ЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Н.А. Черников

Р - 1159

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАЗА

Acta Phys. Polonica, 1964, v26, n6, p. 1069-1092.

Дубна 1962 год

Н.А. Черников

Р - 1159

РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАЗА

Дубна 1962 год

Аннотация

Рассмотрено равновесное распределение релятивистского газа с точки зрения кинетического уравнения. Доказано, что в релятивистском случае общим решением функционального уравнения Больцмана является релятивистское распределение Максвелла-Больцмана. Найден общий вид гравитационного поля, в котором возможно глобальное релятивистское распределение Максвелла-Больцмана. Исследовано распределение Максвелла-Больцмана в частной теории относительности. Рассмотрено несколько характерных примеров, таких, как вращающийся газ, газ в постоянном гравитационном поле, особые случаи распределения газа, состоящего из частиц с нулевой массой покоя.

N.A. Chernikov

EQUILIBRIUM DISTRIBUTION OF RELATIVISTIC GAS

Abstract

The equilibrium distribution of the relativistic gas has been treated from the point of view of the kinetic equation. It is proved that in the relativistic case the general solution of the functional Boltzmann equation is the relativistic Maxwell – Boltzmann distribution. A general form of the gravitational field in which the global relativistic Maxwell – Boltzmann distribution is possible has been found. Maxwell – Boltzmann distribution in the special theory of relativity has been investigated. Some examples have been considered: the rotating gas, gas in a stationary gravitational field, some particular cases of the distribution of gas consisting of particles with zero rest mass.

§ 1. Введение

Равновесное распределение релятивистского газа рассматривалось общими методами статистической физики /1,2/. Наряду с этим целесообразно рассмотреть релятивистское равновесное распределение как решение кинетического уравнения Больцмана /3/. При таком подходе достигается полное изучение равновесного распределения с фундаментальных позиций Больцмана. С другой стороны, равновесное распределение является важным приложением недавно полученного кинетического уравнения Больцмана для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле /4/. Подробный вывод последнего уравнения содержится в работе /5/. На ней будет базироваться наше дальнейшее исследование. Все обозначения, о которых не оговорено особо, будут заимствованы из работы /5/.

§ 2. Функциональное уравнение Больцмана

Газ находится в равновесном состоянии, если дивергенция вектора потока энтропии равна нулю. Если эта дивергенция обращается в нуль в некоторой точке x, то в этой точке при любых i, j выполняется равенство /5.40/ работы /5/.

$$h_{ij} \; (\langle p, q \rangle, \cos\theta) \, [A_i (x, p') A_j(x, q') - A_i (x, p) A_j (x, q)] = 0. \qquad /2.1/$$

Это равенство относится к произвольной четверке $\{ p, q; p', q' \}$ импульсов, связанной законом упругого столкновения, что в релятивистском случае означает

$$p + q = p' + q'. \qquad /2.2/$$

Если h_{ij} строго больше нуля, что из /2.1/ следует функциональное уравнение Больцмана:

$$A_i (x, p) \, A_j (x, q) = A_i (x, p') \, A_j (x, q') \qquad /2.3/$$

для любой четверки $\{ p, q; p', q' \}$ импульсов, связанной законом /2.2/. Уравнение /2.3/ следует из /2.1/ и при менее сильном ограничении на h_{ij}, однако вопрос о необходимом условии, которое нужно наложить на h_{ij} чтобы из /2.1/ получить /2.3/, здесь мы рассматривать не будем.

Равенство /2.3/ устанавливает отношение эквивалентности /6/, разбивающее компоненты газа на классы. Будем говорить, что компонента i эквивалентна компоненте j и записывать $(i) \approx (j)$. , если выполняется равенство /2.3/. Симметричность очевидна: если $(i) \approx (j)$, то и $(j) \approx (i)$ V . Докажем транзитивность: если $(i) \approx (j)$ и $(j) \approx (k)$ то $(i) \approx (k)$. Пусть задана четверка импульсов $\{ p, s; p', s' \}$, где $p \in P_i(x)$, $s \in P_k(x)$, $p' \in P_i(x)$, $s' \in P_k(x)$, такая что $p + s = p' + s'$. Подберем имцульсы $q \in P_j(x)$, $q' \in P_j(x)$, так чтобы

$p + q = p' + q'$. Ввиду того, что $(i) \approx (j)$ имеем равенство /2.3/. Но $q' - q = p - p' = s' - s$. Следовательно, $q' + s = q + s'$ и, так как $(j) = (k)$,

$$A_j(x,q')\,A_k(x,s) = A_j(x,q)\,A_k(x,s'). \qquad /2.4/$$

Из /2.3/ и /2.4/ следует

$$A_i(x,p)\,A_k(x,s) = A_i(x,p')\,A_k(x,s'), \qquad /2.5/$$

т.е. $(i) \approx (k)$. Отсюда следует и рефлексивность, так как в доказательстве транзитивности не запрещено равенство $k = i$. Если компонента находится с какой-либо компонентой в отношении эквивалентности, то $(i) \approx (i)$.

Поясним физический смысл рассмотренного отношения эквивалентности. Далее будет доказано, что компоненты i и j распределены по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана, если выполняется равенство /2.3/ и скорости и температуры этих компонент совпадают. Таким образом, температуры и скорости одинаковы для всего класса эквивалентных компонент. Из рефлексивности получается важное следствие. Пусть $h_{ii} = 0$, т.е. частицы одной и той же компоненты i не сталкиваются друг с другом непосредственно. Предположим, что эти частицы сталкиваются с частицами компоненты j, так что выполняется равенство /2.3/. Тогда между частицами a и b компоненты i происходят опосредованные столкновения по следующей схеме. Частица a сталкивается с частицей c компоненты j. После этого частица c сталкивается с частицей b и возвращается в состояние с исходным импульсом. Результат этих двух столкновений такой же, как если бы частицы a и b столкнулись непосредственно. Такие опосредованные столкновения приводят компоненту i в равновесное состояние.

Рассмотрим следующий интересный пример. Пусть газ состоит из двух компонент и функции h_{11} и h_{22} тождественно равны нулю, тогда как, напротив, функция h_{12} нигде в нуль не обращается. Если в некоторой точке x дивергенция вектора энтропии газа равна нулю, то в этой точке выполняется равенство

$$A_1(x,p)\,A_2(x,q) = A_1(x,p')\,A_2(x,q') \qquad /2.6/$$

для любой четверки импульсов, связанной законом /2.2/. Таким образом, обе компоненты газа находятся в отношении эквивалентности. Согласно доказанной выше рефлексивности этого отношения выполняются два равенства:

$$A_1(x,p)\,A_1(x,p_*) = A_1(x,p')\,A_1(x,p'_*), \qquad /2.7/$$

если $p + p_* = p' + p'_*$, и

$$A_2(x,q)\,A_2(x,q_*) = A_2(x,q')\,A_2(x,q'_*), \qquad /2.8/$$

если $q + q_* = q' + q'_*$. Равенства /2.7/ и /2.8/ следуют из равенства /2.6/.

Все, сказанное в этом параграфе, справедливо и в нерелятивистском случае.

§ 3. Решение функционального уравнения Больцмана

Если функция распределения компоненты i подчиняется уравнению /2.3/ то, как доказано в §1, она подчиняется также уравнению:

$$A_i(x,p)\,A_i(x,p_*) = A_i(x,p')\,A_i(x,p'_*) \qquad /3.1/$$

для любой четверки импульсов, связанной законом упругого столкновения, что в релятивистском случае означает $p + p_* = p' + p'_*$.

В нерелятивистском случае Больцман нашел решение уравнения /3.1/ в классе дифференцируемых функций[/7/]. Град[/8,9/] доказал, что и в классе непрерывных функций нет решения, отличного от решения Больцмана. Другое доказательство этого факта дано Карлеманом[/10/]. Здесь мы найдем общее решение уравнения /3.1/ в релятивистском случае, предполагая так же, как это делается и в нерелятивистском случае, что $A_i(x,p) > 0$ и что $A_i(x,p)$ зависит от импульса непрерывно.

Обозначим

$$L(p) = \ln A_i(x,p). \qquad /3.2/$$

Мы опустили индекс i и аргумент x ввиду того, что они входят в уравнение /3.1/ лишь в качестве параметров. Уравнение /3.1/ представится в виде

$$L(p) + L(p_*) = L(p') + L(p'_*). \qquad /3.3/$$

Выберем в пространстве, касательном к пространству событий в точке x , ортогональный базис e_0 , e_1, e_2, e_3. Вектор e_0 направим в будущее и нормируем следующим образом векторы выбранного базиса:

$$(e_0, e_0) = 1\ , \quad (e_k, e_k) = -1\,. \qquad /3.4/$$

Импульс p представим в виде:

$$p = ue_1 + ve_2 + we_3 + \sqrt{m_i^2c^2 + u^2 + v^2 + w^2}\;\; e_0\,. \qquad /3.5/$$

Согласно условию функция L должна быть непрерывной относительно u , v , w. В таком случае она непрерывна относительно пространственных компонент импульса в любом базисе. Это надо иметь в виду, когда будет говориться о непрерывной функции от импульса.

Уравнению /3.3/ тривиальным образом удовлетворяет функция

$$L(p) = a - (\zeta, p) = a - \zeta_1 u - \zeta_2 v - \zeta_3 w - \zeta_0\sqrt{m_i^2c^2 + u^2 + v^2 + w^2}\,. \qquad /3.6/$$

Докажем, что верна следующая

Теорема: Всякая непрерывная функция от импульса, удовлетворяющая уравнению /3.3/ представляется в виде /3.6/.

Допустим, что верна

Лемма: Если непрерывная функция от импульса p удовлетворяет уравнению /3.3/ и принимает одинаковые значения на векторах p_1, p_2, p_3, p_4, представляющихся в некотором ортогональном базисе e_0, e_1, e_2, e_3 в виде:

$$p_1 = -he_1 + he_2 + he_3 + \sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}\, e_0$$

$$p_2 = he_1 - he_2 + he_3 + \sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}\, e_0$$

$$p_3 = he_1 + he_2 - he_3 + \sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}\, e_0 \qquad /3.7/$$

$$p_4 = he_1 + he_2 + he_3 + \sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}\, e_0$$

где h – некоторое фиксированное положительное число, то она зависит только от скалярного произведения (p, e_0).

Если верна эта лемма, то верна и сформулированная выше теорема. Действительно, наряду с импульсами /3.7/ рассмотрим импульс p_{-1}, симметричный импульсу p_1 относительно трехмерной плоскости в касательном пространстве событий, проходящей через импульсы p_2, p_3, p_4. Импульс p_{-1} равен

$$p_{-1} = \frac{3m_1^2c^2 + 10h^2}{m_1^2c^2 + 2h^2} \cdot he_1 + he_2 + he_3 + \frac{m_1^2c^2 + 6h^2}{m_1^2c^2 + 2h^2}\sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}\, e_0 . \qquad /3.8/$$

При отражении в этой плоскости ортогональный базис e_0, e_1, e_2, e_3 переходит в ортогональный базис $\tilde{\tilde{e}}_0, \tilde{\tilde{e}}_1, \tilde{\tilde{e}}_2, \tilde{\tilde{e}}_3$:

$$\tilde{\tilde{e}}_0 = \frac{m_1^2c^2 + 4h^2}{m_1^2c^2 + 2h^2}\, e_0 + \frac{2h\sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}}{m_1^2c^2 + 2h^2}\, e_1, \quad \tilde{\tilde{e}}_2 = e_2 , \qquad /3.9/$$

$$\tilde{\tilde{e}}_1 = -\frac{m_1^2c^2 + 4h^2}{m_1^2c^2 + 2h^2}\, e_1 - \frac{2h\sqrt{m_1^2c^2 + 3h^2}}{m_1^2c^2 + 2h^2}\, e_0 , \quad \tilde{\tilde{e}}_3 = e_3 .$$

В новом базисе импульсы p_{-1}, p_2, p_3, p_4 выражаются точно так, как импульсы p_1, p_2, p_3, p_4 – в исходном базисе. Функцию $L(p)$, как и всякую функцию, можно представить в виде:

$$L(p) = K(p) + \frac{B + C}{2} + \frac{m_1^2c^2 + 2h^2}{4h^2}\,(2D - A - E) +$$

$$+ \frac{D-A}{2h} u + \frac{D-B}{2h} v + \frac{D-C}{2h} w +$$

/3.10/

$$+ \frac{A(m_1^2c^2+4h^2)+E(m_1^2c^2+2h^2)-2D(m_1^2c^2+3h^2)}{4h^2\sqrt{m_1^2c^2+3h^2}} \cdot \sqrt{m_1^2c^2+u^2+v^2+w^2} ,$$

где

$$A = L(p_1), \quad B = L(p_2), \quad C = L(p_3), \quad D = L(p_4), \quad E = L(p_{-1}). \qquad /3.11/$$

Если функция $L(p)$ удовлетворяет уравнению /3.3/, то функция $K(p)$ удовлетворяет уравнению /3.3/. Кроме того,

$$K(p_1) = K(p_2) = K(p_3) = K(p_4) = K(p_{-1}) = 0 . \qquad /3.12/$$

Согласно лемме, функция $K(p)$ зависит, с одной стороны, только от (p, e_0), а с другой стороны, только от $(p, \tilde{e}_0)$. Следовательно, $K(p) = const = 0$.

Таким образом, если верна лемма, то верна и теорема.

Перейдем к доказательству леммы. Пусть непрерывная функция $K(u,v,w) = K(p)$ удовлетворяет уравнению /3.3/ и, кроме того,

$$K(-h,h,h) = K(h,-h,h) = K(h,h,-h) = K(h,h,h). \qquad /3.13/$$

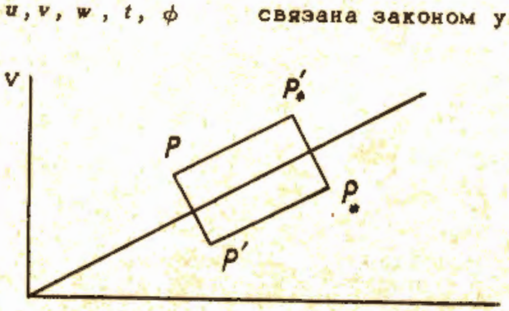
Зафиксируем значение какой-нибудь из координат u, v, w, например, значение координаты w. Для краткости будем опускать это значение под знаком функции K.

Четверка импульсов с координатами $\{(u,v,w), (u_*, v_*, w_*), (u', v', w'), (u'_*, v'_*, w'_*)$, где

$$u' = u - 2(u\sin\phi - v\cos\phi)\sin\phi ; \quad u_* = u' + t\cos\phi ; \quad u'_* = u + t\cos\phi ; \qquad /3.14/$$

$$v' = v + 2(u\sin\phi - v\cos\phi)\cos\phi ; \quad v_* = v' + t\sin\phi ; \quad v'_* = v + t\sin\phi ;$$

при любых значениях u, v, w, t, ϕ связана законом упругого столкновения /см. рис. 1/. Поэтому



Р и с. 1.

$$K(u,v) + K(u_*, v_*) = K(u',v') + K(u'_*, v'_*). \qquad /3.15/$$

Полагая последовательно $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{3\pi}{4}$, получаем:

$$K(u,v) + K(u+t, -v) = K(u,-v) + K(u+t, v), \qquad /3.16a/$$

$$K(u,v) + K(-u, v+t) = K(-u,v) + K(u, v+t), \qquad /3.16в/$$

$$K(u,v) + K(v + \frac{t}{\sqrt{2}}, u + \frac{t}{\sqrt{2}}) = K(v,u) + K(u + \frac{t}{\sqrt{2}}, v + \frac{t}{\sqrt{2}}), \qquad /3.16c/$$

$$K(u,v) + K(-v - \frac{t}{\sqrt{2}}, -u - \frac{t}{\sqrt{2}}) = K(-v,-u) + K(u - \frac{t}{\sqrt{2}}, v + \frac{t}{\sqrt{2}}). \qquad /3.16\,d/$$

Каждая из двух четверок импульсов с координатами

$$\{(h,h,h), (-h,v,w); (-h,h,h), (h,v,w)\} \qquad /3.17/$$

$$\{(h,h,h), (u,-h,w); (h,-h,h), (u,h,w)\}$$

связана законом упругого столкновения. Поэтому для каждой из двух соответствующих значений функции K справедливо равенство /3.3/. Учитывая /3.13/ отсюда получаем:

$$K(-h,v) = K(h,v), \quad K(u,-h) = K(u,h). \qquad /3.18/$$

Докажем, что при любом целом n

$$K(-nh,-nh) = K(-nh,nh) = K(nh,-nh) = K(nh,nh). \qquad /3.19/$$

Достаточно рассмотреть $n \geq 1$. Согласно /3.18/ равенства /3.19/ при $n = 1$ выполняются. Предположим, что равенства /3.19/ выполняются при $1 \leq n \leq 2\nu - 1$ где ν – некоторое целое число. Докажем, что тогда они справедливы и для $1 \leq n \leq 2\nu + 1$.

Действительно, так как $\nu \leq 2\nu - 1$, то согласно предположению:

$$K(-\nu h, -\nu h) = K(-\nu h, \nu h) = K(\nu h, -\nu h) = K(\nu h, \nu h). \qquad /3.20/$$

Подставляя в /3.16c/ $u = \nu h$, $v = -\nu h$, а в /3.16 d / $u = \nu h$, $v = \nu h$, находим:

$$K(-\nu h + \frac{t}{\sqrt{2}}, \nu h + \frac{t}{\sqrt{2}}) = K(\nu h + \frac{t}{\sqrt{2}}, -\nu h + \frac{t}{\sqrt{2}}), \qquad /3.21a/$$

$$K(-\nu h - \frac{t}{\sqrt{2}}, -\nu h + \frac{t}{\sqrt{2}}) = K(\nu h - \frac{t}{\sqrt{2}}, \nu h + \frac{t}{\sqrt{2}}). \qquad /3.21в/$$

Полагая в /3.21/ $t = \pm\sqrt{2}\,\nu h$, находим

$$K(2\nu h, 0) = K(-2\nu h, 0) = K(0, 2\nu h) = K(0, -2\nu h). \qquad /3.22/$$

Полагая в /3.21/ $t = \pm\sqrt{2}\,(\nu + 1)h$, находим

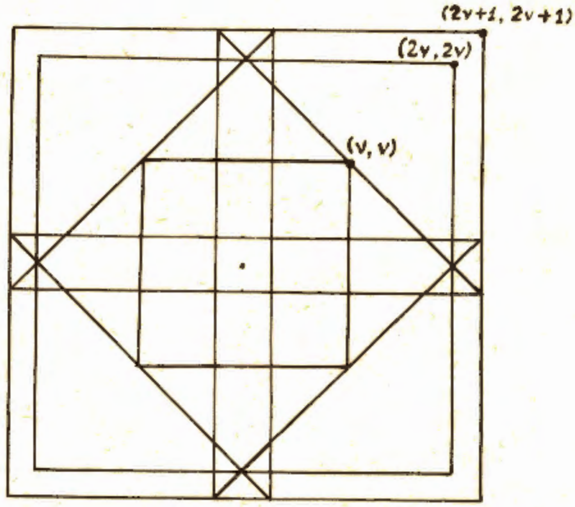
$$K(h, (2\nu+1)h) = K((2\nu+1)h, h),\ K(-(2\nu+1)h, h) = K(-h, (2\nu+1)h), \qquad /3.23/$$

$$K(h, -(2\nu+1)h) = K((2\nu+1)h, -h),\ K(-(2\nu+1)h, -h) = K(-h, -(2\nu+1)h).$$

Учитывая /3.18/, заключаем, что все восемь значений /3.23/ функции $K(u, v)$ совпадают, в частности,

$$K(h, (2\nu+1)h) = K(h, -(2\nu+1)h),\ K((2\nu+1)h, h) = K(-(2\nu+1)h, h). \qquad /3.24/$$

Подставляя в /3.16а/ $u = 0$, $v = 2\nu h$, $t = \pm 2\nu h$ а в /3.16в/ $u = 2\nu h$, $v = 0$, $t = 2\nu h$ и учитывая /3.22/, находим, что равенства /3.19/ выполняются при $n = 2\nu$. Подставляя в /3.16а/ $u = h$, $v = (2\nu + 1)h$, $t = 2\nu h$, $t = -(2\nu + 2)h$, а в /3.16в/ $u = (2\nu + 1)h$, $v = h$, $t = 2\nu h$ и учитывая /3.24/ находим, что равенства /3.19/ выполняются при $n = 2\nu + 1$. По индукции равенства /3.19/ выполняются при любом целом n. Приведенные рассуждения иллюстрируются рис. 2



Р и с. 2.

Докажем, далее, что если при некотором a

$$K(-a,-a) = K(-a,a) = K(a,-a) = K(a,a), \tag{3.25}$$

то

$$K\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) = K\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) = K\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) = K\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right). \tag{3.26}$$

Действительно, полагая а /3.16а/ и /3.16в/ $u=a$, $v=a$, $t=a$ и учитывая /3.25/, находим:

$$K(0,-a) = K(0,a), \quad K(-a,0) = K(a,0). \tag{3.27}$$

Полагая в /3.16с/ $u=0$, $v=a$, $t=-\sqrt{2}\,a$, находим:

$$K(0,a) + K(0,-a) = K(a,0) + K(-a,0). \tag{3.28}$$

Из /3.27/ и /3.28/ следует

$$K(0,-a) = K(0,a) = K(-a,0) = K(a,0). \tag{3.29}$$

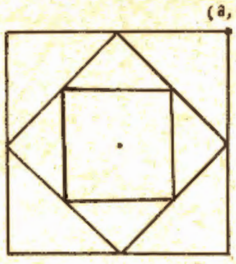
Далее, полагая в /3.16с/ и /3.16 d / $u=0$, $v=a$, $t=-\frac{a}{\sqrt{2}}$ и учитывая /3.29/, находим:

$$K\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) = K\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right), \quad K\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) = K\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right). \tag{3.30}$$

Полагая в /3.16а/ $u=\frac{a}{2}$, $v=\frac{a}{2}$, $t=-a$, находим:

$$K\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) + K\left(-\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) = K\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) + K\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right). \tag{3.31}$$

Из /3.30/ и /3.31/ следует /3.26/. Эти рассуждения иллюстрируются рис. 3



Р и с. 3.

Доказанное утверждение вместе с совокупностью равенств /3.19/ позволяет заключить, что равенства /3.25/ справедливы при $a = 2^{-s} n h$, где n и s – любые целые числа. Так как множество чисел вида $2^{-s}n$ всюду плотно на вещественной прямой, то ввиду непрерывности функции K равенства /3.25/ выполняются при любом вещественном значении a. Отсюда следует

$$K(u, v) = K(-u, v), \quad K(u, v) = K(u, -v). \qquad /3.32/$$

Действительно, чтобы получить равенства /3.32/, достаточно положить в /3.16а/ $t = v - u$ а в /3.13в/ $t = u - v$ и учесть /3.25/.

Ввиду симметрии координат u, v, w из /3.32/ следует

$$K(-u, v, w) = K(u, -v, w) = K(u, v, -w) = K(u, v, w). \qquad /3.33/$$

Отсюда

$$K(-u, -v, -w) = K(u, v, w). \qquad /3.34/$$

Далее, четверка импульсов с координатами

$$\{(u, v, w), (-u, -v, -w); (0, 0, \sqrt{u^2+v^2+w^2}), (0, 0, -\sqrt{u^2+v^2+w^2})\} \qquad /3.35/$$

связана законом упругого столкновения. Следовательно,

$$K(u, v, w) + K(-u, -v, -w) = K(0,0, \sqrt{u^2+v^2+w^2}) + K(0,0, -\sqrt{u^2+v^2+w^2}). \qquad /3.36/$$

Из /3.34/ и /3.36/ находим:

$$K(u, v, w) = K(0,0, \sqrt{u^2+v^2+w^2}). \qquad /3.37/$$

Но

$$u^2 + v^2 + w^2 = (p, e_0)^2 - m_i^2 c^2. \qquad /3.38/$$

Следовательно, K зависит только от (p, e_0). Таким образом, лемма доказана, а следовательно, доказана и теорема.

Итак, общее решение уравнения /3.1/, нигде не обращающееся в нуль, есть

$$A_i(x, p) = \exp\{a_i(x) - (\zeta_i(x), p)\} = a_i(x)\, e^{-(\zeta_i(x), p)}. \qquad /3.39/$$

Следовательно, решение уравнения /2.3/ представляется парой функций /3.39/ и /3.40/

$$A_j(x, p) = a_j(x)\, e^{-(\zeta_j(x), p)}, \qquad /3.40/$$

причем $\zeta_i(x) = \zeta_j(x) = \zeta(x)$. Таким образом, вектор $\zeta(x)$ один и тот же для всего класса компонент газа, эквивалентных в отношении равенства /2.3/.

§ 4. Локальное релятивистское распределение Максвелла-Больцмана

Будем говорить, что i -я компонента газа распределена по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана в точке x, если функция распределения $A_i(x,p)$ зависит от импульса в виде /3.39/. Далее мы будем рассматривать только одну такую компоненту. Для упрощения записи номер i будем опускать.

Для того, чтобы интеграл, представляющий вектор потока частиц сорта i /см. формулу /4.9/ работы[5]/, сходился, необходимо, чтобы вектор ζ был направлен во внутрь верхней половины светового конуса, т.е.

$$(\zeta,\zeta) = g_{\alpha\beta}(x)\zeta^{\alpha}\zeta^{\beta} > 0, \quad \zeta_0 > 0. \qquad /4.1/$$

При этом условии интегралы, представляющие вектор потока частиц, тензор массы и вектор потока энтропии, сходятся. Они могут быть подсчитаны следующим образом.

Введем в рассмотрение функцию Бесселя

$$K_n(\lambda) = \frac{\lambda^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)} \int_0^{\infty} \exp\{-\lambda \,\mathrm{ch}\, s\}\,\mathrm{sh}^{2n} s\, ds. \qquad /4.2/$$

Для этой функции справедливы следующие формулы:

$$\frac{d}{d\lambda}[\lambda^n K_n(\lambda)] = -\lambda^n K_{n-1}(\lambda); \quad \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{K_n(\lambda)}{\lambda^n}\right] = -\frac{K_{n+1}(\lambda)}{\lambda^n}; \qquad /4.3/$$

$$\lambda K_{n+1}(\lambda) - \lambda K_{n-1}(\lambda) = 2n K_n(\lambda).$$

Имеем:

$$\Phi(x) = \int_{P(x)} \exp\{-(\zeta(x),p)\}\,dP = \frac{4\pi m^2 c^2}{\lambda} K_1(\lambda), \qquad /4.4/$$

где

$$\lambda = mc\sqrt{(\zeta,\zeta)}. \qquad /4.5/$$

Следовательно, вектор потока частиц сорта i равен

$$n^{\alpha}(x) = -a\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_{\alpha}} = \frac{4\pi a m^4 c^4}{\lambda^2} K_2(\lambda)\zeta^{\alpha}. \qquad /4.6/$$

Тензор массы компоненты i равен

$$T^{\alpha\beta}(x) = -\frac{\partial n^{\alpha}}{\partial\zeta_{\beta}} = a\frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta_{\alpha}\partial\zeta_{\beta}} = \frac{4\pi a m^4 c^4}{\lambda^2}\left\{\frac{m^2c^2}{\lambda}K_3(\lambda)\zeta^{\alpha}\zeta^{\beta} - K_2(\lambda)g^{\alpha\beta}\right\}. \qquad /4.7/$$

След этого тензора равен

$$T(x) = m^2 c^2 a\, \Phi(x) = \frac{4\pi a m^4 c^4}{\lambda} K_1(\lambda). \qquad /4.8/$$

Тензор /4.7/ представляет собой тензор массы релятивистской жидкости в отсутствии диссипативных процессов/11,12/. Приведенный здесь метод интегрирования заимствован из книги/2/, где вектор частиц и тензор массы вычислены в галилеевых координатах.

Нетрудно видеть, что направление вектора $\zeta(x)$ определяет локальную скорость $u(x)$ рассматриваемой компоненты газа, а его модуль – локальную температуру $\theta(x)$ газа:

$$u(x) = \frac{\zeta}{\sqrt{(\zeta,\zeta)}}, \quad \sqrt{(\zeta,\zeta)} = \frac{c}{k\theta(x)}, \qquad /4.9/$$

где k –постоянная Больцмана. Таким образом, величина λ равна

$$\lambda = \frac{mc^2}{k\theta(x)}. \qquad /4.10/$$

Плотность числа частиц сорта i в системе отсчета $u(x)$ равна

$$n(x) = n^a(x) u_a(x) = \sqrt{n^a n_a} = \frac{4\pi a m^3 c^3}{\lambda} K_2(\lambda). \qquad /4.11/$$

Давление i -й компоненты газа в точке x равно

$$p(x) = \frac{c}{3} T^{a\beta}(x)\{u_a u_\beta - g_{a\beta}\} = \frac{4\pi a m^4 c^5}{\lambda^2} K_2(\lambda). \qquad /4.12/$$

Следовательно,

$$p(x) = n(x) k\theta(x). \qquad /4.13/$$

Мы получим, таким образом, уравнение Клапейрона, справедливое и в релятивистском случае.

Запишем, далее, внутреннюю энергию $\epsilon(x)$, тепловую функцию $w(x)$, энтропию $\sigma(x)$ свободную энергию $F(x)$, приходящиеся на одну частицу сорта i в системе отсчета $u(x)$:

$$\epsilon(x) = \frac{c T^{a\beta} u_a u_\beta}{n(x)} = 3k\theta(x) + \frac{cT(x)}{n(x)} = 3k\theta(x) + mc^2 \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)}, \qquad /4.14/$$

$$w(x) = \epsilon(x) + k\theta(x) = mc^2 \frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)}, \qquad /4.15/$$

$$\sigma(x) = \frac{\epsilon(x)}{k\theta(x)} - \ln a, \qquad /4.16/$$

$$F(x) = \epsilon(x) - k\theta(x)\sigma(x) = k\theta(x)\ln a. \qquad /4.17/$$

Энтропия подсчитывается следующим образом. Вектор потока энтропии равен

$$s^{\alpha}(x) = T^{\alpha\beta}\zeta_{\beta} - n^{\alpha}\ell n\, a = \left\{ \frac{\epsilon(x)}{k\,\theta(x)} - \ell n\, a \right\} n^{\alpha}(x). \qquad /4.18/$$

Следовательно, плотность энтропии в системе отсчета $u(x)$ равна

$$s(x) = \left\{ \frac{\epsilon(x)}{k\theta(x)} - \ell n\, a \right\} n(x). \qquad /4.19/$$

Разделив $s(x)$ на $n(x)$, получим $\sigma(x)$.

Из /4.14/ и /4.15/ следует, что разность теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме, приходящихся на одну частицу сорта i, равна:

$$c_p - c_v = k. \qquad /4.20/$$

Теплоемкость c_p равна

$$c_p = \frac{\partial w}{\partial \theta} = -k\lambda^2 \frac{\partial G(\lambda)}{\partial \lambda} = k\,[5\lambda G(\lambda) + \lambda^2 - \lambda^2 G^2(\lambda)], \qquad /4.21/$$

где

$$G(\lambda) = \frac{K_3(\lambda)}{K_2(\lambda)}. \qquad /4.22/$$

При $m = 0$ формулы /4.1//4.9//4.13//4.17/ и /4.20/ остаются без изменения. Остальные формулы сильно упрощаются:

$$\Phi(x) = \frac{4\pi}{(\zeta,\zeta)}, \qquad /4.4a/$$

$$n^{\alpha}(x) = \frac{8\pi a}{(\zeta,\zeta)^2}\,\zeta^{\alpha}, \qquad /4.6a/$$

$$T^{\alpha\beta}(x) = \frac{8\pi a}{(\zeta,\zeta)^2}\left\{ \frac{4\zeta^{\alpha}\zeta^{\beta}}{(\zeta,\zeta)} - g^{\alpha\beta} \right\}. \qquad /4.7a/$$

След тензора /4.7a/ равен нулю. След тензора массы компоненты газа, состоящей из частиц с нулевой массой покоя, равен нулю и в общем случае неравновесного состояния /см. формулу /4.12/ работы /[5]/. Далее,

$$n(x) = \frac{8\pi a}{(\zeta,\zeta)^{3/2}} = \frac{8\pi a k^3 \theta^3(x)}{c^3}, \qquad /4.11a/$$

$$p(x) = \frac{8\pi a c}{(\zeta,\zeta)^2} = \frac{8\pi a k^4 \theta^4(x)}{c^3}, \qquad /4.12a/$$

$$\epsilon(x) = 3k\theta(x) \,, \qquad /4.14a/$$

$$w(x) = 4k\theta(x), \qquad /4.15a/$$

$$\sigma(x) = 3 - \ln a \,. \qquad /4.16a/$$

Наконец, при $m = 0$

$$c_v = 3k \;, \quad c_p = 4k \,. \qquad /4.23/$$

§ 5. Глобальное релятивистское распределение Максвелла-Больцмана

Для того, чтобы газ был распределен по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана в некоторой области пространственно-временного многообразия, необходимо, чтобы функция /3.39/ удовлетворяла в этой области кинетическому уравнению. Для этой функции интеграл столкновений равен нулю, и кинетическое уравнение принимает вид:

$$\hat{f}(x,p)\, a_i(x) \exp\{-(\zeta(x), p)\} = 0 \,. \qquad /5.1/$$

Отсюда, получаем, что при любых значениях p^1, p^2, p^3 должно выполняться равенство:

$$2p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} a_i = a_i (\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha) p^\alpha p^\beta . \qquad /5.2/$$

Следовательно, a_i не зависит от x ; если хотя бы одна масса покоя m_i не равна нулю, то

$$\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha = 0 \,; \qquad /5.3/$$

если же все m_i равны нулю, то

$$\nabla_\alpha \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_\alpha = 2\phi(x)\, g_{\alpha\beta} \;, \qquad /5.4/$$

где $\phi(x)$ -скалярная функция. Правая часть последнего равенства возникает ввиду того, что в этом случае $g_{\alpha\beta}\, p^\alpha p^\beta = 0$.

Из /5.4/ следует

$$\zeta^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\zeta, \zeta) = 2(\zeta, \zeta)\phi(x) . \qquad /5.5/$$

Таким образом, ввиду /4.9/ функция ϕ характеризует скорость изменения температуры вдоль линий тока, т.е. вдоль интегральных кривых системы уравнений

$$\frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = u^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \,, \qquad /5.6/$$

где u^α -поле скоростей макроскопических дифференциальных элементов газа, $d\tau$ - собственное время такого элемента. Скорость изменения температуры вдоль линии тока равна

$$\frac{d\theta}{d\tau} = c u^a \frac{\partial}{\partial x^a}\theta = -\phi k \theta^2 . \qquad /5.7/$$

Если $\phi = 0$, что необходимо, коль скоро не все m_i равны нулю, то температура не меняется вдоль линии тока, т.е. θ -первый интеграл системы /5.6/.

Из /5.4/ нетрудно получить уравнение Эйлера

$$u^\beta \nabla_\beta u_a = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x^a} + \frac{\phi k}{c} \theta u_a , \qquad /5.8/$$

а также

$$u^\beta \nabla_\beta (\theta u_a) = \nabla_a \theta . \qquad /5.9/$$

Выясним геометрический смысл уравнения /5.4/. Справедливо следующее тождество:

$$\nabla_a \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_a = \zeta^\nu \frac{\partial g_{a\beta}}{\partial x^\nu} + g_{a\nu} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\beta} + g_{\beta\nu} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^a} . \qquad /5.10/$$

Поэтому уравнение /5.4/ можно записать в виде:

$$\zeta^\nu \frac{\partial g_{a\beta}}{\partial x^\nu} + g_{a\nu} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^\beta} + g_{\beta\nu} \frac{\partial \zeta^\nu}{\partial x^a} = 2\phi g_{a\beta} . \qquad /5.11/$$

Выполним бесконечно малое преобразование пространства событий

$$x^{a'} = x^a + \zeta^a (x)\, d\mu . \qquad /5.12/$$

Ввиду /5.11/ интервал $ds^2 = g_{a\beta}\, dx^a\, dx^\beta$ преобразуется следующим образом:

$$ds'^2 = (1 + 2\phi(x)\, d\mu)\, ds^2 . \qquad /5.13/$$

Таким образом, преобразование /5.12/ конформное, если векторное поле $\zeta(x)$ подчиняется уравнению /5.4/. Наоборот, из /5.13/ следует /5.4/. Преобразование /5.12/ является движением, если $\zeta(x)$ подчиняется уравнению /5.3/.

Если элементы газа не ускоряются, т.е. если правая часть уравнения /5.8/ равна нулю, то

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^a} = -\frac{\phi k}{c} \theta^2 u_a \qquad /5.14/$$

и

$$\zeta^\beta \nabla_\beta \zeta_a = \phi \zeta_a . \qquad /5.15/$$

Если к тому же $\phi = 0$, то температура постоянна, а преобразование /5.12/ является параллельным переносом.

Уравнение /5.3/ называется уравнением Киллинга. С ним очень тесно связано уравнение /5.4/. В самом деле, если некоторая функция $\rho(x)$ подчиняется уравнению

$$\zeta^{\alpha} \frac{\partial \rho}{\partial x^{\alpha}} = 2\rho\phi , \qquad /5.16/$$

а тензор $g_{\alpha\beta}$ подчиняется уравнению /5.11/, то тензор $h_{\alpha\beta} = \rho^{-1} g_{\alpha\beta}$ подчиняется уравнению

$$\zeta^{\nu} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + h_{\alpha\nu} \frac{\partial \zeta^{\nu}}{\partial x^{\beta}} + h_{\beta\nu} \frac{\partial \zeta^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0 . \qquad /5.17/$$

Следовательно, если в пространстве событий с метрическим тензором $h_{\alpha\beta}$ газ, в состав которого входят частицы с ненулевой массой покоя, может быть распределен по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана, то по такому закону может быть распределен газ, целиком состоящий из частиц с нулевой массой покоя, в пространстве событий с метрическим тензором $g_{\alpha\beta} = \rho\, h_{\alpha\beta}$.

Если координаты x^0, x^1, x^2, x^3 выбрать так, чтобы векторное поле $\zeta(x)$ имело контравариантные компоненты $\{1,0,0,0\}$, то уравнение /5.3/ примет простейший вид:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0} = 0 . \qquad /5.18/$$

Таким образом, если не все m_i равны нулю, то распределение Максвелла-Больцмана возможно лишь тогда, когда в этих координатах $g_{\alpha\beta}$ не зависят от x^0. Если же все m_i равны нулю, то распределение Максвелла-Больцмана возможно при

$$g_{\alpha\beta} = \rho(x)\, h_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) . \qquad /5.19/$$

В этих координатах распределение Максвелла-Больцмана принимает простейшую форму:

$$A_i(x,p) = a_i e^{-p_0} = a_i \exp\{ -\sqrt{g_{00} m_i^2 c^2 + (g_{0k} g_{0s} - g_{00} g_{ks}) p^k p^s} \} \qquad /5.20/$$

Учитывая /5.5/ уравнение /5.4/ запишем в виде:

$$\nabla_{\alpha} \zeta_{\beta} + \nabla_{\beta} \zeta_{\alpha} = \frac{\zeta^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\zeta, \zeta)}{(\zeta, \zeta)} g_{\alpha\beta} . \qquad /5.21/$$

Ввиду однородности этого уравнения, если $\zeta(x)$ -решение, то и $\lambda\zeta(x)$ решение, где λ -произвольное постоянное число. То же самое справедливо и в отношении уравнения /5.3/. Отсюда можно вывести понятие глобальной температуры. Пусть имеется два распределения Максвелла-Больцмана с векторами $\overset{(1)}{\zeta}(x)$ и $\overset{(2)}{\zeta}(x)$ причем

$$\overset{(2)}{\zeta}(x) = \lambda \overset{(1)}{\zeta}(x) . \qquad /5.22/$$

Отношение локальных температур равно

$$\overset{(1)}{\theta}(x) : \overset{(2)}{\theta}(x) = \lambda . \qquad /5.23/$$

Можно сказать, что глобальная температура первого газа равна λ, если глобальная температура второго газа равна 1.

§ 6. Условия интегрируемости уравнений, определяющих глобальное распределение Максвелла-Больцмана

Рассмотрим условия интегрируемости уравнения /5.4/, не учитывая временного характера векторного поля $\zeta(x)$. Обозначим $\zeta_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \zeta_\alpha$. Имеем уравнение

$$\zeta_{\alpha\beta} + \zeta_{\beta\alpha} = 2\phi\, g_{\alpha\beta}\,. \qquad /6.1/$$

Оказывается, что при заданных $g_{\alpha\beta}$ уравнение /6.1/ имеет решение не при всякой функции $\phi(x)$. Действительно, пусть $\zeta_{\alpha\beta\gamma} = \nabla_\gamma \zeta_{\alpha\beta}$. Тогда из /6.1/ следует

$$\zeta_{\alpha\beta\gamma} + \zeta_{\beta\alpha\gamma} = 2 g_{\alpha\beta}\phi_\gamma\,, \quad \phi_\gamma = \frac{\partial\phi}{\partial x^\gamma}\,, \qquad /6.2/$$

а значит, и

$$\zeta_{\alpha\beta\gamma} = \zeta_\nu R^\nu_{\gamma,\alpha\beta} + \phi_\beta g_{\gamma\alpha} + \phi_\gamma g_{\alpha\beta} - \phi_\alpha g_{\beta\gamma}\,, \qquad /6.3/$$

где $R^\nu_{\gamma\alpha\beta}$ – тензор кривизны

$$R^\nu_{\gamma\alpha\beta} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\gamma\beta}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\gamma\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\beta} - \Gamma^\mu_{\gamma\beta}\Gamma^\nu_{\mu\alpha}\,. \qquad /6.4/$$

Чтобы доказать /6.3/ заметим, что[12]

$$\zeta_{\alpha\beta\gamma} - \zeta_{\alpha\gamma\beta} = \zeta_\nu R^\nu_{\alpha\gamma\beta}\,. \qquad /6.5/$$

Запишем тождество

$$\zeta_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac12(\zeta_{\alpha\beta\gamma} + \zeta_{\beta\alpha\gamma}) + \tfrac12(\zeta_{\gamma\alpha\beta} + \zeta_{\alpha\gamma\beta}) - \tfrac12(\zeta_{\gamma\beta\alpha} + \zeta_{\beta\gamma\alpha}) +$$
$$+ \tfrac12(\zeta_{\gamma\beta\alpha} - \zeta_{\gamma\alpha\beta}) + \tfrac12(\zeta_{\alpha\beta\gamma} - \zeta_{\alpha\gamma\beta}) - \tfrac12(\zeta_{\beta\alpha\gamma} - \zeta_{\beta\gamma\alpha})\,. \qquad /6.6/$$

Подставляя сюда /6.2/ и /6.5/, получаем

$$\zeta_{\alpha\beta\gamma} = \phi_\beta g_{\gamma\alpha} + \phi_\gamma g_{\alpha\beta} - \phi_\alpha g_{\beta\gamma} + \tfrac12\zeta_\nu(R^\nu_{\gamma\alpha\beta} + R^\nu_{\alpha\gamma\beta} - R^\nu_{\beta\gamma\alpha})\,. \qquad /6.7/$$

Учитывая, что

$$R^\nu_{\gamma\alpha\beta} + R^\nu_{\gamma\beta\alpha} = 0 \qquad /6.8/$$

$$R^\nu_{\alpha\beta\gamma} + R^\nu_{\beta\gamma\alpha} + R^\nu_{\gamma\alpha\beta} = 0\,, \qquad /6.9/$$

отсюда находим /6.3/.

Таким образом, мы получили систему уравнений

$$\frac{\partial \zeta_a}{\partial x^\gamma} = \zeta_\nu \Gamma^\nu_{a\gamma} + \zeta_{a\gamma}$$

$$\frac{\partial \zeta_{a\beta}}{\partial x^\gamma} = \zeta_{\nu\beta}\Gamma^\nu_{a\gamma} + \zeta_{a\nu}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} + \zeta_\nu R^\nu_{\gamma a\beta} + \phi_\beta g_{\gamma a} + \phi_\gamma g_{a\beta} - \phi_a g_{\beta\gamma} \qquad /6.10/$$

для $n(n+1)$ функций ζ_a $\zeta_{a\beta}$, связанных $\frac{n(n+1)}{2}$ условиями /6.1/, где n -размерность пространства событий, равная 4. Условия интегрируемости этих уравнений таковы

$$(\nabla_\gamma \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\gamma)\zeta_a = \zeta_\nu R^\nu_{a\gamma\beta} \qquad /6.11a/$$

$$(\nabla_\gamma \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\gamma)\zeta_{a\beta} = \zeta_{\nu\beta} R^\nu_{a\gamma\mu} + \zeta_{a\nu} R^\nu_{\beta\gamma\mu}\ . \qquad /6.11в/$$

Условия /6.11a/ выполняются тождественно. Условия /6.11в/ накладывают следующее ограничение:

$$\zeta_{\nu\beta} R^\nu_{a\gamma\mu} + \zeta_{a\nu} R^\nu_{\beta\gamma\mu} + \zeta_{\nu\mu} R^\nu_{\gamma a\beta} - \zeta_{\nu\gamma} R^\nu_{\mu a\beta} +$$

$$+ \zeta_\nu (\nabla_\mu R^\nu_{\gamma a\beta} - \nabla_\gamma R^\nu_{\mu a\beta}) = \qquad /6.12/$$

$$= \phi_{a\mu} g_{\beta\gamma} + \phi_{\beta\gamma} g_{a\mu} - \phi_{a\gamma} g_{\beta\mu} - \phi_{\beta\mu} g_{a\gamma}\ ,$$

где

$$\phi_{\mu\nu} = \nabla_\nu \phi_\mu = \nabla_\nu \nabla_\mu \phi = \phi_{\nu\mu}. \qquad /6.13/$$

Рассматриваемая система вполне интегрируема, если

$$\delta^\mu_\beta R^\nu_{a\gamma\sigma} - \delta^\nu_\beta R^\mu_{a\gamma\sigma} + \delta^\mu_\sigma R^\nu_{\gamma a\beta} - \delta^\nu_\sigma R^\mu_{\gamma a\beta} +$$

$$+ \delta^\nu_a R^\mu_{\beta\gamma\sigma} - \delta^\mu_a R^\nu_{\beta\gamma\sigma} + \delta^\nu_\gamma R^\mu_{\sigma a\beta} - \delta^\mu_\gamma R^\nu_{\sigma a\beta} = 0 \qquad /6.14a/$$

$$\nabla_\mu R^\nu_{\gamma a\beta} - \nabla_\gamma R^\nu_{\mu a\beta} = 0 \qquad /6.14в/$$

$$\phi_{a\sigma} g_{\beta\gamma} + \phi_{\beta\gamma} g_{a\sigma} - \phi_{a\gamma} g_{\beta\sigma} - \phi_{\beta a} g_{a\gamma} = 2\phi R_{a\beta\gamma\sigma}\ . \qquad /6.14c/$$

Из /6.14a/ следует [13], что в этом случае пространство событий является пространством постоянной кривизны:

$$R_{\mu\nu a\beta} = K\{g_{\nu a} g_{\mu\beta} - g_{\mu a} g_{\nu\beta}\}. \qquad /6.15/$$

При этом условие /6.14в/ выполняется тождественно, а условие /6.14с/ запишется следующим образом:

$$\psi_{\alpha\sigma}\, g_{\beta\gamma} + \psi_{\beta\gamma}\, g_{\alpha\sigma} - \psi_{\alpha\gamma}\, g_{\beta\sigma} - \psi_{\beta\sigma}\, g_{\alpha\gamma} = 0, \qquad /6.16/$$

где

$$\psi_{\alpha\beta} = \phi_{\alpha\beta} - K\,\phi\, g_{\alpha\beta}\,. \qquad /6.17/$$

Умножив /6.16/ на $g^{\sigma\mu} g^{\gamma\nu}$ и просуммировав по σ и по γ, получим

$$\psi^{\mu}_{\alpha}\,\delta^{\nu}_{\beta} + \psi^{\nu}_{\beta}\,\delta^{\mu}_{\alpha} - \psi^{\nu}_{\alpha}\,\delta^{\mu}_{\beta} - \psi^{\mu}_{\beta}\,\delta^{\nu}_{\alpha} = 0\,. \qquad /6.18/$$

При $\nu = \alpha$ $\alpha \neq \beta$ $\mu \neq \alpha$ получаем:

$$\psi^{\alpha}_{\alpha}\,\delta^{\mu}_{\beta} + \psi^{\mu}_{\beta} = 0\,. \qquad /6.19/$$

В этой формуле, а также в следующей далее формуле /6.21/ суммирования по повторяющемуся индексу нет ! Следовательно, если $\mu \neq \beta$, то

$$\psi^{\mu}_{\beta} = 0, \qquad /6.20/$$

если $\mu = \beta$, то

$$\psi^{\alpha}_{\alpha} + \psi^{\beta}_{\beta} = 0\,. \qquad /6.21/$$

Ввиду того, что размерность пространства событий больше двух, из /6.20/ и /6.21/ следует, что при любых α и β $\psi^{\beta}_{\alpha} = 0$ а значит,

$$\phi_{\alpha\beta} = K\,\phi\, g_{\alpha\beta}\,. \qquad /6.22/$$

Аналогичное исследование уравнения /5.3/ проведено в [12,13].

§ 7. Распределение Максвелла-Больцмана в частной теории относительности

В случае частной теории относительности кривизна K пространства событий равна нулю и можно выбрать координаты x^0, x^1, x^2, x^3, в которых $g_{\alpha\beta} = const$. Из /6.22/ следует, что в этих координатах

$$\phi(x) = a + 2(b, x), \qquad /7.1/$$

где a -постоянный скаляр, b - постоянный вектор. Из уравнения /6.1/ заключаем, что

$$\frac{\partial \zeta_\alpha}{\partial x^\beta} = a g_{\alpha\beta} + 2(b,x)\, g_{\alpha\beta} - 2\eta_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3), \qquad /7.2/$$

где $\eta_{\alpha\beta}(x)$ - антисимметричное тензорное поле. Отсюда

$$\frac{\partial^2 \zeta_a}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} = 2\, b_\gamma\, g_{a\beta} - 2\,\frac{\partial \eta_{a\beta}(x)}{\partial x^\gamma} \quad . \qquad /7.3/$$

Сравнивая /7.3/ с /6.3/, находим

$$\frac{\partial\, \eta_{a\beta}(x)}{\partial\, x^\gamma} = b_a\, g_{\beta\gamma} - b_\beta\, g_{\gamma a} \quad . \qquad /7.4/$$

Следовательно,

$$\eta_{a\beta}(x) = b_a\, x_\beta - b_\beta\, x_a + \eta_{a\beta} \,, \qquad /7.5/$$

где

$$\eta_{a\beta} = \eta_{a\beta}(0) \,, \qquad x_a = g_{a\gamma}\, x^\gamma \,. \qquad /7.6/$$

Таким образом,

$$\frac{\partial\, \zeta_a}{\partial\, x^\beta} = a\, g_{a\beta} + 2(b,x)\, g_{a\beta} + 2\, x_a\, b_\beta - 2\, x_\beta\, b_a - 2\, \eta_{a\beta} \quad . \qquad /7.7/$$

Полагая

$$\zeta_a(0) = \eta_a \qquad /7.8/$$

и интегрируя /7.7/, получаем

$$\zeta_a = a\, x_a + 2(b,x)\, x_a - (x,x)\, b_a - 2\,\eta_{a\beta}\, x^\beta + \eta_a \quad . \qquad /7.9/$$

Для того, чтобы векторное поле $\zeta(x)$ можно было отождествить с векторным полем, входящим в распределение Максвелла-Больцмана /3.39/, как уже указывалось, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$(\zeta, \zeta) > 0 \,, \quad \zeta_0 > 0 \,. \qquad /7.10/$$

Эти неравенства задают область пространства событий, в которой допустимо распределение Максвелла-Больцмана. Для газа, в состав которого входят частицы с ненулевой массой покоя, a и b^a следует положить равными нулю.

Если $a = 0$, $b_a = 0$ $\eta_{a\beta} = 0$ и вектор η времени подобен, то-есть он удовлетворяет условиям /7.10/, то функция распределения

$$A_i\,(x,p) = a_i\, e^{-(\eta,p)} \qquad /7.11/$$

представляет равномерный поток релятивистского газа, и, в частности, при $\eta^k = 0$ – покоящийся газ.

Рассмотрим еще один пример. Выберем галилеевы координаты t, x, y, z. Пусть в этих координатах $\eta^0 > 0$, $2\eta_{21} = -2\eta_{12} = \omega\eta^0$, остальные компоненты вектора η и тензора η равны нулю и, кроме того, $a = 0$, $b^a = 0$. Вектор ζ равен

$$\zeta^0 = \eta^0 \,, \qquad \zeta^1 = -\omega\,\eta^0 y \,, \quad \zeta^2 = \omega\,\eta^0 x \,, \quad \zeta^3 = 0. \qquad /7.12/$$

Его скалярный квадрат равен

$$(\zeta, \zeta) = \eta^0 \eta^0 (c^2 - \omega^2 x^2 - \omega^2 y^2), \qquad /7.13/$$

так что распределение Максвелла-Больцмана допустимо в цилиндре

$$x^2 + y^2 < \frac{c^2}{\omega^2}. \qquad /7.14/$$

Гидродинамическое поле скоростей газа таково:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\zeta^1}{\zeta^0} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\zeta^2}{\zeta^0} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\zeta^3}{\zeta^0} = 0. \qquad /7.15/$$

Таким образом, это равномерно вращающийся газ с угловой частотой ω. Температура газа зависит от $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ /см./4.9//:

$$\theta(\rho) = \frac{\theta(0)}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 \rho^2}{c^2}}}, \qquad \eta^0 k \theta(0) = 1, \qquad /7.16/$$

$\theta(0)$ –температура на оси вращения, т.е. на оси z. Функция распределения имеет следующий вид:

$$A_i(x,p) = a_i \exp\left\{ - \frac{\sqrt{m_i^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} + \omega y p^1 - \omega x p^2}{k\,\theta(0)} \right\}, \qquad /7.17/$$

где

$$\vec{p}^2 = p^1 p^1 + p^2 p^2 + p^3 p^3. \qquad /7.18/$$

В рассмотренных двух примерах параметры a и b^a равнялись нулю. Поэтому оба примера относятся к произвольному газу. Следующий пример относится к газу, состоящему из частиц с нулевой массой покоя.

Положим $a = 0$, $\eta_{\alpha\beta} = 0$ Если выполняются условия

$$(\eta, \eta) > 0, \quad \eta_0 > 0; \quad (b, b) \geqslant 0, \quad b_0 \geqslant 0, \qquad /7.19/$$

то векторное поле $\zeta(x)$ удовлетворяет условиям /7.10/ во всем пространстве событий. Достаточно рассмотреть случай $b_0 > 0$, так как если $b_0 = 0$ и $(b, b) \geq 0$, то $b = 0$ и $\zeta(x) = \eta$. Если $b_0 > 0$, то вектор $\zeta(x)$ равен сумме векторов η и $h(x)$, где

$$h^a(x) = 2(b,x)\, x^a - (x,x)\, b^a. \qquad /7.20/$$

Скалярный квадрат этого вектора равен

$$(h(x), h(x)) = (b,b)(x,x)^2 \geq 0. \qquad /7.21/$$

В галилеевых координатах

$$h_0(x) = b_0[c^2 t^2 + \vec{r}^2] - 2c^2 \vec{b}\,\vec{r}\,t = b_0[\vec{r} - \frac{c^2 t}{b_0}\vec{b}\,]^2 + \frac{c^4 (b,b)}{b_0} t^2 \geq 0. \qquad /7.22/$$

Следовательно, вектор $\zeta(x) = \eta + h(x)$ удовлетворяет условиям /7.10/.

Функция распределения такого газа равна

$$A(x,p) = a \exp\{-(\eta,p) + (x,x)(b,p) - 2(b,x)(x,p)\} . \qquad /7.23/$$

Согласно /4.9/ находим температуру газа как функцию точки x пространства событий

$$\theta(x) = \frac{c}{k\sqrt{(\zeta,\zeta)}} = \frac{c}{k\sqrt{(\eta,\eta)+(b,b)(x,x)^2+4(b,x)(\eta,x)-2(x,x)(b,\eta)}} . \qquad /7.24/$$

Направим ось времени по η . Гидродинамическое поле скоростей газа представится в виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{\zeta}}{\zeta^0} = \frac{2(b_0 t - \vec{b}\vec{r})\vec{r} - (c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2)\,\vec{b}}{\eta^0 + 2(b_0 t - \vec{b}\vec{r})t - (c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2)\,b^0} . \qquad /7.25/$$

Проинтегрируем систему уравнений /7.25/ в двух случаях: при $b=0$ и при $(b,b)=0$.

1. $\vec{b}=0$. Выберем сферические координаты: $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$. Получаем $\theta=\theta_0$, $\phi=\phi_0$ и

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2b_0 tr}{\eta^0 + b_0 t^2 + b^0 r^2} . \qquad /7.26/$$

Отсюда находим

$$\lambda^2 + c^2t^2 - r^2 = 2ar , \quad \lambda = \sqrt[4]{\frac{(\eta,\eta)}{(b,b)}} , \quad -\infty < a < \infty , \qquad /7.27/$$

где a –постоянная интегрирования. Таким образом, макроскопические диффренциальные элементы газа находятся в равноускоренном гиперболическом движении. Обозначим:

$$r\,/_{t=0} = r_0 = \lambda e^{-s} , \quad a = \lambda\, sh\, s . \qquad /7.27/$$

Тогда

$$r = \sqrt{\lambda^2 ch^2 s + c^2t^2} - \lambda\, sh\, s . \qquad /7.28/$$

Инвариантное ускорение элемента газа равно

$$g = \frac{c^2}{\lambda\, ch\, s} = \frac{2c^2 r}{\sqrt{(\lambda^2 + c^2t^2 - r^2)^2 + 4\lambda^2 r^2}} = 2rck\,\theta(x)\sqrt{(b,b)} . \qquad /7.29/$$

При s и $-s$ ускорения одинаковы. Ускорение максимально при $s=0$. Элемент газа с координатой $r=0$ движется без ускорения. При $t=0$ скорости элементов газа равны нулю. При отрицательных значениях t элементы газа стягиваются к центру, а при положительных – разбегаются от центра.

2. $(b,b)=0$ Направим ось времени по η , ось z – по $\vec{b}$. В плоскости xy выберем полярные координаты: $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$. Получаем $\phi=\phi_0$ и

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(b_0 t - bz)z - (c^2 t^2 - z^2 - \rho^2)\, b}{\eta^0 + 2(b_0 t - bz)t - (c^2 t^2 - z^2 - \rho^2)\, b^0}, \qquad /7.30/$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{2(b_0 t - bz)\rho}{\eta^0 + 2(b_0 t - bz)t - (c^2 t^2 - z^2 - \rho^2)\, b^0}.$$

Из условия $(b, b) = 0$ следует $b_0 = bc$, $cb^0 = b$. Заменим z на $w = ct - z$. Из /7.30/ находим

$$\frac{1}{c}\frac{dw}{dt} = \frac{\eta^0 + 2b^0 w^2}{\eta^0 + b^0 w^2 + b^0 \rho^2}, \quad \frac{1}{c}\frac{d\rho}{dt} = \frac{2b^0 w \rho}{\eta^0 + b^0 w^2 + b^0 \rho^2}. \qquad /7.31/$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем уравнение с разделяющимися переменными, откуда

$$\rho^2 = a^2 (w^2 + \mu^2), \quad \mu = \sqrt{\frac{\eta^0}{2b^0}}, \qquad /7.32/$$

где a – постоянная интегрирования. Подставляя /7.32/ в первое уравнение /7.32/, получаем:

$$w = \mu \, tg \left\{ ct - \frac{a^2 + 1}{2} w - \psi \right\}, \qquad /7.33/$$

где ψ – вторая постоянная интегрирования.

Как видно, в этом случае газ находится в значительно более сложном движении, чем в первом случае.

§ 8. Примеры распределения Максвелла-Больцмана при наличии гравитационного поля

Здесь будет рассмотрено несколько характерных примеров.

1/ Постоянное поле: $ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)\, dx^\alpha dx^\beta$. Векторное поле с компонентами

$$\zeta^0(x) = \eta^0 = const > 0, \quad \zeta^k(x) = 0, \qquad /8.1/$$

ввиду тождества /5.10/ удовлетворяет уравнению /5.3/. Функция распределения

$$A_l(x, p) = a_l \, e^{-\eta^0 p_0} \qquad /8.2/$$

представляет покоящийся газ. Температура газа согласно /4.9/ равна

$$\theta(x) = \frac{c}{k\eta^0 \sqrt{g_{00}}}. \qquad /8.3/$$

2/ Статическое сферически-симметричное поле

$$ds^2 = V^2(r)\,dt^2 - G^2(r)\,dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \qquad /8.4/$$

Векторное поле с компонентами

$$\zeta^0(x) = \eta^0 = const > 0\ ,\ \zeta^1 = \zeta^2 = 0\ ,\ \zeta^3 = \omega\,\eta^0 = const\ , \qquad /8.5/$$

удовлетворяет уравнению /5.3/. Распределение Максвелла-Больцмана возможно в цилиндре

$$V^2(r) - \omega^2 r^2 \sin^2\theta > 0\ . \qquad /8.6/$$

Функция распределения

$$A_1(x,p) = a_1 \exp\{-\eta^0 p_0 + \omega\,\eta^0 p^3 r^2 \sin^2\theta\} \qquad /8.7/$$

представляет вращающийся газ. Температура газа равна

$$\theta(x) = \frac{c}{k\,\eta^0\sqrt{V^2(r) - \omega^2 r^2 \sin^2\theta}}\ . \qquad /8.8/$$

3/ Изотропная модель/14/:

$$ds^2 = b^2(t)\,\{dt^2 - dr^2 - \frac{1}{\lambda^2}\sin^2\lambda r\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\}\ , \qquad /8.9/$$

где $\lambda = 0, 1, i$. Векторное поле с компонентами /8.5/ удовлетворяет уравнению /5.4/ или /5.11/ при

$$\phi = \frac{\eta^0}{b}\,\frac{db}{dt}\ . \qquad /8.9/$$

Температура газа равна

$$\theta(x) = \frac{c}{k\,\eta^0\, b(t)}\,[\,1 - \frac{\omega^2 \sin^2\lambda r\ \sin^2\theta}{\lambda}\,]^{-1/2}. \qquad /8.10/$$

Распределение Максвелла-Больцмана возможно в цилиндре

$$\frac{\omega^2 \sin^2\lambda r\ \sin^2\theta}{\lambda^2} < 1\ . \qquad /8.11/$$

Функция распределения

$$A_1(x,p) = a_1 \exp\{-\eta^0 p_0 + \frac{b^2(t)\,\eta^0\omega\, p^3}{\lambda^2}\sin^2\lambda\, r \sin^2\theta\} \qquad /8.12/$$

представляет вращающийся газ, в состав которого входят только частицы с нулевой массой покоя.

4/ Следующий пример также относится к изотропной модели. Перейдем к координатам

$$x_1 = \frac{\sin\lambda r}{\lambda} \sin\theta\cos\phi \;, \quad x_2 = \frac{\sin\lambda r}{\lambda} \sin\theta\sin\phi \;, \quad x_3 = \frac{\sin\lambda r}{\lambda} \cos\theta \;. \qquad /8.13/$$

При этом ds^2 запишется в виде:

$$ds^2 = b^2(t)\{ dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 - \frac{\lambda^2 (x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{1 - \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \} . \qquad /8.14/$$

Векторное поле

$$\zeta^0 = \eta^0 , \; \zeta^1 = 0 , \; \zeta^2 = 0 , \; \zeta^3 = \eta^0 h \sqrt{1 - \lambda^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \;, \qquad /8.15/$$

где η^0, h константы, удовлетворяет уравнению /5.4/ при ϕ, равной /8.9/. Распределение Максвелла-Больцмана возможно при $\eta^0 > 0$ в области

$$1 - h^2 - \lambda^2 h^2 (x_1^2 + x_2^2) > 0 . \qquad /8.16/$$

Температура газа равна

$$\theta(x) = \frac{c}{k\eta^0 b(t)} [1 - h^2 - \lambda^2 h^2 (x_1^2 + x_2^2)]^{-1/2} . \qquad /8.17/$$

Функция распределения имеет следующий вид:

$$A_1(x,p) = a_1 \exp\{-\eta^0 p_0 + \eta^0 b^2(t) h [p^3 \cos\lambda r + (x_1 p^1)\lambda \,\mathrm{tg}\,\lambda r \cos\theta]\} . \qquad /8.18/$$

§ 9. Связь распределения Максвелла-Больцмана с интегральными законами сохранения

Существует тесная связь между распределением Максвелла-Больцмана и интегральной формой законов сохранения. Интегральную форму законов сохранения исследовал В.А. Фок[12]. Пусть задан тензор массы $T^{\alpha\beta}(x)$ некоторой замкнутой системы. Его дивергенция равна нулю

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 . \qquad /9.1/$$

Пусть $\zeta(x)$ – векторное поле. В.А. Фок доказал, что интегральный закон сохранения для величины

$$\zeta^\alpha = \zeta_\beta T^{\alpha\beta} \qquad /9.2/$$

имеет место, если векторное поле $\zeta(x)$ удовлетворяет условию /5.3/. К этому можно добавить, что если след $T = T_\alpha^\alpha$ тензора массы равен нулю, то интегральный закон сохранения имеет место и в том случае, когда векторное поле $\zeta(x)$ удовлетворяет более слабому условию /5.4/ .

Действительно, пусть R область пространства событий, ограниченная замкнутой гиперповерхностью U. Имеем тождество

$$\int_U \eta^a d\sigma_a = \int_R \nabla_a \eta^a dX , \qquad /9.3/$$

где $d\sigma_a$ -вектор трехмерной площадки. Следовательно, для выполнения интегрального закона сохранения необходимо и достаточно равенство $\nabla_a \eta^a = 0$. Учитывая /9.2/ и /9.1/ отсюда получаем:

$$\nabla_a \eta^a = ½ (\nabla_a \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_a) T^{a\beta} = 0 . \qquad /9.4/$$

Таким образом, векторное поле $\zeta(x)$ удовлетворяет уравнению /5.4/, если след T равен нулю, и уравнению /5.3/ в противном случае.

Отсюда можно сделать следующий вывод. Если метрический тензор $g_{a\beta}(x)$ допускает распределение газа по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана и массы всех частиц газа равны нулю, то выполняется интегральный закон сохранения для величины /9.2/, где $T^{a\beta}$ -тензор массы с нулевым следом T, например, тензор массы электромагнитного поля. Если же массы покоя некоторых частиц газа не равны нулю и метрический тензор допускает распределение этого газа по релятивистскому закону Максвелла-Больцмана, то выполняется интегральный закон сохранения для величины /9.2/, где $T^{a\beta}$ - произвольный тензор массы.

Величину /9.2/ естественно назвать плотностью момента импульса системы относительно преобразования /5.12/. Условие /9.4/ необходимо и достаточно для сохранения момента импульса системы относительно преобразования /5.12/.

Если система состоит из одной частицы, то момент импульса частицы относительно преобразования /5.12/ равен

$$(\zeta(x), p), \qquad /9.5/$$

где x - положение частицы в пространстве событий, p -импульс частицы. Момент импульса /9.5/ является первым интегралом уравнений движения частицы в гравитационном поле в том и только в том случае, когда

$$\frac{d}{d\tau}(\zeta(x), p) = (\nabla_a \zeta_\beta + \nabla_\beta \zeta_a) p^a p^\beta = 0 . \qquad /9.6/$$

Таким образом, мы снова приходим к уравнению /5.3/ или к уравнению /5.4/, если $(p,p)=0$.

В частной теории относительности векторное поле /7.9/ удовлетворяющее условию /9.4/, представлено линейной комбинацией векторных полей с коэффициентами $\eta_\mu, \eta_{\mu\nu}, a, b_\mu$. Десять векторных полей при коэффициентах η дают обычные интегральные законы сохранения импульса и момента импульса. Пять векторных полей при a и b_μ дают закон сохранения скалярного конформного момента импульса

$$R = c \iiint_{-\infty}^{\infty} x_\beta T^{\beta 0} dx\, dy\, dz . \qquad /9.7/$$

и закон сохранения векторного конформного момента импульса

$$S^{\mu} = c \iiint_{-\infty}^{\infty} \{ 2x^{\mu} x_{\beta} T^{\beta o} - (x,x) T^{\mu o} \} dx\, dy\, dz. \qquad /9.8/$$

Эти законы выполняются если след T равен нулю. Впервые законы сохранения /9.7/ и /9.8/ получены в работе[15]. См. также[16].

Вероятно, что если уравнения движения системы конформно инвариантны, то тензор массы можно выбрать с нулевым следом.

Литература

1. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ М-Л., 1951.
2. Д.Л. Синдж. Релятивистский газ. Атомиздат, М., 1960.
3. Н.А. Черников. ДАН СССР 144, № 3 /544/, 1962 г.
4. Н.А. Черников. ДАН СССР 144, № 1 /89/, 1962.
5. Н.А. Черников. Препринт ОИЯИ Р-1028, Дубна, 1962.
6. П.С. Александров. Введение в общую теорию множеств и функций, ГИТТЛ, М-Л., 1948.
7. Л. Больцман. Лекции по теории газов, ГИТТЛ, М., 1956.
8. H.Grad., Commun. pure appl. Math., 2, No. 4 (331) 1949.
9. А. Зоммерфельд. Термодинамика и статистическая физика, ИЛ., М., 1955.
10. Т. Карлеман. Математические задачи кинетической теории газов. ИЛ. М., 1960.
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред, ГИТТЛ., М., 1953.
12. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ. М., 1955.
13. Л.П. Эйзенхарт. Непрерывные группы преобразований. ИЛ., М., 1947.
4. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, ГИТТЛ,М-Л., 1947.
15. E.Bessel-Hagen, Math. Ann., 84 (258), 1921.
16. J.A.McLennan Ir., Il Nuovo Cim. Ser., X. Vol. 3 (1360) 1956.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 декабря 1962 г.