной против расчетной эффективности регистрации частиц.

Литература

1. И.Е. Тамм и И.М. Франк. ДАН СССР, 14, 107, 1937.

Работа поступила в издательский отдел
30 января 1963 г.

Таблица 1

β	$\theta(\bar{\lambda})$ – для $\bar{\lambda}$ определ. ф. /9/	$\frac{dN}{d\ell}$, $\frac{\text{фотонов}}{\text{см}}$ /для стекла К7 и $\lambda_1 = 3000\,\text{Å}$, $\lambda_2 = 6563\,\text{Å}$/		
		Формула /6/	Формула /8/ с $\bar{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2 / 2$	Формула /8/ с $\bar{\lambda}$ определ. ф. /9/
1,0	$49^{\circ}0'$	474	471	473
0,90	$43^{\circ}11'$	391	387	389
0,80	$34^{\circ}56'$	274	269	272
0,70	$20^{\circ}26'$	104	97,2	101
0,68	$15^{\circ}18'$	60,7	53,2	57,6
0,66	$6^{\circ}24'$	13,4	5,7	10,1