

3
К65



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.И. Копылов, В.И. Огиевецкий

P-1181

ЗАПРЕЩЕННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ МЕЗОНОВ
В МНОГОМЕЗОННЫХ РАСПАДАХ

Искл. Phys., 1964, v50, n2, p241-266.

Г.И. Копылов, В.И. Огневский

P-1161

ЗАПРЕЩЕННЫЕ КОНФИГУРАЦИИ МЕЗОНОВ
В МНОГОМЕЗОННЫХ РАСПАДАХ

1757/3 нс

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1963 год

А н н о т а ц и я

Рассматриваются самые общие, не зависящие от динамики, симметрии многопионных систем с определенными спином, четностью и изоспином. Перечислены следующие из них запрещенные конфигурации пионов для систем из четырех и трех пионов в состояниях со спином 0, 1, 2, изоспином 0, 1 и четностью ± 1 . Это может быть использовано для определения квантовых чисел мыслимых резонансных систем, распадающихся на пионы посредством сильных взаимодействий.

Abstract

Most general, independent of dynamics symmetries of multi-pion systems with definite spin, parity and isotopic spin are considered. The forbidden pion configurations resulting from these symmetries are obtained for the systems consisting of four and three pions in the states with spin 0, 1, 2, isotopic spin 0, 1 and parity ± 1 . This can be used to determine the quantum numbers of conceivable resonance systems decaying into pions by means of strong interactions.

§ 1. Введение

Недавно были экспериментально обнаружены резонансные состояния (ρ -мезон, ω -мезон и др.) в системе π -мезонов. Не исключено, что в ближайшее время число таких новых тяжелых мезонов возрастет. Для определения квантовых чисел обсуждаемых резонансных состояний (спина, изотопического спина и четности) исследуют некоторые свойства распределений по импульсам распадных π -мезонов, характерные для тех или иных наборов квантовых чисел. Для этого выписывают простейший матричный элемент распада, удовлетворяющий требованиям релятивистской и изотопической инвариантности и статистики Бозе-Эйнштейна для π -мезонов^{/1,2,3/}, и сопоставляют соответствующее ему распределение в фазовом пространстве с экспериментальным^{/1,2/}. При этом нет уверенности, что в матричном элементе общего вида сохранятся те свойства простейшего элемента (обращение в нуль в определенных областях фазового пространства), которые были использованы для определения спина и четности резонансного состояния.

В настоящей статье найдены и перечислены общие свойства амплитуд распадов посредством сильных взаимодействий - а именно, обращение в нуль при определенных значениях импульсов - следующие только из того, что пионы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна и должна соблюдаться лоренц- и изотопическая инвариантность^{x)}.

Свойства симметрии (в основном, зарядовые) многопионных систем были исследованы Пайсом^{/4/}. Нам, однако, показалось удобным исходить не из работы Пайса, а непосредственно опираться на наиболее общий вид гамильтониана. Простейшие матричные элементы 4π -распада были найдены Дюрром и Гайзенбергом^{/3/}. Отметим также работы Кобы и Гринберга^{/5/} по многопионным распадам, в которых состояния классифицируются по орбитальным моментам подсистем. Для систем 3π общность - т.е. независимость от динамики распада - некоторых запретов была известна ранее (см. лекции Далитца^{/6/}).

В § 2 работы выводится общий рецепт выявления симметрии амплитуд распада на примере распада скалярной частицы 0^+ на 4 пиона. В § 3 показано, как из этих симметрий получить симметрии амплитуд распада частиц с другими значениями спина и четности. В § 4 показано, что при распаде на 4π существует не более 23 типов запрещенных конфигураций; эти запреты классифицированы и выражены аналитически. В § 5 рассмотрены распады на 3 пиона. В § 6 на основе результатов § 4,5 обсуждаются способы экспериментального определения спина и четности резонансных состояний. Все конкретные результаты - общий вид свойств симметрии амплитуд сильного распада на 4π и 3π для резонансных состояний с изоспинами 0 и 1, спинами 0, 1 и 2 и четностями ± 1 , области в фазовом пространстве, в которых амплитуды обращаются в нуль, переменные, распределение по которым (одномерное) позволит выяснить спин и четность резонанса, перечислены в таблицах 1-8. Читатель, не интересующийся доказательством, может ограничиться этими таблицами и § 4,6.

x) Мы не оговариваем значение G-четности, поскольку предполагается изотопическая инвариантность.

§ 2. Вывод общего правила. Распад частицы 0^+

В этом параграфе мы сформулируем рецепт получения из общего вида гамильтониана свойств симметрии этого распада. Имея в виду получить с его помощью не зависящие от динамики взаимодействия свойства распадов, мы зададимся самой общей тензорной и изотопической структурой гамильтониана. Рецепт будет выведен для сильного распада частицы со спином 0 и четностью +1. Однако из вывода будет ясно, что рецепт применим и при других значениях спина и четности или при более детальном знании структуры гамильтониана.

В случае распада частицы $\phi (0^+)$ наиболее общий вид плотности эффективного гамильтониана таков: в состоянии $T=0$

$$\hat{H}(x) = \hat{\phi}(x) \hat{M}(x) \quad (1)$$

$$\hat{M}(x) = \sum_{A-D} (A \pi B \pi) (C \pi D \pi) ; \quad (1')$$

в состоянии с $T=1$

$$\hat{H}(x) = \hat{\phi}_a(x) (\hat{M}'_a(x) + \hat{M}''_a(x)) \quad (a = 1, 2, 3) \quad (2)$$

$$\hat{M}'_a(x) = \sum_{A-D} A' \pi_a (B' \pi [C' \pi D' \pi]) \quad (2')$$

$$\hat{M}''_a(x) = \sum_{A-D} [A'' \pi B'' \pi]_a (C'' \pi D'' \pi). \quad (2'')$$

Здесь A, B, C, D суть дифференциальные операторы (например,

$$A = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad B = \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\rho}, \quad C = \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\lambda}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x_\rho},$$

причем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам μ, λ, ρ). В формулах (1), (2) сумма распространяется на все мыслимые совокупности таких операторов^{х)}.

Скобки $()$ означают скалярное произведение в изопространстве. Тензорные индексы, скрытые в операторах A, \dots, D , должны быть свернуты, так как речь идет о распаде скалярной частицы. Легко показать (см. Приложение), что любой изоскаляр представим в виде (1), а любой изовектор - в виде суммы (2') и (2''), т.е., что (1,2) выражают собою самый общий вид гамильтониана распада^{хх)}. Поэтому можно перейти к получению общего вида амплитуды распада на четыре мезона в определенных зарядовых состояниях. Остановимся на $T=0$. Из (1) следует, что надо взять матричные элементы от

^{х)} Операторы определяются с точностью до постоянного множителя.

^{хх)} Может показаться, что предположение о том, что A, \dots, D - дифференциальные операторы, является ограничительным и что мыслимы другие формы M , содержащие, например, два абсолютно антисимметричных тензора, скажем $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\partial_\alpha \partial_\mu \pi \partial_\beta \nu \pi) (\partial_\gamma \lambda \pi \partial_\delta \rho \pi)$. Однако, нетрудно усмотреть, что все такие формы сводятся к (1).

$$\hat{M}^{(+ - 0 0)} \sim \sum_{A-D} (A\pi^+ B\pi^- C\pi^0 D\pi^0 + A\pi^- B\pi^+ C\pi^0 D\pi^0 + A\pi^0 B\pi^0 C\pi^+ D\pi^- + \\ + A\pi^0 B\pi^0 C\pi^- D\pi^+); \quad (3')$$

$$\hat{M}^{(+ - + -)} \sim \sum_{A-D} (A\pi^+ B\pi^- C\pi^+ D\pi^- + A\pi^+ B\pi^- C\pi^- D\pi^+ + \\ + A\pi^- B\pi^+ C\pi^+ D\pi^- + A\pi^- B\pi^+ C\pi^- D\pi^+); \quad (3'')$$

$$\hat{M}^{(0 0 0 0)} \sim \sum_{A-D} A\pi^0 B\pi^0 C\pi^0 D\pi^0. \quad (3''')$$

Здесь не выписаны множители, не существенные для свойств симметрии (например, $(2\omega)^{-\frac{1}{2}}$).

Рассмотрим подробнее, например, состояние $(+ - 0 0)$. Присвоим мезонам номера в этом порядке - 1234. Для ясности возьмем сначала один член в сумме (3'), например,

$$A = \partial_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}; \quad B = \partial_{\beta\gamma}; \quad C = \partial_{\alpha\delta}, \quad D = \partial_\delta.$$

Обозначим еще p_i - 4-импульс частицы номер i ; q - 4-импульс тяжелого мезона, $\sum p_i = q$, $q^2 = m^2$. Тогда вклад в матричный элемент от этого члена будет

$$M(+ - 0 0) \sim p_{1\alpha} p_{1\beta} p_{1\gamma} p_{2\beta} p_{2\gamma} p_{3\alpha} p_{3\delta} p_{4\delta} + p_{2\alpha} p_{2\beta} p_{2\gamma} p_{1\beta} p_{1\gamma} p_{3\alpha} p_{3\delta} p_{4\delta} + \\ + p_{3\alpha} p_{3\beta} p_{3\gamma} p_{4\beta} p_{4\gamma} p_{1\alpha} p_{1\delta} p_{2\delta} + p_{3\alpha} p_{3\beta} p_{3\gamma} p_{4\beta} p_{4\gamma} p_{2\alpha} p_{2\delta} p_{1\delta} + \\ + \text{члены с переставленными индексами 3 и 4} = \\ = (p_1 p_3)(p_1 p_2)^2 (p_3 p_4) + (p_2 p_3)(p_2 p_1)^2 (p_3 p_4) + (p_3 p_1)(p_3 p_4)^2 (p_1 p_2) + (p_3 p_2)(p_3 p_4)^2 (p_1 p_2) + \\ \text{Для краткости обозначим} \quad + (p_3 p_4)^2 (p_1 p_2).$$

$$p_i = i; \quad p_i p_k = ik \quad (4)$$

(эти обозначения будут применяться в статье всюду). Тогда

$$M(+ - 0 0) \sim (13)(12)^2(34) + (23)(12)^2(34) + (13)(34)^2(12) + (23)(34)^2(12) + (3 \rightleftharpoons 4). \quad (5)$$

Ясно поэтому, что всякое слагаемое в (3') состоит из восьми слагаемых вида

$$(12)^a (13)^b (14)^c (23)^d (24)^e (34)^f. \quad (6)$$

В (6) входят все шесть скалярных произведений 4-импульсов мезонов (так как $ii = \mu_\pi^2$, то зависимость от квадратов 4-импульсов выпадает, и поэтому в каждом из операторов A, B, C, D можно опускать дифференциальные операторы типа \square). Суммированию по всевозможным операторам $A - D$ в (3') соответствует суммирование по всем возможным степеням $a - f$. В применении к выражению (6) - одному из восьми членов, получаемых из (3') - результат такого суммирования есть некоторая неизвестная и зависящая от механизма распада функция шести скалярных произведений

$$F(12, 13, 14, 23, 24, 34), \quad (7)$$

которая для краткости будет записываться в виде $F(1234)^x$.

Остальные семь членов в матричном элементе отличаются перестановкой показателей степени, что соответствует перестановке порядка, в котором стоят номера пионов. Так, сумма вторых членов в (3'), дающих вклад в матричный элемент вида

$$\sum (12)^a (13)^d (14)^e (23)^b (24)^c (34)^f,$$

приводит к $F(12, 23, 24, 13, 14, 34)$ или короче $F(2134)$. Замечая, что первые два члена в формуле (3') также отличаются перестановкой π^+ и π^- , приходим к следующему рецепту, позволяющему сразу по виду эффективного гамильтониана записывать общую форму амплитуды распада, в которой явно отражены симметрии распадных пионов.

1. Для избранного зарядового состояния расписать изотопическую структуру эффективного гамильтониана распада, сохраняя в каждом члене порядок следования операторов A, B, C, D .

2. Выбрать определенную нумерацию частиц (например, в соответствии с первым членом). Тогда первому члену будет соответствовать порядок (1234), а остальным членам некоторые перестановки $P = (iklm)$ этого порядка в соответствии с порядком следования полевых операторов π -мезонов.

3. Искомая амплитуда будет выражаться в виде

$$\sum_P \text{sign } P \cdot F(iklm), \quad (8)$$

причем, во-первых, суммирование должно проводиться по тем перестановкам $P = (iklm)$, которые соответствуют различным членам в эффективном гамильтониане распада и, во-вторых, полученное выражение должно быть симметризовано по тождественным частицам. Знак при $F(iklm)$, обозначенный $\text{sign } P$, совпадает со знаком соответствующего члена в гамильтониане.

В виде примера, глядя на (3'), напомним сразу общий вид амплитуды распада частицы $T=0, S=0^+$ на $(+-00)$

$$\begin{aligned} M \left(\begin{matrix} (+ -) \\ 1 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (00) \\ 3 4 \end{matrix} \right)_{T=0} &= F(1234) + F(2134) + F(3412) + F(3421) + \\ &+ F(1243) + F(2143) + F(4312) + F(4321) = \\ &= (I + P_{12})(I + P_{34})(I + P_{13}P_{24})F(1234) \end{aligned} \quad (9_1)$$

(где I - тождественная перестановка, P_{ik} - перестановка i и k).

Аналогично получаются "формулы симметрии" для других зарядовых состояний

$$M \left(\begin{matrix} (00) \\ 1 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (00) \\ 3 4 \end{matrix} \right)_{T=0} = \left(\sum_{1,2,3,4} P \right) F(1234) \quad (9_2)$$

$$M \left(\begin{matrix} (+ -) \\ 1 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} (+ -) \\ 3 4 \end{matrix} \right)_{T=0} = (I + P_{13})(I + P_{24})(I + P_{12})(I + P_{34})F(1234) \quad (9_3)$$

х) Из-за законов сохранения одно из скалярных произведений зависит от пяти остальных. Нам, однако, удобнее сохранить симметрию в обозначениях.

$$M' \left(\begin{matrix} +0 \\ 1234 \end{matrix} \right) \text{ или } \left(\begin{matrix} 0-+ \\ 1234 \end{matrix} \right) = (I + P_{34}) \left(\sum_{T=1} \delta_p P \right) F(1234) \quad (9_4)$$

$$M'' \left(\begin{matrix} [+ -] \\ 12 \quad 34 \end{matrix} \right) (00) = (I + P_{34}) (I - P_{12}) F(1234) \quad (9_5)$$

$$M''' \left(\begin{matrix} [+ -] [+ -] \\ 12 \quad 34 \end{matrix} \right) = (I + P_{13}) (I + P_{24}) (I + P_{34}) (I - P_{12}) F(1234) \quad (9_6)$$

$$M'''' \left(\begin{matrix} [0+] [+ -] \\ 12 \quad 34 \end{matrix} \right) = (I + P_{23}) (I + P_{34}) (I - P_{12}) F(1234), \quad (9_7)$$

$$M'''' \left(\begin{matrix} [+0] (00) \\ 12 \quad 34 \end{matrix} \right) = \left(\sum_{T=1} P \right) (I - P_{12}) F(1234), \quad (9_8)$$

где $\sum_{i_1, i_2, \dots} P$ обозначает операцию полной симметризации по индексам i_1, i_2, \dots , а $\sum_{i_1, i_2, \dots} \delta_p P$ — полную антисимметризацию по i_1, i_2, \dots . Сопоставляя правую часть равенств (9_{1-8}) с левой, (в которой для ясности указана изоструктура амплитуд), легко понять правило выписывания "формул симметрии". Однако практически с формулами (9_{1-8}) работать неудобно — они чересчур лаконичны. В явном виде формулы симметрии выписаны в таблице 1.

Формулы (9_{1-8}) выведены для распада частицы 0^+ . Однако они остаются верными и при других значениях спина и четности, если только пересмотреть смысл $F(1234)$.

В рассматриваемом случае 0^+ $F(iklm)$ являлось скаляром в пространстве-времени. Очевидно, что для распадов резонансных состояний с другими значениями четности и спина свойства симметрии амплитуд распада, связанные с изотопической инвариантностью и тождественностью пионов, выражаемые соотношениями (8), останутся неизменными. Однако, в этих случаях в соответствии со спином и четностью изучаемых тяжелых мезонов $F(iklm)$ будут тензорными величинами (например, псевдоскаляр в случае 0^- , вектор в случае 1^- и т.д.). Для изучения свойств таких амплитуд удобно выделить в явном виде их тензорную структуру. Тогда зависимость от механизма распада будет включена снова только в скаляры вида $F(iklm)$ — функции от шести скалярных произведений $ik = p_i p_k$.

Поясним это на примере распада частицы $T=0$, $S=0^-$ на $(+ - 00)$. Вместо (1^+) теперь $\hat{M}(x)$ следует взять в виде

$$\hat{M}(x) = \sum_{A-D} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} (\partial_\mu A_\nu \partial_\lambda B_\sigma) (\partial_\mu C_\nu \partial_\lambda D_\sigma), \quad (10)$$

где смысл $A-D$ тот же, что и в (1^+) . Формула для $\hat{M}(+ - 00)$ также будет иметь вид $(3')$, но с фактором $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ перед суммой и с заменой A на $\partial_\mu A$ и т.д. Поэтому с помощью того же рецепта из новой формулы $(3')$ можно получить тот же общий вид амплитуды распада (9_1) , считая только в (9) F псевдоскаляром:

$$F(1234) = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \quad 1_\mu \quad 2_\nu \quad 3_\lambda \quad 4_\sigma \quad F'(1234), \quad (11)$$

где $F'(1234)$ некоторая новая функция шести скалярных произведений.

Мы видим, что алгоритм получения амплитуды распада из расписанной изоструктуры гамильтониана общего вида не зависит от спина и четности распадающегося состояния: пересматривая смысл $F(iklm)$ в формуле (9) для распада 0^+ , можно получить формулы для любого случая.

С помощью описанного алгоритма были получены свойства симметрии амплитуд распада скалярной частицы с $T=0$ и $T=1$. Они приведены в таблице 1. При распаде частицы с $T=1$ некоторым зарядовым состояниям соответствуют две изотопические структуры ($2'$) и ($2''$), и в таблице указано, какая из структур, имеется в виду: ($2'$) обозначается $\pi(\pi\pi)$, ($2''$) - $\pi\pi$.

В следующем параграфе будут для других квантовых чисел указаны выражения, которые следует подставлять в (g_{1-8}) вместо $F(iklm)$

§ 3. Распады резонансных состояний с другими значениями спина и четности

В этом параграфе будет показано, как находить общую форму амплитуд распада мыслимых резонансных состояний, отличных от 0^+ .

Ясно, что изотопическая структура матричных элементов не зависит от спина и четности и будет по-прежнему определяться формулами (1), (9) для $T=0$ и 1. Однако, тензорная структура будет иной: теперь не все тензорные индексы операторов A, B, C, D будут свернуты между собой. Часть индексов должна быть свернута с тензорными индексами резонансного состояния или же с индексами абсолютно антисимметричного тензора $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ (в тех случаях, когда его следует вводить для сохранения четности). Эти "свободные" индексы, относящиеся к тензорной структуре матричного элемента, удобно выписывать явно, в отличие от остальных индексов, которые сворачиваются внутри произведения $A_\mu B_\nu C_\lambda D_\sigma \pi$.

А) Распад псевдоскалярной частицы 0^- . Плотность эффективного гамильтониана распада в общем случае имеет вид $\hat{\phi}(x) \hat{M}(x)$, где (опуская изотопическую структуру)

$$\hat{M} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \sum_{A-D} A_\mu \pi B_\nu \pi C_\lambda \pi D_\sigma \pi \quad (12)$$

(например, $A_\mu \pi B_\nu \pi C_\lambda \pi D_\sigma \pi = \delta_{\mu\alpha} \pi \delta_{\nu\alpha\beta} \pi \delta_{\lambda\gamma} \pi \delta_{\sigma\beta\gamma\pi}$). Это действительно самое общее выражение для амплитуды: в силу антисимметрии $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ выражения с двумя свободными индексами при одном операторе (например, $A_{\mu\nu}$) исчезают, а члены с тремя тензорами ϵ снова могут быть записаны в виде (12).

Матричный элемент распада будет представляться суммой по определяемым изотопической структурой перестановкам $P = (iklm)$ членов

$$(1234) F(1234) \text{sign } P, \quad (13)$$

где обозначено

$$(1234) = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} 1_\mu 2_\nu 3_\lambda 4_\sigma. \quad (14)$$

В системе покоя тяжелого мезона $q = \{m, \vec{0}\}$ и $(1234) = m((\vec{1} \times \vec{2}) \vec{3})$. В (13) по-прежнему F - некоторая функция шести скалярных произведений. С помощью (13) для каждого зарядового состояния из формул таблицы 1 или (9) можно получить формулы для распада 0^- , делая подстановку

$$F(1234) \rightarrow (1234) F(1234) \quad (15)$$

и учитывая антисимметричность (1234). Результаты сведены в таблице 2. Из-за громоздкости получаемых выражений, мы не приводим в таблице 2 и последующих таблицах 3,4 формул для распада на состояния с двумя и более нейтральными мезонами (трудные для экспериментального наблюдения). В случае надобности читатель с помощью таблицы 1 и (15) легко заполнит пустые места в таблице.

б) Распад векторной частицы 1^- . Здесь $\hat{H} = \hat{\phi}_\mu(x) \hat{M}_\mu(x)$, где для $T=0$

$$\hat{M}_\mu = \sum_{A-D} (A_\mu \pi B \pi) (C \pi D \pi) \quad (16)$$

(положение тензорного индекса μ в данном случае не играет роли); а для $T=1$

$$\hat{H} = \hat{\phi}_\mu (\hat{M}_\mu^{(1)} + \hat{M}_\mu^{(2)} + \hat{M}_\mu^{(3)} + \hat{M}_\mu^{(4)}) \quad , \quad \text{где} \quad \hat{M}_\mu^{(1)} = \sum_{A-D} [A_\mu \pi B \pi] (C \pi D \pi) ;$$

$$\hat{M}_\mu^{(2)} = \sum_{A-D} [A \pi B \pi] (C \pi D_\mu \pi) ;$$

$$\hat{M}_\mu^{(3)} = \sum_{A-D} A_\mu \pi (B \pi C \pi D \pi) ; \quad \hat{M}_\mu^{(4)} = \sum_{A-D} A \pi (B \pi C \pi D_\mu \pi) \quad (17)$$

(остальные расстановки индекса μ сводятся к одной из приведенных; операторы A, B, C, D в каждой сумме свои).

Напомним здесь, что вероятность распада пропорциональна сумме квадратов модулей пространственных компонент в системе покоя тяжелого мезона^{х)}.

Легко видеть, что общий вид симметрий амплитуд распада векторной частицы получится из таблицы 1 или из (9) при помощи двух подстановок

$$F(1234) \rightarrow 1_\mu F(1234) \quad (18)$$

$$F(1234) \rightarrow 4_\mu F(1234).$$

Результаты сведены в таблице 3. При $T=1$ получаются для каждой изоструктуры два общих выражения для амплитуд, не сводимых друг к другу, а всего для $T=1$ амплитуда распада выражается, вообще говоря, в виде суммы четырех членов с разными свойствами симметрии. В дальнейшем при извлечении конкретных следствий из этих свойств в таблице 5 выделены следствия, общие для всех членов, входящих в амплитуду.

х) Фактически при $S=1$ волновая функция должна иметь вид $M_\mu = M'_\mu - m^{-2} q_\mu (q_\mu M'_\mu)$, с тем, чтобы выполнялось дополнительное условие $q_\mu M_\mu = 0$, выделяющее спин 1. Однако второй член в системе покоя тяжелого мезона равен нулю и не влияет на вероятность распада.

в) Распад псевдовекторной частицы 1^+ . Эффективный гамильтониан распада состояний с $S = 1$ имеет общий вид $\hat{H}(x) = \hat{\phi}_\mu(x) \hat{M}_\mu(x)$, где

$$\hat{M}_\mu = \sum_{A-D} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} A_\nu \pi B_\lambda \pi C_\sigma \pi D \pi \quad (19)$$

(изоструктура опущена). Это означает подстановку в таблице 1 или в (9)

$$F(1234) \rightarrow (123) F(1234). \quad (20')$$

Здесь

$$(123) = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} 1_\nu 2_\lambda 3_\sigma \equiv (\vec{1} \times \vec{2}) E_3 + (\vec{3} \times \vec{1}) E_2 + (\vec{2} \times \vec{3}) E_1 \quad (21)$$

с учетом того, что $\mu \neq 4$ (нас интересуют только пространственные компоненты).

При фиксировании изоструктуры гамильтониана становится существенным, куда поставить оператор без свободного тензорного индекса (D в (19)), так что возможны четыре подстановки, при помощи которых из таблицы 1 или из (9) получаются выражения для амплитуды распада частицы 1^+ . Некоторые из этих подстановок приводят к одним и тем же общим выражениям. Так, для изоспина 0 все четыре мезона входят в (1) равноправно, поэтому достаточно только одной замены (20'), что бы получить общее выражение для волновой функции. Для состояний с $T=1$ замена

$$F(1234) \rightarrow (234) F(1234) \quad (20'')$$

приведет к другому классу волновых функций, отличному от получаемого из (20'). Результаты подстановок приведены в таблице 4.

Другой мыслимый вид \hat{M}_μ

$$\hat{M}_\mu = \sum_{A-D} \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} A_\nu \pi B_\lambda \pi C_\sigma \pi D_{\mu\alpha} \pi \quad (22)$$

сводится к (19). Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{M}_\mu &= \sum_{A-D} \delta_{\mu\kappa} \epsilon_{\alpha\nu\lambda\sigma} A_\nu \pi B_\lambda \pi C_\sigma \pi D_{\kappa\alpha} \pi = \\ &= \frac{1}{6} \sum_{A-D} \epsilon_{\mu\alpha'\beta'\gamma'} \epsilon_{\kappa\alpha''\beta''\gamma''} \epsilon_{\alpha\nu\lambda\sigma} A_{\nu\alpha'} \pi B_{\lambda\beta''} \pi C_{\sigma\gamma''} \pi D_{\kappa\alpha} \pi = \\ &= \epsilon_{\mu\alpha'\beta'\gamma'} \sum_{A-D} \sum_{\alpha''\beta''\gamma''} \frac{1}{6} \delta_{\alpha\nu\lambda\sigma} \epsilon_{\kappa\alpha''\beta''\gamma''} A_{\nu\alpha'} \pi B_{\lambda\beta''} \pi C_{\sigma\gamma''} \pi D_{\kappa\alpha} \pi. \end{aligned} \quad (23)$$

г) Распад частицы со спином 2. Плотность эффективного гамильтониана распада частицы со спином 2 есть $\hat{H}(x) = \phi_{\mu\nu}(x) \hat{M}_{\mu\nu}(x)$, причем в системе покоя тяжелого мезона должны удовлетворяться дополнительные условия

$$\hat{M}_{ik} = \hat{M}_{ki}; \hat{M}_{4k} = \hat{M}_{44} = 0; M_{ii} = 0; (i, k = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Вероятность распада будет пропорциональна сумме квадратов модулей матричных элементов от компонент M_{ik} в системе покоя тяжелого мезона^{x)}. При распаде состояния 2^+ типичные члены, входящие в M_{ik} , суть

$$A_i \pi B_k \pi C \pi D \pi + A_k \pi B_i \pi C \pi D \pi - \frac{2}{3} \delta_{ik} A_l \pi B_l \pi C \pi D \pi \quad (25')$$

и

$$A_{ik} \pi B \pi C \pi D \pi - \frac{1}{3} \delta_{ik} A_{ll} \pi B \pi C \pi D \pi. \quad (25'')$$

После закрепления изотопической структуры появляется ряд членов, отличающихся между собой положением свободных тензорных индексов i и k . Для $T=0$ и 1 имеется пять подстановок, приводящихся к разным классам общих формул

$$\begin{aligned} F(1234) &\rightarrow f(12) F(1234); \rightarrow f(14) F(1234); \\ &\rightarrow f(34) F(1234); \rightarrow f(11) F(1234); \\ &\rightarrow f(44) F(1234), \end{aligned} \quad (26_{1-5})$$

где

$$f(ab) = a_i b_k + a_k b_i - \frac{2}{3} \delta_{ik} (\vec{a} \vec{b}), \quad (27)$$

а F_{π} - снова функции шести скалярных произведений. При $T=0$ к разным классам приводят $(26_{1,2,4})$, при $T=1$ и изоструктуре $\pi(\pi\pi\pi) - (26_{1,2,4,5})$, при изоструктуре $\pi\pi$ - все пять формул (26).

При распаде состояния 2^- типичные члены, входящие в M_{ik} , суть^{xx)}

$$(\epsilon_{i\alpha\beta\gamma} A_k \pi + \epsilon_{k\alpha\beta\gamma} A_i \pi - 2/3 \delta_{ik} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_l \pi) B_\alpha \pi C_\beta \pi D_\gamma \pi \quad (28')$$

и

$$(\epsilon_{i\alpha\beta\gamma} A_{ka} \pi + \epsilon_{k\alpha\beta\gamma} A_{ia} \pi - 2/3 \delta_{ik} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_{la} \pi) B_\beta \pi C_\gamma \pi D \pi. \quad (28'')$$

Для каждой из изоструктур $(1'')$, $(2')$, $(2'')$ получаются несколько существенно различных классов общих формул для амплитуд распада; у $T=0$ три, у $T=1$ $\pi(\pi\pi\pi)$ - пять, у $T=1$ $\pi\pi$ - шесть. Например, для $T=1$ $\pi\pi$ эти классы получаются из таблицы 1 подстановками

x) Можно не заботиться о выполнении условия $M_{4k} = M_{44} = 0$, так как из любого симметричного тензора $M_{\mu\nu}$ может быть построен тензор

$$L_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} M_{\rho\rho} + \frac{1}{3m^2} \delta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\lambda M_{\rho\lambda} - m^{-2} (\partial_\rho \partial_\nu M_{\mu\rho} + \partial_\rho \partial_\mu M_{\nu\rho}) + \frac{2}{3m^2} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho \partial_\lambda M_{\rho\lambda} + \frac{1}{3m^2} \partial_\mu \partial_\nu M_{\rho\rho},$$

причем в системе покоя тяжелого мезона матричные элементы от компонент L_{ik} совпадают с матричными элементами от M_{ik} (при условии $M_{ii} = 0$) и в то же время $L_{4k} = L_{44} = 0$

xx) Выражение (28) исчерпывает все возможности для случая 2^+ . Структура $\sum \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A_{\mu\alpha} \pi B_{\nu\beta} \pi C_\gamma \pi D_\delta \pi$ представима в виде некоторой линейной комбинации $(28')$ и $(28'')$.

$$\begin{aligned}
F(1234) &\rightarrow f(1; 234) F(1234); \rightarrow f(4; 123) F(1234); \\
&\rightarrow f(1; 123) F(1234); \rightarrow f(1; 134) F(1234); \\
&\rightarrow f(4; 124) F(1234); \rightarrow f(4; 134) F(1234),
\end{aligned}
\tag{29}$$

где

$$f(a; bcd) = a_i (bcd)_k + a_k (bcd)_i - 2/3 \delta_{ik} a_\ell (bcd)_\ell \tag{30}$$

и

$$(bcd)_k = \epsilon_{k\alpha\beta\gamma} b_a c^\alpha d^\beta \gamma. \tag{см. (21)} \tag{31}$$

Для других изоструктур часть подстановок (29) приводит к одинаковым классам. Из-за обилия и громоздкости формул для спина 2 мы их в статье не приводим (однако следующие из них запреты включены в таблицу 5).

§ 4. Запрещенные конфигурации мезонов

В полученные выше общие выражения для амплитуд распада (таблицы 1-4) входят неизвестные, зависящие от динамики распада, функции $F(iklm)$. При определении квантовых чисел резонансных состояний обычно выбирают простейший матричный элемент распада и сопоставляют соответствующее ему распределение импульсов с экспериментальными данными. При этом особое внимание уделяется нулям матричного элемента, благодаря которым некоторые области в импульсном пространстве оказываются под запретом. Например, при распаде частицы $\omega^0 (T=0, S=1^-)$ на $\pi^+ \pi^- \pi^0$ простейший матричный элемент распада есть $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2$; он исчезает на границе диаграммы Далитца.

При таком подходе неясно, связаны ли нули амплитуды распада с частным выбором именно простейшего матричного элемента, так что существуют матричные элементы, не обладающие такими нулями, или же эти запреты - общее свойство амплитуд распада, связанное только с квантовыми числами состояния и не зависящее от динамики взаимодействия. Для некоторых распадов тяжелых мезонов на 3π справедливо последнее утверждение /5/.

В этом параграфе с помощью таблиц 1-4 будут найдены области фазового пространства импульсов четырех мезонов, запрещаемые свойствами симметрии распадов тяжелых мезонов с данными квантовыми числами ("запрещенные конфигурации"). Простейшие же матричные элементы распада на 4 пиона приводят, как правило, к лишним запретам.

Нас интересует в каких областях импульсного пространства амплитуда того или иного распада всегда обращается в нуль при любых функциях F , т.е. вне зависимости от динамики распада. Такие нули появляются по двум причинам.

Во-первых, функции F входят в амплитуду в определенной симметричной комбинации, и поэтому при некоторых равенствах между аргументами (скалярными произведениями ik) амплитуда равна нулю при произвольных F . Например, в случае $S=0^+$, $T=1$; $[+-](00)$ амплитуда

$$\begin{aligned} M &= F(1234) - F(2134) + F(1243) - F(2143) = \\ &= F(12, 13, 14, 23, 24, 34) - F(12, 23, 24, 13, 14, 34) + \\ &+ F(12, 14, 13, 24, 23, 34) - F(12, 24, 23, 14, 13, 34) \end{aligned} \quad (32)$$

будет обязательно равна нулю, когда

$$13 = 23, \quad 14 = 24, \quad (33)$$

а также, когда

$$13 = 24, \quad 14 = 23 \quad (33')$$

Во-вторых, из-за определенной тензорной структуры амплитуды. Например, в случае распада $S=1^+$, $T=1$, $[+-](00)$ один из двух возможных общих видов амплитуды

$$(123) [F(1234) + F(2134)] + (124) [F(1243) + F(2143)] \quad (34)$$

приводит к запрещению коллинеарных конфигураций мезонов (при $i||j||k$ ($ijk=0$)).

В поиске иных запретов из-за произвольности F мы обязаны ограничиться случаями почленного равенства $F(1234) = F(1243)$, $F(2134) = F(2143)$ или $F(1234) = F(2143)$, $F(2134) = F(1243)$, что соблюдается лишь при

$$13 = 14, \quad 23 = 24 \quad \text{или} \quad 13 = 24, \quad 14 = 23. \quad (35)$$

С точностью до неизвестного коэффициента (34) теперь равно $(123) + (124) = (\vec{1} \times \vec{2}) \cdot m$, обращаясь в нуль при $\vec{1} || \vec{2}$ (что не противоречит (35)). Условие $\vec{1} || \vec{2}$ выделяет из (35) класс конфигураций $\vec{1} || \vec{2}$, $E_3 = E_4$.

Эти примеры типичны. Во всех случаях^{х)} поиски запретов начинаются с установления равенств между скалярными произведениями (ik), объединяющих между собой члены с различными $F(iklm)$. При наличии тензорной структуры из конфигураций, выраженных этими равенствами, затем выделяются более частные конфигурации.

Поэтому систематический поиск запретов удобно начать с установления всех конфигураций, вытекающих из равенств

$$F(iklm) = F(1234) \quad (36)$$

при произвольной F . Есть 24 равенства типа (36) в соответствии с $4!$ перестановками $iklm$. Пересмотрев их все, получим 4 класса конфигураций: α , β , γ , δ .

а) конфигурации типа

$$13 = 23, \quad 14 = 24 \quad (37 \alpha)$$

^{х)} Если не говорить о легко обнаруживаемых запретах на коллинеарность и компланарность.

Обозначим эту конфигурацию $\alpha(1,2)$. Возможны шесть конфигураций типа α :

$\alpha(1,2), \alpha(1,3), \alpha(1,4), \alpha(2,4), \alpha(3,4), \alpha(2,3)$;

β) конфигурации типа

$$13 = 24; \quad 14 = 23.$$

(37 $_{\beta}$)

Обозначим эту конфигурацию $\beta(1,2)$. Возможны 3 конфигурации типа β :

$\beta(1,2), \beta(1,3), \beta(1,4), (\beta(3,4) \equiv \beta(1,2) \text{ и т.д. });$

γ) конфигурации типа

$$12 = 34; \quad 13 = 23 = 14 = 24$$

(37 $_{\gamma}$)

Обозначим эту конфигурацию $\gamma(1,2)$. Возможны три конфигурации типа γ :

$\gamma(1,2), \gamma(1,3), \gamma(1,4)$.

δ) конфигурации типа

$$12 = 13 = 14; \quad 23 = 24 = 34$$

(37 $_{\delta}$)

Обозначим эту конфигурацию $\delta(1)$. Возможны четыре конфигурации типа δ :

$\delta(1), \delta(2), \delta(3), \delta(4)$.

Кроме попарных равенств (36), часто приходится требовать одновременного выполнения (36) для нескольких пар, и значит, одновременного выполнения равенств одного или нескольких типов. Например, если потребовать одновременного выполнения $\alpha(1,2)$ и $\beta(1,2)$, придем к равенству $13=23=14=24$, т.е. к новой конфигурации. Перебрав все комбинации $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, придем либо к тем же конфигурациям, либо к одному из трех новых типов: ϵ, ζ, η .

ϵ) конфигурации типа

$$13=23=14=24$$

(37 $_{\epsilon}$)

Эта конфигурация обозначается $\epsilon(1,2)$. Возможны три конфигурации типа ϵ :

$\epsilon(1,2), \epsilon(1,3), \epsilon(1,4)$.

ζ) конфигурации типа

$$12=34, \quad 13=24, \quad 14=23$$

(37 $_{\zeta}$)

(только одна).

η) конфигурация типа

$$12=13=14=23=24=34$$

(37 $_{\eta}$)

(только одна).

Конфигурации ϵ, ζ, η есть частные случаи конфигураций $\alpha-\delta$. При поисках запретов их надо испытывать только в том случае, если соответствующие более общие конфигурации не дают запретов.

Определим наглядный смысл равенств (37) в системе покоя резонансного состояния. Скалярно умножив уравнение

$$1 + 2 + 3 + 4 = q$$

последовательно на 1,2,3,4, получим четыре равенства

$$12 + 13 + 14 = m E_1 - \mu^2, \quad (38_1)$$

$$12 + 23 + 24 = m E_2 - \mu^2, \quad (38_2)$$

$$13 + 23 + 34 = m E_3 - \mu^2, \quad (38_3)$$

$$14 + 24 + 34 = m E_4 - \mu^2. \quad (38_4)$$

Если справедливо условие $\alpha(1,2)$, т.е. (37_a), то левые части (38₁) и (38₂) совпадают, т.е. $E_1 = E_2$. Поэтому $\vec{13} = \vec{23}$, $\vec{14} = \vec{24}$ ^х. Далее, при этом плоскости $(1,2)$ и $(3,4)$ перпендикулярны, так как

$$(\vec{1} \times \vec{2})(\vec{3} \times \vec{4}) = \begin{vmatrix} \vec{13} & \vec{14} \\ \vec{23} & \vec{24} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, конфигурация $\alpha(1,2)$ обладает свойствами: $E_1 = E_2$, $\psi = \pi/2$, E_3 и E_4 любые (рис. 1).

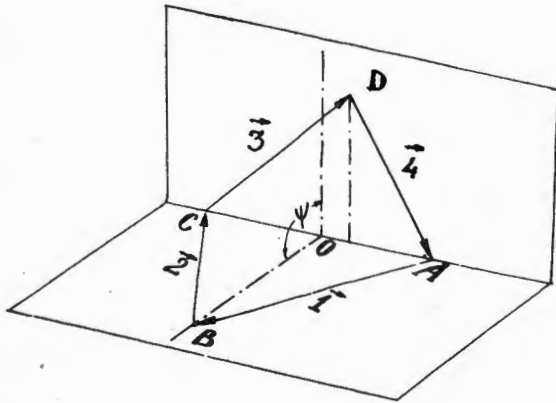


Рис. 1.

Верно и обратное утверждение: из

$$E_1 = E_2, (\vec{1} \times \vec{2})(\vec{3} \times \vec{4}) = 0 \text{ (причем } \vec{3} \times \vec{4} \neq 0 \text{)} \quad (39_a)$$

следует (37_a). Аналогично легко получить взаимнооднозначное соответствие между

$$\beta(1,2) \quad \text{и} \quad E_1 = E_2, E_3 = E_4, \quad \psi - \text{любое} \quad (39_\beta)$$

$$\gamma(1,2) \quad \text{и} \quad E_1 = E_2 = E_3 = E_4, \quad \psi = \pi/2 \quad (39_\gamma)$$

$$\epsilon(1,2) \quad \text{и} \quad E_1 = E_2, E_3 = E_4, \quad \psi = \pi/2 \quad (39_\epsilon)$$

$$\zeta \quad \text{и} \quad E_1 = E_2 = E_3 = E_4, \quad \psi - \text{любое} \quad (39_\zeta)$$

$$\eta \quad \text{и} \quad E_1 = E_2 = E_3 = E_4, \quad \psi = \pi/2, \quad OB = \sqrt{2/3(1/16m^2 - \mu^2)}. \quad (39_\eta)$$

^х) Заметим, что для всех конфигураций (37) выполняются системы соответствующих трехмерных равенств, и наоборот.

Конфигурация $\delta(1)$ соответствует черт. 2 с $E_2 = E_3 = E_4$, причем импульсы $\vec{2}, \vec{3}, \vec{4}$ лежат на конусе с осью $\vec{1}$ и произвольным углом раствора, образуя между собою равные углы. Если концы векторов $\vec{1}, \vec{2}, \vec{3}, \vec{4}$ суть вершины правильного тетраэдра, получается конфигурация η .

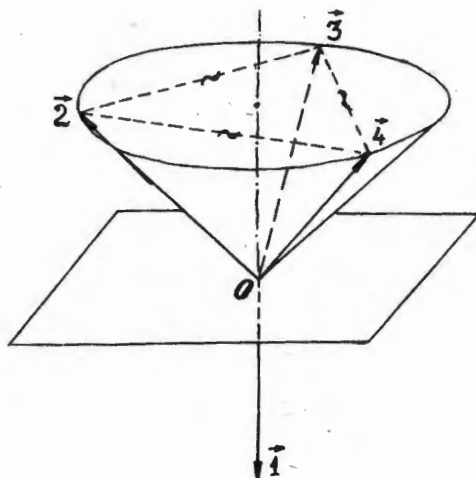


Рис. 2.

Мы перечислили все возможные запрещенные конфигурации четырех мезонов (их 23, если включить в их число коллинеарность $|\vec{1} \times \vec{2}| = |\vec{1} \times \vec{3}| = 0$ и компланарность $(\vec{1} \vec{2} \vec{3}) = 0$). Подставляя в каждую из амплитуд таблиц 1-2 все 23 равенства и выделяя из них те, которые обратят амплитуды в нуль, получим все запреты в распаде частиц со спином 0.

Запреты в распадах частиц с ненулевым спином также могут черпаться только из перечисленных 23 конфигураций, но сводятся к их частным случаям (как в разобранным примере). Поэтому следует при поиске запретов: 1) отобрать те конфигурации, которые объединяют различные векторные члены ((123) и (124) в примере), делая выражение для амплитуды проще; 2) найти нули этого нового выражения и проверить, что они не противоречат отобраным конфигурациям.

В таблице 5 приведены все полученные подобной процедурой запрещенные конфигурации мезонов. Обычно каждой схеме распада частицы с определенными квантовыми числами, т.е. одной клетке таблицы, отвечает несколько запретов. Каждая строка внутри клетки — это одна запрещенная конфигурация. Обозначения типа “3) - 8) $\vec{i} = \vec{j}, E_k = E_l$ ” означают, что есть 6 запрещенных конфигураций “ $\vec{i} = \vec{j}, E_k = E_l$ ”, отличающихся перестановками i, j, k, l . В таблице приводятся только независимые конфигурации. Мы не выделяли тех частных видов этих конфигураций, которые дают в амплитуде нуль второго порядка. В тех случаях, когда одному зарядовому состоянию отвечают несколько общих формул для амплитуд или несколько изоструктур, в таблице приведены запреты, общие всем формулам (изоструктурам).

Из таблицы видно, что никаким двум значениям спина и четности не соответствуют одинаковые системы запретов. Это важно для экспериментального определения квантовых чисел тяжелых мезонов.

Подставив в таблицы 1-4 простейший мыслимый вид $F(1234)$ ($F = 1$ или $F = 12$ или $F = 12 \cdot 13$), можно получить простейший вид амплитуд распада (иногда одной формуле отвечают две простейшие амплитуды) и затем найти ее нули. Обычно они не совпадают с нулями амплитуды общего вида. Так, в рассмотренном выше примере (32) простейшая амплитуда $M = 13 - 23 + 14 - 24 \equiv m(E_1 - E_2)$ запрещает состояния с $E_1 = E_2$, в то время, как амплитуда общего вида запрещает состояния с $E_1 = E_2$, $\psi = \pi/2$ (рис. 1) и с $E_1 = E_2$, $E_3 = E_4$.

§ 5. Распады на три π -мезона

Совершенно аналогично получается из рецепта § 2 общий вид амплитуд распада на 3π . Приведем основные этапы вывода, не вдаваясь в детали. Амплитуда имеет вид

$$\sum_P \text{sign } P \cdot F(ikl), \quad (40)$$

где

$$F(123) \equiv F(12, 13, 23) \equiv F(p_1 p_2, p_1 p_3, p_2 p_3) \quad (41)$$

есть фактически функция энергий двух частиц, так как

$$il = \frac{1}{2} (m^2 - \mu^2 - 2mE_k).$$

Так же, как и для распада $\phi \rightarrow 4\pi$, можно показать, что любые изотопические структуры амплитуд распада $\phi \rightarrow 3\pi$ сводятся к двум простейшим (см. Приложение):

$$M(T=0) = (\vec{\pi} \vec{\pi}^+ \vec{\pi}^+) \quad (42)$$

$$M_\alpha(T=1) = \pi_\alpha (\vec{\pi}^+ \vec{\pi}^+), \quad (43)$$

а наиболее общие тензорные структуры амплитуд таковы:

$$M^{0^-} = \sum_{A,B,C} A_\pi B_\pi C_\pi; \quad (44)$$

$$M_\mu^{1^+} = \sum_{A,B,C} A_\mu \pi B_\pi C_\pi; \quad (45)$$

$$M_\mu^{1^-} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \sum_{A,B,C} A_\nu \pi B_\lambda \pi C_\sigma \pi; \quad (46)$$

$$M_{\mu\nu}^{2^+} = \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \sum_{A,B,C} A_\nu \alpha \pi B_\beta \pi C_\gamma \pi + \epsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} \sum_{A,B,C} A_\mu \alpha \pi B_\beta \pi C_\gamma \pi - \quad (47)$$

$$- \frac{2}{3} \delta_{\mu\nu} \sum_{i=1}^3 \epsilon_{i\alpha\beta\gamma} \sum_{A,B,C} A_{i\alpha} \pi B_\beta \pi C_\gamma \pi; \quad (48)$$

$$M_{\mu\nu}^{2^-} = \sum_{A-C} (A'_\mu \pi B'_\nu \pi C''\pi + A'_\nu \pi B'_\mu \pi C''\pi - \frac{2}{3} \delta_{\mu\nu} A'_\ell \pi B'_\ell \pi C''\pi + \\ + A''_{\mu\nu} \pi B''\pi C''\pi - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} A''_{\ell\ell} \pi B''\pi C''\pi).$$

Отсюда следуют очевидные рецепты получения для каждого зарядового состояния из общего вида амплитуды распада 0^- общего вида амплитуд распада частиц с другими квантовыми числами

$$1^+ : F(123) \rightarrow 1_1 F(123) \quad \text{или} \quad 3_1 F(123); \quad (49)$$

$$1^- : F(123) \rightarrow (123)_1 F(123); \quad (50)$$

$$2^+ : F(123) \rightarrow f(1) F(123) \quad \text{или} \quad -f(3) F(123); \quad (51)$$

$$2^- : F(123) \rightarrow f(12) F(123) \quad \text{или} \quad -f(23) F(123) \\ \text{или} \quad -f(11) F(123) \quad \text{или} \quad -f(33) F(123). \quad (52)$$

Здесь обозначено

$$(123)_1 = \epsilon_{1\nu\lambda\sigma} 1_\nu 2_\lambda 3_\sigma = m(\vec{1} \times \vec{2})_1, \quad (53)$$

$$f(1) = 1_1(123)_k + 1_k(123)_1 = m[1_1(\vec{1} \times \vec{2})_k + 1_k(\vec{1} \times \vec{2})_1], \quad (54)$$

$$f(12) = 1_1 2_k + 1_k 2_1 - \frac{2}{3} \delta_{1k} (\vec{1} \vec{2}). \quad (55)$$

С помощью этих формул составлены таблицы 6,7 общих видов амплитуд сильных распадов $\phi \rightarrow 3\pi$ с квантовыми числами $T = 0, 1$ и $S = 0^-, 1^\pm, 2^\pm$. В таблице 8 приведены запреты, следующие из общих формул. Мы сравнили их с запретами, следующими из простейших формул для амплитуд, и во всех случаях обнаружили совпадение результатов.

§ 6. Практическое применение результатов

Зависимость характера запретов от спина и четности распадающейся частицы позволяет определять эти квантовые числа, не зная конкретного вида амплитуды распада. Следует лишь выбрать переменную "и" — "пробную функцию", — распределение по которой выявит наличие запрета. Для 3π — распада выбор и облегчался возможностью наглядно изобразить фазовое пространство, т.е. начертить диаграмму Далитца. Возможен однако способ выбора и, не зависящий от размерности фазового пространства.

Пусть для данного типа распада найдены несколько запрещенных конфигураций. Запишем их в виде

$$\left\| \begin{array}{l} \text{если } f_1^{(1)} = f_1^{(2)} = \dots = f_1^{(k_1)} = 0 \text{ или если } f_2^{(1)} = f_2^{(2)} = \dots = f_2^{(k_2)} = 0 \dots \\ \text{или если } f_m^{(1)} = f_m^{(2)} = \dots = f_m^{(k_m)} = 0, \text{ то } M = 0. \end{array} \right. \quad (56)$$

Все $f_1^{(1)}, \dots, f_m^{(k_m)}$ суть известные функции импульсов пионов. Например, для случая, выражаемого формулой (32),

$$f_1^{(1)} = 13 - 23, \quad f_1^{(2)} = 14 - 24, \quad f_2^{(1)} = 13 - 24, \quad f_2^{(2)} = 14 - 23.$$

Образуем неотрицательные функции

$$u_1 = \sum_{j=1}^{k_1} |f_1^{(j)}| \quad \text{либо} \quad u_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^{k_1} (f_1^{(j)})^2} \quad (57)$$

$$u_2 = \sum_{j=1}^{k_2} |f_2^{(j)}| \quad \text{--- " ---}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_m = \sum_{j=1}^{k_m} |f_m^{(j)}| \quad \text{--- " ---}$$

В качестве пробной функции u тогда можно выбрать

$$u = u_1 u_2 \dots u_m \quad (58)$$

либо произведение любого числа u_i , - в частности, u может быть равно любому u_i .

Строя для событий в области резонансного пика распределение по u_i , следует ожидать в точке $u_i = 0$ провала в распределении для тех значений спина и четности, которые запрещают соответствующую конфигурацию. Для прочих значений спина или четности этого провала не будет или он будет слабее. Спад в распределении по u для данных квантовых чисел должен быть особенно глубок, так как нули каждой из пробных функций u_1, \dots, u_m должны быть маловероятны.

Спад, однако, может объясняться и чисто кинематическими причинами - малым фазовым объемом области $u = 0$. Чтобы исключить эту причину, надо сравнить распределение по u_i событий внутри и вне резонансного пика при $u_i = 0$: в первом случае спад должен быть сильнее.

Если некоторые из запретов, например, u_1 и u_2 , общи нескольким значениям спина и четности, то по наличию или отсутствию спада в распределении по $u = u_1 u_2 \dots u_m$ можно отделить истинное значение спина и четности от прочих.

В таблице 9 по этому способу выписаны пробные функции u_i для заряженных схем распада на 3π и 4π . Сделаем два замечания: 1) во всех формулах таблицы 9 энергии и импульсы выражены в массах π -мезона, так что все u_i безразмерны. 2) предлагаемый в таблице вид пробных функций отнюдь не единственно возможный. Например, для указанного случая (32) можно вместо $u_1 = |13 - 23| + |14 - 24|$ взять, в соответствии с наглядным смыслом запрета (рис. 1), $u_1 = |E_1 - E_2| + |\psi - \pi/2|$ и т.д. Заранее ясно, какие пробные функции лучше.

Сделаем несколько замечаний.

1. Запреты из таблицы 5 носят абсолютный характер: любая детализация взаимодействия не может снять ни одного из них, а только добавить к ним новые. Так, можно поставить задачу о выделении изоструктуры гамильтониана или о проверке гипотез о доминантной роли тех или иных каналов реакции (например, через ρ -мезон). Эта конкретизация гамильтониана найдет свое выражение в добавочных запретах. Их можно отыскать тем же способом.

2. Наряду с запретами, из таблиц 1-4 можно получить симметрии мезонных систем. Проверка наличия этих симметрий также позволит установить квантовые числа тяжелого мезона. Так, в случае (32) легко видеть, что распределения по $E_1 - E_2, E_3 - E_4, \cos \psi$ симметричны относительно нуля.

3. Если в некоторой моде распада запреты очень велики, то становится вероятным распад посредством электромагнитного взаимодействия. В этих случаях изоспин может меняться на 0, 1, 2 и в соответствии с этим запреты существенно ослабляются, так как реализуются лишь запреты, общие всем изоспинам.

4. При изучении аннигиляции антинуклонов в состоянии с малым орбитальным моментом можно довольно легко изложенным способом получить запрещенные конфигурации в системах 3-6 мезонов.

Авторы благодарны И.В.Полубаринову и М.И.Широкову за ценные замечания.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Покажем, что любой изоскаляр представим в виде (1'), изовектор в виде суммы (2') и (2"). Действительно, из двух псевдовекторов в изопространстве $A\pi$ и $B\pi$ можно составить: 1) скаляр $(A\pi B\pi) \equiv A\pi^+ B\pi^- + A\pi^- B\pi^+ + A\pi^0 B\pi^0$; 2) псевдовектор $[A\pi B\pi]_a \equiv \epsilon_{abc} A\pi_b B\pi_c$; 3) тензор 2-го ранга, описывающий спин 2

$$T_{ab}(AB) = A\pi_a B\pi_b + A\pi_b B\pi_a - \frac{2}{3} \delta_{ab} (A\vec{\pi} B\vec{\pi}).$$

Поэтому изотопический синглет, составленный из четырех операторов $A\pi, B\pi, C\pi, D\pi$, запишется в виде линейной комбинации членов

$$(A\pi B\pi)(C\pi D\pi) \tag{A.1}$$

либо

$$[A\pi B\pi][C\pi D\pi] = (A\pi C\pi)(B\pi D\pi) - (A\pi D\pi)(B\pi C\pi) \tag{A.2}$$

либо

$$T_{ab}(AB)T_{ab}(CD) = 2(A\pi C\pi)(B\pi D\pi) + 2(A\pi D\pi)(B\pi C\pi) - \frac{4}{3}(A\pi B\pi)(C\pi D\pi). \tag{A.3}$$

Так как каждый из этих членов представим в виде (1'), то доказано, что (1, 1') выражает собою общий вид эффективного гамильтониана распада при $T=0$.

Точно так же все мыслимые изотопические псевдовекторы представимы в виде линейных комбинаций выражений типа (2') и (2''), так как сводятся к

$$1) \quad [A\pi B\pi]_a (C\pi D\pi) \quad (\text{см. (2'')}); \quad (\text{A.4})$$

$$2) \quad [[A\pi B\pi][C\pi D\pi]]_a = B\pi_a (A\pi C\pi D\pi) - A\pi_a (B\pi C\pi D\pi) \quad (\text{см. (2')}) \quad (\text{A.5})$$

$$3) \quad [A\pi B\pi]_b T_{ab}(CD) = \\ = D\pi_a (C\pi A\pi B\pi) + C\pi_a (D\pi A\pi B\pi) - \frac{2}{3}[A\pi D\pi]_a (C\pi D\pi) \quad (\text{A.6}) \\ (\text{см. (2') и (2'')})$$

$$4) \quad \epsilon_{abc} T_{bd}(AB) T_{cd}(CD) = (B\pi C\pi)[A\pi D\pi]_a + \\ + (B\pi D\pi)[A\pi C\pi]_a + (A\pi C\pi)[B\pi D\pi]_a + (A\pi D\pi)[B\pi C\pi]_a \quad (\text{см. (2'')}) \quad (\text{A.7})$$

и доказательство завершено.

Для случая рождения трех π -мезонов в состоянии с $T=1$, кроме изоструктуры (43), можно представить себе еще $M'_a = [A\pi[B\pi C\pi]]_a$ и $M''_a = T_{ab}(AB)C\pi_b$. Но они также сводятся к (43):

$$M'_a = B\pi_a (A\pi C\pi) - C\pi_a (A\pi B\pi) \quad (\text{A.8})$$

$$M''_a = A\pi_a (B\pi C\pi) + B\pi_a (A\pi C\pi) - \frac{2}{3}C\pi_a (A\pi B\pi). \quad (\text{A.9})$$

Л и т е р а т у р а

1. B.C.Maglic, L.W.Alvarez, A.M.Rosenfeld, M.L.Stevenson, Phys. Rev. Lett. 7, 178 (1961).
2. M.L.Stevenson, L.W.Alvarez, B.C.Maglic, A.M.Rosenfeld, Phys. Rev. 125, 687 (1962).
3. H.P.Dürr, W.Heisenberg. Nuovo Cim. 23, 807 (1962).
4. A.Pais, Ann. of Phys. 9, 548 (1960).
5. M.Grynberg, Z.Koba, Phys. Lett. 1, No. 4 (1962). Z.Koba, Phys. Lett. 1, 34 (1962);
6. R.H.Dalitz. Strong Interaction Physics and the Strange Particles, Lectures in Summer School (Bangalore), Preprint, Enrico Fermi Institute, 1961.

Примечание при корректуре.

Распады резонансных состояний изучаются также в только что появившейся статье Хенли и Якобсона (E.M.Henley, B.A. Jacobsohn, Phys. Rev., 128, 1394 (1962)).

Ее авторы ограничились, однако, лишь простейшими матричными элементами распада.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 января 1963 года.

Таблица I.
Амплитуды распада 0^+ на 4π .

| Зарядовое состояние и изоструктура | Амплитуда | Простейший вид $F(I234)$ |
|------------------------------------|---|--------------------------|
| $T=0$ (00) (00) I2 34 | $\sum_P F(I234)^*$ | Const |
| (+-) (00) I2 34 | $F(I234)+F(2I34)+F(34I2)+F(342I)+$ $+F(I243)+F(2I43)+F(43I2)+F(432I)+$ | Const |
| (+-) (+-) I2 34 | $F(I234)+F(2I34)+F(I243)+F(2I43)+$ $+F(32I4)+F(23I4)+F(324I)+F(234I)+$ $+F(I432)+F(4I32)+F(I423)+F(4I23)+$ $+F(34I2)+F(43I2)+F(342I)+F(432I)$ | Const |
| $T=1$ (+-0)0 (0-+)+ I23 4 | $F(I234)+F(23I4)+F(3I24)-F(32I4)-F(2I34)-F(I324)+$ $+F(I243)+F(24I3)+F(4I23)-F(42I3)-F(2I43)-F(I423)$ | $I2 \cdot 24$ |
| [+-] (00) I2 34 | $F(I234)-F(2I34)+F(I243)-F(2I43)$ | $I3$ |
| [+-] (+-) I2 34 | $F(I234)+F(I243)-F(2I34)-F(2I43)+$ $+F(32I4)+F(324I)-F(23I4)-F(234I)+$ $+F(I432)+F(I423)-F(4I32)-F(4I23)+$ $+F(34I2)+F(342I)-F(43I2)-F(432I);$ | $I3$ |
| [0+] (+-) I2 34 | $F(I234)+F(I243)-F(2I34)-F(2I43)+$ $+F(I324)+F(I342)-F(3I24)-F(3I42)$ | $I3$ |
| [+0] (00) I2 34 | $F(I234)+F(I342)+F(I423)+F(I432)+F(I324)+F(I243)-$ $-F(2I34)-F(3I42)-F(4I23)-F(4I32)-F(3I24)-F(2I43)$ | $I3$ |

Примечания: *) Сумма по всем 24 перестановкам чисел 1,2,3,4.

Таблица 2.

Амплитуды распада 0^- на $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$ и $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$

| Частицы | Амплитуда | Простейший вид $F(I234)$ |
|--|--|-----------------------------|
| $T=0$ (π^-) (π^-) I2 34 | $(I234) \cdot [F(I234) - F(2I34) - F(I243) + F(2I43) - F(32I4) + F(23I4) + F(324I) - F(234I) - F(I432) + F(4I32) + F(I423) - F(4I23) + F(34I2) - F(43I2) - F(342I) + F(432I)]$. | I4 |
| $T=I$ [π^-] (π^-) I2 34 | $(I234) \cdot [F(I234) - F(I243) + F(2I34) - F(2I43) - F(32I4) + F(324I) - F(23I4) + F(234I) - F(I432) + F(I423) - F(4I32) + F(4I23) + F(34I2) - F(342I) + F(43I2) - F(432I)]$. | $I2 \cdot I3$ |
| $T=I$ ($0 \rightarrow$) π^+ ($\pi^- 0$) 0 I23 4 | $(I234) \cdot [F(I234) + F(23I4) + F(3I24) + F(32I4) + F(2I34) + F(I324) - F(I243) - F(24I3) - F(4I23) - F(42I3) - F(2I43) - F(I423)]$. | I4 |
| $T=I$ [0^+] (π^-) I2 34 | $(I234) \cdot [F(I234) - F(I243) - F(2I43) + F(2I34) - F(I324) + F(I342) - F(3I24) + F(3I42)]$ | I3 |

Таблица 3.

Амплитуды распада I^+ на $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$ и $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^+$

| Частицы | Амплитуда | Простейший вид $F(I234)$ |
|--|--|---|
| $(+-) (+-)$ $I_2 \quad 34$ $T=0$ | $(I23) \cdot [F(I234) - F(2I34) - F(32I4) + F(23I4)] +$ $+(234) \cdot [F(234I) - F(324I) - F(432I) + F(342I)] +$ $+(34I) \cdot [F(34I2) - F(I432) - F(43I2) + F(4I32)] +$ $+(4I2) \cdot [F(I243) - F(2I43) - F(I423) + F(4I23)] .$ | $I3$ или $I4$ ^{х)} (2 прост. matr. элемента) |
| $[+-] (+-)$ $I_2 \quad 34$ $T=I$ | $M_1 = (I23) \cdot [F(I234) + F(2I34) - F(32I4) - F(23I4)] +$ $+(234) \cdot [F(432I) + F(342I) - F(234I) - F(324I)] +$ $+(34I) \cdot [F(34I2) + F(43I2) - F(I432) - F(4I32)] +$ $+(4I2) \cdot [F(I243) + F(2I43) - F(I423) - F(4I23)] ;$ $M_2 = (I23) \cdot [F(4I32) + F(432I) - F(4I23) - F(43I2)] +$ $+(234) \cdot [F(I234) + F(I423) - F(I243) - F(I432)] +$ $+(34I) \cdot [F(2I43) + F(23I4) - F(2I34) - F(234I)] +$ $+(4I2) \cdot [F(34I2) + F(324I) - F(32I4) - F(342I)] .$ | $I2$ или $I3$ $I3$ или 23 (4 прост. matr. элемента) |
| $(0 \rightarrow) +$ $(+ \rightarrow 0) 0$ $I23 \quad 4$ $T=I$ | $M_1 = (I23) \cdot [F(I234) + F(23I4) + F(3I24) + F(32I4) + F(2I34) + F(I324)] +$ $+(I24) \cdot [F(I243) + F(24I3) + F(4I23) + F(42I3) + F(2I43) + F(I423)] ;$ $M_2 = (I23) \cdot [F(I234) + F(2I34)] + (I24) \cdot [F(I243) + F(2I43)] +$ $+(234) \cdot [F(234I) - F(243I) + F(324I) - F(423I)] +$ $+(I34) \cdot [F(4I32) - F(3I42) + F(I432) - F(I342)] .$ | Const |
| $T=I; [0 \rightarrow] (+-)$ $I_2 \quad 34$ | $M_1 = (I23) \cdot [F(I234) + F(2I34) - F(I324) - F(3I24)] +$ $+(I24) \cdot [F(I243) + F(2I43)] + (I34) \cdot [F(I342) + F(3I42)] ;$ $M_2 = (234) \cdot [F(I234) + F(I342) - F(I243) - F(I324)] +$ $+(I34) \cdot [F(2I43) - F(2I34)] + (I24) \cdot [F(3I42) - F(3I24)] .$ | Const |

Таблица 4.

Амплитуды распада I^- на $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^-$ и $\pi^+\pi^+\pi^-\pi^0$

| Частицы | Амплитуда | Простейший вид $F(I234)$ |
|--|--|--------------------------|
| $(+-) (+-)$ $I2 \quad 34$ $T=0$ | $\vec{1} \cdot [F(I234)+F(I243)+F(I432)+F(I423)] +$ $+2 \cdot [F(2I34)+F(2I43)+F(23I4)+F(234I)] +$ $+3 \cdot [F(32I4)+F(324I)+F(34I2)+F(342I)] +$ $+4 \cdot [F(4I32)+F(4I23)+F(43I2)+F(432I)] .$ | $I2$ или $I3$ |
| $[+-] (+-)$ $I2 \quad 34$ $T=I$ | $M_1 = \vec{1} \cdot [F(I234)+F(I243)+F(I432)+F(I423)] -$ $-2 \cdot [F(2I34)+F(2I43)+F(23I4)+F(234I)] +$ $+3 \cdot [F(32I4)+F(324I)+F(34I2)+F(342I)] -$ $-4 \cdot [F(4I32)+F(4I23)+F(43I2)+F(432I)] ;$ $M_2 = \vec{1} \cdot [F(324I)+F(342I)-F(234I)-F(432I)] +$ $+2 \cdot [F(I432)+F(34I2)-F(4I32)-F(43I2)] +$ $+3 \cdot [F(I243)+F(I423)-F(2I43)-F(4I23)] +$ $+4 \cdot [F(I234)+F(32I4)-F(2I34)-F(23I4)] .$ | Const |
| $(0\rightarrow)+$ $(+-)0$ $I23 \quad 4$ $T=I$ | $M_1 = \vec{1} \cdot [F(I234)+F(I243)-F(I324)-F(I423)] +$ $+2 \cdot [F(23I4)+F(24I3)-F(2I34)-F(2I43)] +$ $+3 \cdot [F(3I24)-F(32I4)] +4 \cdot [F(4I23)-F(42I3)] ;$ $M_2 = \vec{3} \cdot [F(I234)+F(243I)+F(4I32)-F(423I)-F(2I34)-F(I432)] +$ $+4 \cdot [F(I243)+F(234I)+F(3I42)-F(324I)-F(2I43)-F(I342)]$ | $I2$ или 34 |
| $[0+] (+-)$ $I2 \quad 34$ $T=I$ | $M_1 = \vec{1} \cdot [F(I234)+F(I243)+F(I324)+F(I342)] -$ $-2 \cdot [F(2I34)+F(2I43)] -3 \cdot [F(3I24)+F(3I42)] ;$ $M_2 = \vec{4} \cdot [F(I234)+F(I324)-F(2I34)-F(3I24)] +$ $+3 \cdot [F(I243)-F(2I43)] +2 \cdot [F(I342)-F(3I42)] ;$ | Const |

Таблица 5.
Запрещенные конфигурации 4 пионов

| ЧАСТИЦЫ | 0^+ | 0^- | 1^+ | 1^- | 2^+ | 2^- |
|---|--|--|--|--|--|--|
| $\begin{pmatrix} + & - \\ 12 & 34 \end{pmatrix}$ $T=0$ | *) | КОМПЛАНАРНОСТЬ 1) $\alpha(1,3)$ 2) $\alpha(1,4)$ 3) $\alpha(2,4)$ | 1) КОЛЛИНЕАРНОСТЬ 2) $\varepsilon(1,3)$ 3-8) $\vec{l}=\vec{j}; E_k=E_l$. | 1) ζ 2-4) $\vec{l}+\vec{j}=\vec{k}+\vec{l}=0$. | *) | 1) КОЛЛИНЕАРН. 2-4) $\vec{l}+\vec{j}=\vec{k}+\vec{l}=0$ |
| $\begin{pmatrix} + & - \\ 12 & 34 \end{pmatrix}$ $T=1$ | 1) $\varepsilon(1,2)$ 2) $\varepsilon(1,4)$ 3) ζ | 1) КОМПЛАН. 2) $\alpha(1,3)$ 3) $\alpha(2,4)$ 4) ζ | 1) КОЛЛИНЕАРН. 2) $\varepsilon(1,3)$ 3) $E_2=E_3; \vec{l} \parallel \vec{j}$ 4) $E_2=E_4; \vec{l} \parallel \vec{j}$ 5-8) $\vec{l}=\vec{j}; E_k=E_l;$ $(i,j)=(1,2),(1,4),(3,2),(3,4)$. | 1) $\vec{l}+\vec{j}=0$ | 1) $\vec{l} \parallel \vec{j} \parallel \vec{k} \parallel \vec{l}$ при $E_1=E_2=E_3=E_4$ | 1) КОЛЛИНЕАРН. 2) $1+3=0$ |
| 0^{+-} 1234 $T=1$ | 1) $\delta(2)$ 2) ζ | 1) КОМПЛАН. 2) $\alpha(3,4)$ 3) ζ | 1) КОЛЛИН. 2) $E_3=E_4; \vec{l} \parallel \vec{j}$. | 1) $\vec{l}=\vec{j}$ | 1) $\vec{l} \parallel \vec{j} \parallel \vec{k} \parallel \vec{l}$ при $E_1=E_2=E_3=E_4$ | 1) КОЛЛИНЕАРН. |
| $+00$ 1234 $T=0$ | *) | 1) КОМПЛАН. 2) $\alpha(1,2)$ 3) $\alpha(3,4)$ | 1) КОЛЛИН. 2) $\varepsilon(1,2)$ 3-8) $\vec{l}=\vec{j}; E_k=E_l;$ | 1) ζ 2-4) $\vec{l}+\vec{j}=\vec{k}+\vec{l}=0$ | *) | **) |
| $+00$ 1234 $T=1$ | 1) $\alpha(1,2)$ 2) $\beta(1,2)$ | 1) КОМПЛАН. 2) $\alpha(3,4)$ 3) $\beta(1,2)$ | 1) КОЛЛИН. 2) $E_3=E_4; \vec{l} \parallel \vec{j}$; | 1) $\vec{l}=\vec{j}$ 2) $\vec{l}=\vec{j}$ | 1) $\vec{l}=\vec{j}$ 2) $\vec{l}=\vec{j}$ | **) |
| $+000$ 1234 $T=1$ | 1) ζ | 1) КОМПЛАН. 2) $\alpha(2,4)$ 3) $\alpha(2,3)$ 4) $\alpha(3,4)$; 5) ζ | 1) КОЛЛИН. 2) $\delta(1)$ 3-5) $\vec{l} \parallel \vec{j}; E_k=E_l$ $(\vec{l}=\vec{j}, \vec{k}, \vec{l})$ | 1) $\vec{l}=0;$ $E_2=E_3=E_4$. | 1) $\vec{l} \parallel \vec{j} \parallel \vec{k} \parallel \vec{l}$ при $E_1=E_2=E_3=E_4$ | **) |
| 0000 1234 $T=0$ | *) | 1) КОМПЛАН. 2-7) $\alpha(l,j)$ | 1) КОЛЛИН. 2) η | 1) ζ 2-4) $\vec{l}+\vec{j}=\vec{k}+\vec{l}=0$ 5)-8) $\vec{l}=0;$ $E_j=E_k=E_l;$ | *) | **) |

*) Распад на 2π
**) не рассчитывалось.

Таблица 6.

Амплитуды распада частиц 0^- , 1^+ , 1^- на 3π .

| Спин | Частицы | Амплитуда | Простейший вид $F(I23)$ |
|-------|--|---|-------------------------|
| 0^- | $T=0; \begin{smallmatrix} +0 \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $F(I23)+F(231)+F(312)-F(213)-F(321)-F(I32)$ | $I2 \cdot I3^2$ |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (+-)0 \\ 123 \\ \text{или} \\ (00)+ \end{smallmatrix}$ | $F(I23)+F(213)$ | Const |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (+-) \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $F(I23)+F(I32)+F(213)+F(231)$ | Const |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (00)0 \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $F(I23)+F(231)+F(312)+F(213)+F(I32)+F(321)$ | Const |
| 1^+ | $T=0; \begin{smallmatrix} (+-)0 \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $\hat{1} \cdot [F(I23)-F(I32)] + \hat{2} \cdot [F(231)-F(213)] + \hat{3} \cdot [F(312)-F(321)]$ | $I2$ |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (+-)0 \\ 123 \\ (00)+ \end{smallmatrix}$ | $M_1 = \hat{1} \cdot [F(I23)+2F(213)]; \quad M_2 = \hat{3} \cdot [F(I23)+F(213)]$ | Const |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (+-) \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $M_1 = \hat{1} \cdot [F(I23)+F(I32)] + \hat{2} \cdot [F(213)+F(231)]$ $M_2 = \hat{1} \cdot [F(231)+2F(I32)] + \hat{3} \cdot [F(I23)+F(213)]$ | Const |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (00)0 \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $M = \hat{1} \cdot [F(I23)+F(I32)] + \hat{2} \cdot [F(213)+F(231)] + \hat{3} \cdot [F(321)+F(312)]$ | Const |
| 1^- | $T=0; \begin{smallmatrix} (+-)0 \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $(I23) \cdot [F(I23)+F(231)+F(312)+F(213)+F(321)+F(I32)]$ | Const |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (+-)0 \\ 123 \\ (00)+ \end{smallmatrix}$ | $(I23) \cdot [F(I23)-F(213)]$ | $I3$ |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (+-) \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $(I23) \cdot [F(I23)+F(231)-F(I32)-F(213)]$ | $I2$ |
| | $T=1; \begin{smallmatrix} (00)0 \\ 123 \end{smallmatrix}$ | $(I23) \cdot [F(I23)+F(231)+F(312)-F(213)-F(I32)-F(321)]$ | $I2 \cdot I3^2$ |

Таблица 7.
Амплитуды распада частицы с $S=2$ на 3 п . .

| Спин | Частицы | Амплитуда | Простейший вид $F(I23)$ |
|-------|---|--|-------------------------|
| 2^+ | $T=0; \begin{pmatrix} + & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $f(1) \cdot [F(I23)+F(I32)] + f(2) \cdot [F(231)+F(213)] + f(3) \cdot [F(312)+F(321)]$ | $I2$ |
| | $T=1; \begin{pmatrix} + & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ (00) \end{pmatrix}$ | $M_1=f(1)F(I23)-f(2)F(213); M_2=f(3) [F(I23)-F(213)] ;$ | Const |
| | $T=1; \begin{pmatrix} + & + \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $M_1=f(1) \cdot [F(I23)-F(I32)] + f(2) \cdot [F(231)-F(213)] ;$ $M_2=f(1) \cdot F(231)-f(2) \cdot F(I32)+f(3) \cdot [F(I23)-F(213)] .$ | Const |
| | $T=1; \begin{pmatrix} 0 & (00) \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $M = f(1) \cdot [F(I23)-F(I32)] + f(2) \cdot [F(231)-F(213)] + f(3) \cdot [F(312)-F(321)] .$ | $I2$ |
| 2^- | $T=0; \begin{pmatrix} + & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $M_1=f(11) \cdot [F(I23)-F(I32)] + f(22) \cdot [F(231)-F(213)] + f(33) \cdot [F(312)-F(321)] ;$ $M_2=f(12) \cdot [F(I23)-F(213)] + f(23) \cdot [F(231)-F(321)] + f(31) \cdot [F(312)-F(I32)]$ | $I3$ |
| | $T=1 \begin{pmatrix} + & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ (00) \end{pmatrix}$ | $M_1=f(12) \cdot [F(I23)+F(213)]; M_2=f(13)F(I23)+f(23)F(213);$ $M_3=f(11) \cdot F(I23)+f(22)F(213); M_4=f(33) \cdot [F(I23)+F(213)] .$ | Const |
| | $T=1; \begin{pmatrix} + & + \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $M_1=f(12) \cdot [F(I23)+F(213)] + f(13) \cdot F(I32)+f(23) \cdot F(231) ;$ $M_2=f(33) \cdot [F(I23)+F(213)] + f(22) \cdot F(I32)+f(11) \cdot F(231) ;$ $M_3=f(23) \cdot [F(I23)+F(I32)] + f(13) \cdot [F(213)+F(231)] ;$ $M_4=f(11) \cdot [F(I23)+F(I32)] + f(22) \cdot [F(213)+F(231)] ; .$ | Const |
| | $T=1; \begin{pmatrix} 0 & (00) \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | $M_1=f(12) \cdot [F(I23)+F(213)] + f(23) \cdot [F(231)+F(321)] + f(31) \cdot [F(312)+F(I32)] ;$ $M_2=f(11) \cdot [F(I23)+F(I32)] + f(22) \cdot [F(231)+F(213)] + f(33) \cdot [F(312)+F(321)] .$ | Const |

Таблица 8.

Запрещенные конфигурации 3 пионов.

| Частицы | 0^- | 1^+ | 1^- | 2^+ | 2^- |
|--|--|--|--|---|--|
| $\begin{pmatrix} + & - & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $T=0$ | 1) $E_1=E_2$ 2) $E_2=E_3$ 3) $E_3=E_1$ | 1) $\vec{I}=\vec{2}$ 2) $\vec{2}=\vec{3}$ 3) $\vec{3}=\vec{1}$ | 1) коллинеарность | 1) $E_1=E_2=E_3$ 2) коллин. | 1) $\vec{1}=\vec{2}$ 2) $\vec{2}=\vec{3}$ 3) $\vec{3}=\vec{1}$ 4) $E_1=E_2=E_3$ |
| $\begin{pmatrix} + & (+ & -) \\ (+ & -) & 0 \\ (00) & + \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $T=1$ | нет | 1) $\vec{3}=0$ | 1) коллин. 2) $E_1=E_2$ | 1) $\vec{1}=\vec{2}^{**}$ 2) коллин. | нет |
| $\begin{pmatrix} (00) & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $T=1$ | нет | 1) $E_1=E_2=E_3$ 2) $\vec{1}=0$ 3) $\vec{2}=0$ 4) $\vec{3}=0$ | 1) коллин. 2) $E_1=E_2$ 3) $E_2=E_3$ 4) $E_3=E_1$ | 1) $E_1=E_2=E_3$ 2) $\vec{1}=\vec{2}^{**}$ 3) $\vec{2}=\vec{3}^{**}$ 4) $\vec{3}=\vec{1}^{**}$ 5) коллин. | нет |

*) Запреты II порядка (частный случай коллинеарности)

Таблица 9.

Пробные функции для некоторых распадов на 4π и 3π .

| Спин и четность | $\varphi(T=0) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$ |
|--|---|
| 0^- | $U_1 = \bar{1}\bar{2}\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{2}-\bar{2}\bar{3} + \bar{1}\bar{4}-\bar{3}\bar{4} $; $U_3 = \bar{1}\bar{2}-\bar{1}\bar{4} + \bar{2}\bar{3}-\bar{3}\bar{4} $; |
| 1^+ | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{2}-\bar{1}\bar{4} + \bar{1}\bar{2}-\bar{2}\bar{3} + \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} $; |
| 1^- | $U_3, U_4, \dots, U_8 = E_i - E_j + \bar{K} - \bar{L} $ |
| 2^- | $U_1 = \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} $; $U_2 = \bar{1} + \bar{2} $; $U_3 = \bar{1} + \bar{3} $; $U_4 = \bar{1} + \bar{4} $; |
| | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} $; $U_2 = \bar{1} + \bar{2} $; $U_3 = \bar{1} + \bar{3} $; $U_4 = \bar{1} + \bar{4} $. |
| $\varphi(T=4) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$ | |
| 0^+ | $U_1 = \bar{1}\bar{3}-\bar{1}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{2}-\bar{1}\bar{3} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{3}\bar{4} $; |
| 0^- | $U_3 = \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} $; |
| 1^+ | $U_1 = \bar{1}\bar{2}\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{3} + \bar{1}\bar{4}-\bar{2}\bar{4} $; $U_3 = \bar{1}\bar{2}-\bar{2}\bar{3} + \bar{1}\bar{4}-\bar{3}\bar{4} $; $U_4 = \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} $; |
| 1^- | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{2}-\bar{1}\bar{4} + \bar{1}\bar{2}-\bar{2}\bar{3} + \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} $; $U_3 = E_1 - E_3 + \bar{2}x\bar{4} $; |
| 2^+ | $U_4 = E_2 - E_4 + \bar{1}x\bar{3} $; $U_5 = E_1 - E_2 + \bar{3}-\bar{4} $; $U_6 = E_1 - E_4 + \bar{2}-\bar{3} $; |
| 2^- | $U_7 = E_3 - E_2 + \bar{1}-\bar{4} $; $U_8 = E_3 - E_4 + \bar{1}-\bar{2} $; |
| | $U_1 = \bar{1} + \bar{3} $; |
| | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} + E_1 - E_2 + E_2 - E_3 + E_3 - E_4 $; |
| | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} $; $U_2 = \bar{1} + \bar{3} $; |
| $\varphi(T=4) \rightarrow \pi^0 \pi^- \pi^+ \pi^+$ | |
| 0^+ | $U_1 = \bar{2}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} + \bar{2}\bar{4}-\bar{1}\bar{2} + \bar{3}\bar{4}-\bar{1}\bar{4} + \bar{3}\bar{4}-\bar{1}\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} $; |
| 0^- | $U_1 = \bar{1}\bar{2}\bar{3} $; $U_2 = \bar{1}\bar{4}-\bar{1}\bar{3} + \bar{2}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} $; $U_3 = \bar{1}\bar{2}-\bar{3}\bar{4} + \bar{1}\bar{3}-\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}-\bar{2}\bar{3} $; |
| 1^+ | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} $; $U_2 = E_3 - E_4 + \bar{1}x\bar{2} $; |
| 1^- | $U_1 = \bar{1}-\bar{3} + \bar{1}-\bar{4} $; |
| 2^+ | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} + E_1 - E_2 + E_2 - E_3 + E_3 - E_4 $; |
| 2^- | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} + \bar{1}x\bar{3} $; |
| $\varphi(T=0) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ | |
| 0^- | $U_1 = E_1 - E_2 $; $U_2 = E_2 - E_3 $; $U_3 = E_1 - E_3 $; |
| 1^+ | $U_1 = \bar{1}-\bar{2} $; $U_2 = \bar{1}-\bar{3} $; $U_3 = \bar{2}-\bar{3} $; |
| 1^- | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} $; |
| 2^+ | $U_1 = E_1 - E_2 + E_1 - E_3 $; $U_2 = \bar{1}x\bar{2} $; |
| 2^- | $U_1 = \bar{1}-\bar{2} $; $U_2 = \bar{1}-\bar{3} $; $U_3 = \bar{2}-\bar{3} $; $U_4 = E_1 - E_2 + E_1 - E_3 $; |
| $\varphi(T=4) \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$ или $\pi^+ \pi^- \pi^0$ | |
| 1^+ | $U_1 = \bar{3} $ |
| 1^- | $U_1 = \bar{1}x\bar{2} $; $U_2 = E_1 - E_2 $; |
| 2^+ | $U_1 = \bar{1} - \bar{2} $; $U_2 = \bar{1}x\bar{2} $; |
| $0^-, 2^-$ | запретов нет. |