Р-113

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л.И.ЛАПИДУС

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ К $\pi - N$ РАССЕЯНИЮ ПРИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЯХ

ЖЭТФ, 1958, т 34, в 2, с. 453-462.

1957 г.

Р-113

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л.И.ЛАПИДУС

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ К π - N РАССЕЯНИЮ ПРИ МАЛЫХ ЭНЕРГИЯХ

1 9 5 7 г.

А н н о т а ц и я

Исследуются следствия дисперсионных соотношений для $\pi-N$ рассеяния при малых энергиях без перехода к уровням типа Лоу. Из значений производных от дисперсионных соотношений при $K^2=0$ получены соотношения между длинами рассеяния в различных состояниях.

При применении дисперсионных соотношений к области малых энергий часто переходят к уравнениям Чу-Лоу и затем рассматривают следствия этих уравнений[1].

В настоящей работе следствия дисперсионных соотношений для $\pi-N$ - рассеяния при малых энергиях рассматриваются без обращения к уравнениям Лоу.

Рассмотрим дисперсионные соотношения для $\pi-N$ - рассеяния, записанные в виде

$$D_\pm(k)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\omega}{\mu}\right)D_\pm(0)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega}{\mu}\right)D_\mp(0)=k^2 J_\pm(\omega)\pm\frac{2f^2}{\mu^2}\cdot\frac{k^2}{\omega\mp\frac{\mu^2}{2M}}, \qquad (I)$$

где через $J_\pm(\omega)$ обозначен дисперсионный интеграл

$$J_\pm(\omega)=\frac{1}{4\pi^2}P\int_\mu^\infty\frac{d\omega'}{k'}\left[\frac{\sigma_\pm(\omega')}{\omega'-\omega}+\frac{\sigma_\mp(\omega')}{\omega'+\omega}\right], \qquad (2)$$

ω - полная энергия мезонов в лабораторной системе, другие обозначения ясны. Будем считать в (I) энергию мезонов малой $\omega-\mu \ll \mu$. При $\eta^2=\frac{k^2}{\mu^2}\to 0$ обе части (I) обращаются в нуль. Поэтому, желая получить следствия дисперсионных соотношений для $\eta^2\to 0$, обратимся к значениям производных по η^2 от (I) при $\eta^2\to 0$. При вычислении производных воспользуемся представлением зависимости фаз от энергии в виде, даваемом "теорией эффективной длины" I).

$$\eta_b^{2\ell+1}\,\mathrm{ctg}\,\delta_\ell = \frac{1}{a_{2\ell+1}} + P_\ell\,\eta_b^2 + Q_\ell\,\eta_b^4 , \tag{3}$$

где $a_{2\ell+1}$ – длина рассеяния в ℓ – состоянии, $k_b = \eta_b \mu$ – импульс мезона в системе центра инерции, причем,

$$\frac{k}{k_b} = \frac{\eta}{\eta_b} = \left(1 + \frac{2\omega}{M} + \frac{\mu^2}{M^2}\right)^{1/2} . \tag{4}$$

Производные от второго и третьего члена в левой части (I) будут иметь вид

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^{(n)}\left[D_{\mp}(0) - D_{\pm}(0)\right] = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\mu}\right)^{(n)}\left[D_{-}(0) - D_{+}(0)\right]$$

Так как

$$\left(\frac{\omega}{\mu}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega}\right),\ \left(\frac{\omega}{\mu}\right)'' = -\frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^3,\ \left(\frac{\omega}{\mu}\right)''' = \frac{3}{8}\left(\frac{\mu}{\omega}\right)^5, \ldots$$

($|^{*}$ всюду означает дифференцированные по η^2), то при $\eta^2 \to 0$ имеем

$$\pm\frac{1}{4}\left[D_{-}(0) - D_{+}(0)\right] = \pm\frac{\lambda_c}{6}\left(1 + \frac{\mu}{M}\right)(a_1 - a_3);\ \left(\lambda_c = \frac{\hbar}{\mu c}\right) \tag{5}$$

для первой производной, и

$$\mp\frac{1}{8}\left[D_{-}(0) - D_{+}(0)\right] = \mp\frac{\lambda_c}{12}\left(1 + \frac{\mu}{M}\right)(a_1 - a_3) \tag{6}$$

для второй производной. Через a_3 и a_1, как обычно, обозначены длины рассеяния в S – состояниях с изотопическим спином $T = 3/2$ и $T = 1/2$, соответственно.

Ненаблюдаемая область дает для первой производной

$$\pm 2f^2\lambda_c\left\{\frac{1}{\frac{\omega}{\mu}\mp\frac{\mu}{2M}}-\frac{\eta^2}{\left(\frac{\omega}{\mu}\mp\frac{\mu}{2M}\right)^2}\;\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\omega}\right)\right\}\Bigg]_0=\pm\frac{2f^2\lambda_c}{\left(1\mp\frac{\mu}{2M}\right)} \tag{7}$$

и

$$\mp\frac{2f^2\lambda_c}{\left(1\mp\frac{\mu}{2M}\right)^2} \tag{8}$$

для второй производной. Знак $]_0$ всюду означает, что имеется в виду значение выражения при $\eta^2=0$. Если ограничиться значениями лишь первых двух производных при $\eta^2=0$ достаточно представить, например, $D_+(k)$ в виде

$$2k_B^2D_+(k)=k\left\{\sin 2\alpha_3 \overset{+\sin}{} 2\alpha_{31}+2(\sin 2\alpha_{33}+\sin 2\delta_{33})+3\sin 2\delta_{35}\right\}, \tag{9}$$

где через δ_{33} и δ_{35} обозначены фазы состояний $d_{3/2}$ и $d_{5/2}$ с $T=3/2$, а для фаз s и p – состояний использованы обычные обозначения. Воспользовавшись (3), представим (9) в виде

$$k_B D_+(k)=\lambda_c\cdot k\cdot\left\{\frac{A_3}{A_3^2+x}+\frac{xA_{31}}{A_{31}^2+x^3}+2\left[\frac{xA_{33}}{A_{33}^2+x^3}+\frac{x^2B_{33}}{B_{33}^2+x^5}\right]+\frac{3x^2B_{35}}{B_{35}^2+x^5}\right\}, \tag{10}$$

где через A_3, A_{31}, A_{33}, B_{33} и B_{35} обозначены правые части (3) для состояний $S_{1/2}$, $P_{1/2}$, $P_{3/2}$, $d_{3/2}$ и $d_{5/2}$ с $T=3/2$, а $x=\eta_t^2$.

Для значения первой производной от (I0) при $\gamma = 0$ получаем

$$D_+'(k)\Big]_0 = -\frac{\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}\left\{2a_{33}+a_{31}+\frac{\mu}{2M}a_3-P_3a_3^2-a_3^3\right\} \tag{II}$$

Собирая (6), (7) и (II), из значения первой производной от (I) при $\eta^2 = 0$ имеем соотношение

$$\frac{\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}\left\{2a_{33}+a_{31}+\frac{\mu}{2M}a_3-P_3a_3^2-a_3^3\right\}+\frac{\lambda_c}{6}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)(a_1-a_3) = \left\{k^2J_+\right\}'\Big]_0+\frac{2f^2\lambda_c}{1-\frac{\mu}{2M}}, \tag{I2}$$

которое устанавливает связь между длинами рассеяния мезонов в различных состояниях, вытекающую из дисперсионных соотношений. В дальнейшем обозначим $k^2J_\pm(\omega)$ через $F_\pm(\omega)$. Для рассеяния отрицательных мезонов на водороде, выражая $D_-(k)$ через амплитуды рассеяния в состояних с определенными значениями изотопического спина

$$3D_-(k) = 2D_1(k)+D_3(k),$$

аналогично получаем

$$\frac{\lambda_c}{3\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}\left\{\frac{\mu}{2M}(2a_1+a_3)-(2a_1^3+a_3^3)-(2P_1a_1^2+P_3a_3^2)+4a_{13}+2(a_{33}+a_{11})+a_{31}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^2(a_1-a_3)\right\} = F_-'\Big]_0-\frac{2f^2\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{2M}\right)} \tag{I3}$$

Для полусуммы (II) и (I2), представляющей рассеяние π^0-мезонов нуклонами, имеем

$$\frac{1}{3}\frac{\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}\left\{\frac{\mu}{2M}(a_1+2a_3)-(a_1^3+2a_3^3)-(P_1a_1^2+P_3a_3^2)+2(a_{13}+a_{31})+a_{11}+4a_{33}\right\} = \frac{F_+'+F_-'}{2}\Big]_0+\frac{\mu}{2M}\frac{2f^2\lambda_c}{\left[1-\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2\right]} \tag{I4}$$

Подстановка экспериментальных данных о фазах [4]:

$\alpha_3 = -(0{,}105 \pm 0{,}010)\eta_\beta \quad P_{33} = 0{,}6 \quad d_{33} = 0{,}0035$

$\alpha_1 = (0{,}165 \pm 0{,}012)\eta_\beta \quad Q_{33} = -0{,}8 \quad d_{35} = -0{,}0035$

$a_{33} = 0{,}235$

при $2f^2 = 0{,}16$ (и $2f^2 = 0{,}19 \pm 0{,}01$ [5']) и равных нулю других коэффициентах дает для $D'_\pm]_0$ и $F'_\pm]_0$ значения

$$D'_+]_0 = 0{,}40\lambda_c \; ; \quad D'_-]_0 = 0{,}14\lambda_c$$

и

$$F'_+]_0 = 0{,}28(0{,}25)\lambda_c \; , \quad F'_-]_0 = 0{,}24(0{,}27)\lambda_c \; ,$$

причем, вклад ненаблюдаемой области (-0,173 (0,206) и +0,149 (0,177) значителен. Для полусуммы же

$$\left.\frac{F'_+ + F'_-}{2}\right]_0 = 0{,}26\lambda_c$$

вклад слагаемого, содержащего f^2, составляет всего $-0{,}01\lambda_c$. Вычисление $F'_\pm]_0$ по данным о полных сечениях обсуждается в следующем разделе.

Для второй производной от (10) имеем

$$D''_+(k)]_0 = \lambda_c\left(1+\frac{\mu}{M}\right)\Big[2a_3^3(a_3+P_3)(a_3+2P_3) - 2a_3^2(Q_3 + a_3P_3^2) -$$

$$-3(a_{31}^2P_{31} + 2a_{33}^2P_{33}) + 2(2d_{33}+3d_{35})\Big] + \frac{\mu}{M}\frac{\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^3}\Big[2a_{33} + \qquad (15)$$

$$+ a_{31} - P_3a_3^2 - a_3^3\Big] - \frac{\mu}{4M}\frac{\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}\left[1+\frac{\mu}{M}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^2\right]a_3 \, ,$$

где длины рассеяния в состояниях $d_{3/2}$ и $d_{5/2}$ обозначены через d_{33} и d_{35}. С помощью (I0), (6) и (8) из значения второй производной от (I) при $\eta^2 = 0$ получаем вторую группу соотношений

$$D''_+(k)\Big]_0 - \frac{\lambda_c}{12}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)(a_1 - a_3) = F''_+\Big]_0 - \frac{2f^2\lambda_c}{\left(1-\frac{\mu}{2M}\right)^2} \tag{I6}$$

для $\pi^+ - p$ -рассеяния.

$$D''_-(k)\Big]_0 + \frac{\lambda_c}{12}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)(a_1 - a_3) = F''_-\Big]_0 + \frac{2f^2\lambda_c}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^2} \tag{I7}$$

для рассеяния отрицательных мезонов и

$$\frac{D''_+ + D''_-}{2}\Bigg]_0 = \frac{F''_+ + F''_-}{2}\Bigg]_0 - \frac{\mu}{M}\,\frac{2f^2\lambda_c}{\left[1-\left(\frac{\mu}{2M}\right)^2\right]} \tag{I8}$$

где $\mathcal{D}''_-$ построена аналогично (I5).

При использовании ранее приведенных данных о фазах имеем

$$\lambda_c^{-1} D''_+\Big]_0 = \left(1+\frac{\mu}{M}\right)\left[2a_3^5 - 6a_{33}^2 P_{33} + 2(2d_{33} - 3d_{35})\right] + \tag{I9}$$

$$+\frac{\mu/M}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^3}(2a_{33} - a_3^3) - \frac{\mu/4M}{(1+\mu/M)}\left[1+\frac{\mu}{M}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^2\right]a_3$$

$$3\lambda_c^{-1} D_-(k)''\Big]_0 = \left(1+\frac{\mu}{M}\right)\left[2(a_1^5 + a_3^5) - 6a_{33}^2 P_{33} + 4(2d_{13} + d_{33}) + \right. \tag{20}$$

$$\left. + 6(2d_{15} + d_{35})\right] + \frac{\mu}{M}\cdot\frac{2a_{33} - 2a_1^3 - a_3^3}{(1+\mu/M)^3} - \frac{\mu}{4M}\,\frac{\left[1+\frac{\mu}{M}\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^2\right](2a_1 + a_3)}{\left(1+\frac{\mu}{M}\right)}$$

Подстановка экспериментальных данных о фазах дает

$$D_+''\Big]_0 = -0{,}180\lambda_c ; \quad D_-''\Big]_0 = -0{,}052\lambda_c ; \quad \frac{D_+'' + D_-''}{2} = -0{,}116\lambda_c$$

$$F_+''\Big]_0 = -0{,}019\lambda_c \, (2f^2 = 0{,}16) ; \quad F_+''\Big]_0 = +0{,}016\lambda_c \, (2f^2 = 0{,}19)$$

$$F_-''\Big]_0 = -0{,}162\lambda_c \, (2f^2 = 0{,}16) ; \quad F_-''\Big]_0 = -0{,}187\lambda_c \, (2f^2 = 0{,}19)$$

$$\frac{F_+'' + F_-''}{2}\Big]_0 = -0{,}090\lambda_c \, (2f^2 = 0{,}16) ; \quad \frac{F_+'' + F_-''}{2}\Big]_0 = -0{,}085\lambda_c \, (2f^2 = 0{,}19)$$

причем, вклад ненаблюдаемой области оказывается очень существенным для первых двух значений и составляет около 35% для полусуммы. Значение второй производной от F_+ получается, в основном, как разность вклада резонанса и ненаблюдаемой области (вклад которой составляет +0,188 λ_c и 0,222 λ_c). Для рассеяния отрицательных мезонов из-за того, что роль резонансного перехода уменьшается, вклад ненаблюдаемой области, равный -0,138 λ_c и -0,161 λ_c, является определяющим.

2. В предыдущем разделе значения производных от $F_\pm$ были получены из экспериментальных данных о фазах. Те же величины могут быть вычислены прямо из (2) и экспериментальных данных о полных сечениях. Таким образом можно более глубоко проверить соответствие экспериментально определённых фаз с дисперсионными соотношениями. С другой стороны, если имеется несоответствие, на которое указали Пуппи и Штангелини, оно при таком анализе проявится наиболее ярко.

Получив $F_\pm$, значения производных можно вычислить непосредственным дифференцированием. Однако, дифференцирование кривой, вычисленной по экспериментальным данным, вносит большие ошибки, поэтому представим производную в другом виде. Для этого, интересуясь значениями производных при $\eta^2 \to 0$, разобьем дисперсионный интеграл $J_+(\omega)$ на три части.

$$4\pi^2 J_+(\omega) = P\int_\mu^z \frac{d\omega'}{k'}\,\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'-\omega} + \int_z^\infty \frac{d\omega'}{k'}\,\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'-\omega} + \int_\mu^\infty \frac{d\omega'}{k'}\,\frac{\sigma_-(\omega')}{\omega'+\omega}, \tag{21}$$

так что второй интеграл уже не содержит сингулярности ($z > \omega$). Выберем z таким, чтобы выражение для $\sigma_+(\omega)$ в ограничении s и p - волнами с помощью (3) можно было представить в виде

$$\sigma_+(\omega) \cong 4\pi\left\{a_3^2 + \frac{(a_{31}^2 + 2a_{33}^2)}{(1+\frac{\mu}{M})^4}\,k^4\right\} \tag{22}$$

Подставляя (22) в первый интеграл в (21), получим для него

$$\pi L(\omega) = (4\pi)^{-1} P\int_\mu^z \frac{d\omega'}{k'}\,\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'-\omega} = a_3^2\, J_\alpha(P) + \frac{(a_{31}^2 + 2a_{33}^2)}{(1+\frac{\mu}{M})^4}\, J_\beta(P), \tag{23}$$

где

$$J_\alpha(P) = -\frac{1}{P}\ln\left[1 + \frac{(\omega-\mu)(z+\mu) + P\sqrt{z^2-\mu^2}}{\mu(z-\omega)}\right]$$

$$\mu^4 J_\beta(P) = \frac{(z^2-\mu^2)^{3/2}}{3} + \frac{(z^2-\mu^2)^{1/2}}{2}(\omega z + P^2) + P^4 J_\alpha(P) - \mu\frac{(\mu^2-P^2)}{2}\ln\left[\frac{\sqrt{z^2-\mu^2}+z}{M}\right] \tag{23'}$$

При малых P^2

$$\mu^2 J_\alpha(P) = -\sqrt{z^2-\mu^2}\left\{\frac{1}{z'-1} + \frac{P^2}{6}\,\frac{z-z'}{(z'-1)^2} + \frac{P^4}{40}\,\frac{3z'^2-9z'+8}{(z'-1)^3} + \cdots\right\} \quad \left(z' = \frac{z}{\mu}\right) \tag{23''}$$

Так что (при $z = 1,43\,\mu$)

$$J_\alpha(0) = -\frac{\sqrt{z^2-\mu^2}}{\mu(z-\mu)} = -2,38\,\lambda_c$$

$$\mu^4 J_\beta(0) = \frac{(z^2-\mu^2)^{3/2}}{3} + \frac{\mu z (z^2-\mu^2)^{1/2}}{2} - \frac{\mu^3}{2}\ln\left[\frac{(z^2-\mu^2)^{1/2}+z}{\mu}\right] = 0,639\,\mu^3$$

и

$$J_+(\mu) = \frac{a_3^2}{\pi} J_\alpha(0) + \frac{(a_{31}^2 + 2a_{33}^2)}{\pi\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^4} J_\beta(0) + \frac{1}{4\pi^2}\int_z^\infty \frac{d\omega'}{k'}\,\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'-\mu} + \frac{1}{4\pi^2}\int_\mu^\infty \frac{d\omega'}{k'}\cdot\frac{\sigma_-(\omega')}{\omega'+\mu}. \tag{24}$$

Выражение для $J_-(\mu)$ получается из (24) заменой

$$\sigma_+ \rightleftarrows \sigma_-;\; 3a_3^2 \to a_3^2 + 2a_1^2;\; 3a_{33}^2 \to a_{33}^2 + 2a_{13}^2;\; 3a_{31}^2 \to a_{31}^2 + 2a_{11}^2 \tag{25}$$

Из (21) и (23) следуют выражения для дисперсионных интегралов, удобные при вычислениях в области энергий $\omega - \mu \ll \mu$. Прежде чем воспользоваться ими для вычисления значений произвольных при $\eta^2 \to 0$ сделаем некоторые замечания.

Во втором члене в (22) (вклад p - волн) переход от системы центра инерции к лабораторной системе произведен приближенно. Более точно, используя (4) вместе $J_\beta(p)/\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^4$ получаем

$$L_\beta(p) = \int_\mu^z \frac{d\omega'}{\omega'-\omega}\,\frac{k'^3}{\left(1+\frac{2\omega'}{M}+\frac{\mu^2}{M^2}\right)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{2\omega}{M}+\frac{\mu^2}{M^2}\right)^2}\int_{\mu-\omega}^{z-\omega} \frac{dx\sqrt{R^3}}{x(1+\gamma x)^2},$$

где

$$\gamma = \frac{2\mu}{M}\,\frac{1}{\left(1+\frac{2\omega}{M}+\frac{\mu^2}{M^2}\right)^2} \quad \text{и} \quad R = p^2 + 2\omega x + x^2$$

или

$$\left(1+\frac{2\omega}{M}+\frac{M^2}{M^2}\right)^2 L_\beta(P)=J_\beta(P)-\gamma\left\{\int\limits_{\mu-\omega}^{z-\omega}\left[\frac{1}{1+\gamma x}+\frac{1}{(1+\gamma x)^2}\right]\sqrt{R^3}\,dx\right\}=J_\beta-\gamma N_\beta \tag{26}$$

Приведем выражение для $N_\beta(P)$, получающееся при разложении знаменателей подинтегральных выражений до γ^2

$$N_\beta(P)=\left[\left(\frac{N^2}{2}-\frac{3}{4}\right)z\cdot N-\frac{3}{16}\ln(\omega+2z+N)\right]-3\gamma\left[\frac{N}{5}-z\left(\frac{\omega N^3}{4}-\frac{3}{8}N\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{3}{8}\ln(\omega+2z+N)\right]+4\gamma^2\left[\left(\frac{z-1}{6}-\frac{7\omega}{30}\right)N^\delta+\frac{(6\omega^2+1)}{6}\,z\left(\frac{N^3}{4}-\frac{3N}{8}\right)+\right. \tag{27}$$

$$\left.+\frac{(6\omega^2+1)}{16}\ln(\omega+2z+N)\right],$$

где $N=\sqrt{z^2-1}$ $(\mu=1)$. Последний член в (27) дает меньше 6,5% значения N_β при $P=0$. Само $\gamma N_\beta(0)=0{,}085$, что приводит к замене $J_\beta(0)=0{,}639$ на $L_\beta(0)=0{,}554$, т.е. вносит поправку около I5%. Учет лишь первого члена в (27) дает $L_\beta(0)\cong 0{,}530$, откуда ясно, что остальные члены дают <5%. Так как весь вклад от $J_\beta(0)$ не велик, то можно ограничиться (23'), привлекая для поправок первый член в (27).

Получим теперь выражения для производных от $F_\pm$.Для произвольных импульсов

$$F_+'(\omega)=J_+(\omega)+\eta^2 J_+'(\omega) \tag{28}$$

Из (2I), (23) и (27) видно, что

$$\eta^2 J_+'(\omega)\Big]_0=0 \tag{29}$$

Так как (28)' справедливо и для $\eta^2 J'_-$ получаем

$$F'_{\pm}(\omega)\Big]_0 = J_{\pm}(\mu) \tag{30}$$

Последнее равенство позволяет свести вычисление производной от F к значению дисперсионного интеграла в одной точке $\omega = \mu$. Значение производной вычисляются из (30), (23) и (24). При z =I,43 вклад первых двух членов в (23)' дает $-0,026/\pi$ для S -волны и $+\frac{0,035}{\pi}$ для P - волн, что составляет очень малую долю от значения $F'_+\Big]_0 = 0,28\ (0,25)\ \lambda_c$, полученного в предыдущем разделе.

Для взаимодействия отрицательных мезонов в протонами аналогично, имеем вместо (24)

$$J_-(\mu) = \frac{(a_3^2 + 2a_4^2)}{3\pi} J_\alpha(0) + \frac{a_{31}^2 + 2a_{11}^2 + 2a_{13}^2 + a_{33}^2}{3\pi\left(1+\frac{\mu}{M}\right)^4} L_\beta(0) + \frac{1}{4\pi^2}\int_z^\infty \frac{d\omega'}{k'}\frac{\sigma_-(\omega')}{\omega'-\mu} + \frac{1}{4\pi^2}\int_\mu^\infty \frac{d\omega'}{k'}\frac{\sigma_+(\omega')}{\omega'+\mu} \tag{3I}$$

Для вклада первых двух слагаемых в (3I) получаем

$$\pi L_- = -0,051 + 0,012 = -0,039$$

Здесь также вклад S и P - волн, сравнимый между собой, оказывается при z =I,43 мизерным по сравнению с вкладом интегральных слагаемых в (3I), если ориентироваться на результаты предыдущего раздела. Для второй производной от F при произвольных импульсах находим

$$F''(\omega)\Big]_0 = 2J'(\mu) + \eta^2 J''(\omega)$$

При $\eta^2 \longrightarrow 0$ второе слагаемое исчезает, так что .

$$F''(\omega)\Big]_0 = 2J'(\mu) \tag{32}$$

Разбивая $J'_{+0}(\omega)$ на части, аналогично (21), из (23) получаем для вклада S и P - волн

$$\pi L'_+(\mu) = -a_3^2\frac{N(2-z)}{6(z-1)^2} + \frac{a_{31}^2+2a_{33}^2}{\pi(1+\frac{\mu}{M})^4}\left\{\frac{N}{2}\left(1+\frac{z}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln(N+z)\right\} \tag{33}$$

и

$$J'_+(\mu) = L'_+(\mu) + \frac{1}{4\pi^2}\int_z^\infty \frac{d\omega'}{k'}\frac{\sigma_+(\omega')}{(\omega'-\mu)^2} - \frac{1}{4\pi^2}\int_\mu^\infty \frac{d\omega'}{k'}\frac{\sigma_-(\omega')}{(\omega'+\mu)^2} \tag{34}$$

Вклад внеинтегральных слагаемых составляет $+0{,}002\,\lambda_c$.
Выражение для $J'_-(\mu)$ (получается из (34) заменой (25). Вклад внеинтегральных слагаемых для $\pi^- p$ составляет $-0{,}002\,\lambda_c$

3. Численные значения дисперсионных интегралов составляют

$$J_+(\mu) = \frac{6{,}96}{4\pi^2} = 0{,}176$$

$$J_-(\mu) = \frac{4{,}99}{4\pi^2} = 0{,}126 \tag{35}$$

Сравнение (35) и (30) с ранее полученными значениями 0,28 (0,25) и 0,24 (0,27) позволяет еще раз подтверждать положительный знак a_{33}. Более того, из (35) и (12) следует, что a_{31} является отрицательной величиной, причем

$$a_{31} = -0{,}115,\ (2f^2=0{,}16),\ D'_+\Big]_0 = 0{,}258\,\lambda_c;\quad a_{31} = -0{,}080,\ (2f^2=0{,}19),\ D'_+\Big]_0 = 0{,}320\,\lambda_c. \tag{36}$$

Из (35) и (13) в качестве следствия дисперсионных соотношений следует, что

$$D'_-]_0 = 0{,}026\,\lambda_c \quad (2f^2 = 0{,}16) \qquad D'_-]_0 = -0{,}00(4)\,\lambda_c \quad (2f^2 = 0{,}19)$$

$$2a_{13} + a_{11} = -0{,}139 \qquad 2a_{13} + a_{11} = -0{,}208 \tag{37}$$

В предположении, $a_{13} = a_{31}$ из (37) вытекает, что

$$a_{11} = 0{,}09\,(2f^2 = 0{,}16)\,, \qquad a_{11} = -0{,}05\,(2f^2 = 0{,}19) \tag{38}$$

Надо подчеркнуть, что ошибки в численных значениях a_{31} и a_{11} определить трудно. Хотя представление о малой и отрицательной длине рассеяния a_{31} и малой a_{11} грубо соответствует экспериментальным данным о $\pi - N$ -рассеянии, значение $D'_-]_0$ заметно не соответствует экспериментальным данным.

Для значений производных от дисперсионных интегралов в результате численного интегрирования получаем

$$2J'_+(\mu) = 0{,}08\,\lambda_c \tag{39}$$

$$2J'_-(\mu) = 0{,}04\,\lambda_c \tag{39'}$$

Получение следствий, аналогичных (36)-(38), в настоящее время затруднительно, так как для этого требуются более точные данные.

Таким образом, проведенный анализ, использовавший сведения о фазах рассеяния лишь при малых энергиях подтверждает результат Пуппи-Штангеллини. В то время как для рассеяния π^+-мезонов протонами дисперсионные соотношения позволяют из данных о a_1, a_3 и a_{33} определить a_{31} в соответствии с экспериментальными данными, следствия дисперсионных соотношений для $\pi^- - p$ -рассеяния не совместимы с экспериментом. Само несоответствие при малых энергиях не так велико, как при более высоких. Строго говоря, неясно, насколько оно выходит за рамки обычных ошибок.

Причины несоответствия остаются неясными. Всякого рода изотопически неинвариантные поправки невелики. В связи с значительной ролью изотопической инвариантности при получении окончательного вида дисперсионных соотношений, возможность дополнительной проверки изотопической инвариантности в рассеянии обсуждается в приложении.

В создавшемся положении становится очень желательным проведение дополнительных экспериментов, а также более точной обработки экспериментальных данных. Особенно ценными могут быть эксперименты по изучению поляризации нуклонов отдачи, а также интерференции ядерного рассеяния с кулоновским. Не исключена переоценка точности как экспериментальных данных, так и вычислений дисперсионных интегралов.

Автор признателен Я.А.Смородинскому, Н.Н.Боголюбову, Н.П.Клепикову, А.А.Логунову, Д.В.Ширкову за полезные обсуждения и И.В.Поповой за помощь в численных расчетах.

П р и л о ж е н и е.

Условие унитарности S-матрицы вместе с инвариантностью при изменении знака времени, как известно, значительно уменьшает число независимых параметров, входящих в S матрицу. Недавно было показано [6], каким образом эти условия позволяют восстановить амплитуду рассеяния в случае, когда имеет место лишь упругое рассеяние, не сопровождаемое неупругими процессами.

Рассмотрим теперь условия унитарности для $\pi^- p$-рассеяния, когда параллельно с упругим рассеянием идет неупругий процесс-превращение заряженного мезона в нейтральный, и покажем каким образом они могут помочь при проверке изотопической инвариантности.

Введем элементы S-матрицы $S_{ik}^{J,\ell} = \rho_{ik}^{J,\ell} e^{2i\alpha_{ik}^{J,\ell}}$ (α_{ik} и ρ - действительные числа) для каждого состояния, характеризуемого моментом J и $\ell = J \pm 1/2$ (индексы J, ℓ в дальнейшем опускаются). S_{11} - соответствует упругому рассеянию π^--мезона протоном $\pi^- + p \longrightarrow \pi^-$; $S_{12} = S_{21}$ - обменному рассеянию $\pi^- + p \rightleftarrows \pi^0$, а S_{22} - упругому рассеянию $\pi^0 + n \longrightarrow \pi^0$.

Условие унитарности, записанное в виде

$$\sum_k S_{ik}^* S_{\ell k} = \delta_{i\ell} \tag{A.1}$$

дает, как легко видеть, три независимых условия

$$|S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \tag{A.2}$$

$$|S_{22}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 \tag{A.3}$$

$$S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} = 0 \tag{A.4}$$

Для $\pi^+ - p$ - рассеяния вместо (2)-(3) из (I) вытекает одно условие, дающее возможность ввести действительные фазы.

Из (2) и (3) получаем соотношения между модулями

$$|S_{11}|^2 = |S_{22}|^2 = \rho_{11}^2 = \rho_{22}^2 = \rho^2; \quad |S_{12}|^2 = \rho_{12}^2 = 1 - \rho^2, \tag{A.5}$$

а из (4) и (5) - связь между фазами.

$$4\alpha_{12} = 2(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + n\pi \tag{A.6}$$

Следовательно, в этом случае амплитуды трех процессов, включающих как упругое, так и неупругое рассеяние, в силу трех соотношений (2)-(4) могут быть выражены через три действительных числа, которые необходимо определить из опыта.

Заметим, что при переходе к большему числу каналов соотношение (6) остается как приближенное, если вероятности переходов между каналами малы по сравнению с переходами внутри каналов [7].

Соотношениям (5) и (6) можно придать другой вид. Ситуация здесь напоминает ту, с которой встречаются, когда при рассеянии нуклонов нуклонами, рассматривая переходы ${}^3P_2 \to {}^3P_2$, ${}^3F_2 \to {}^3F_2$, ${}^3P_2 \rightleftarrows {}^3F_2$, вводят действительные фазы и коэффициенты смешивания [8]. В соответствии с этим введем две действительные фазы δ_J^{I} и δ_J^{II} и параметр смешивания ε_J, причем

$$S_{11}^{Je} = \exp[2i\delta_J^{I}]\cos^2\varepsilon_J + \exp[2i\delta_J^{II}]\sin^2\varepsilon_J$$

$$2S_{12}^{Je} = \{\exp[2i\delta_J^{I}] - \exp[2i\delta_J^{II}]\}\sin 2\varepsilon_J \tag{A.7}$$

$$S_{22}^{Je} = \exp[2i\delta_J^{I}]\sin^2\varepsilon_J + \exp[2i\delta_J^{II}]\cos^2\varepsilon_J$$

(в отличие от случая $N-N$ рассеяния, здесь как $\delta_J^{I,II}$, так и ε_J зависят кроме J от ℓ, а ε_J не выпадают из выражений для проинтегрированных сечений). Связь между величинами $\rho, \alpha_{11}, \alpha_{22}$ и $\delta_J^I, \delta_J^{II}, \varepsilon_J$ следует из (5), (6) и (7). Так выражаются элементы S - матрицы в точной формулировке, когда не предполагается существования изотопической инвариантности. При справедливости последней, как известно,

$$3S_{11}^{J\ell} = 2b_1 + b_3; \quad 3S_{12}^{J\ell} = \sqrt{2}(b_3 - b_1); \quad 3S_{22}^{J\ell} = b_1 + 2b_3 \tag{A.8}$$

($b_{2T}^{J\ell} = \exp\left[2i\delta_{2T}^{J\ell}\right]$ - характеризует рассеяние в состоянии с заданными J и изотопическим спином T). Из сравнения (8) с (7) видно, что изотопическая инвариантность соответствует тому случаю, когда ε_J, не завися от J и ℓ (остается два действительных параметра), принимает постоянное значение, равное $\operatorname{arctg}\sqrt{2} \cong 55^\circ$, если δ_J^I соответствует δ_3, а $\delta_J^{II} = \delta_1$.

Проверка последних утверждений (независимость величины ε_J от J и ℓ и определенное ее значение) дает возможность проверки изотопической инвариантности в процессе рассения заряженных мезонов. Могло показаться, что так как в соотношение Гайтлера

$$d\sigma(\pi^+ + p \to \pi^+) + d\sigma(\pi^- + p \to \pi^-) = 2d\sigma(\pi^0 + p \to \pi^0) + d\sigma(\pi^- + p \to \pi^0)$$

входит сечение упругого рассеяния π^0 мезона, то $\pi - N$ рассеяние нельзя использовать для проверки изотопической инвариантности, Ферми указал[7], что, по крайней мере, при учете, лишь S и P волн такую проверку можно провести в экспериментах с заряженными мезонами. Из результатов настоящего приложения следует, что это может быть проведено при учете любого числа состояний. Предлагаемая здесь проверка идет дальше. Она позволяет проследить, с какой точностью выполняется изотопическая инвариантность в каждом состоянии π-N системы.

Отметим обобщение неоднозначности Минами [9,10] на этот случай, когда параллельно с упругим идет неупругий процесс. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что неполяризованные сечения рассмотренных процессов остаются неизменными если провести одновременную замену

$$\delta^{I,\,II}_{J,\,J-1/2} \rightleftarrows \delta^{I,\,II}_{J,\,J+1/2} \; ; \quad \varepsilon^{J}_{J-1/2} \rightleftarrows \varepsilon^{J}_{J+1/2} \,.$$

1. F.E. Low Phys. Rev., 87, 1392, 1955.
G.C. Wick Rev. Mod. Phys., 27, 339, 1955.
G.F. Chew and F.E. Low Phys. Rev. 101, 1570, 1956.

L. Castillejo, R.H. Dalitz, and F.Y. Dyson Phys.Rev.,101, 453, 1956.
F.Y. Dyson Phys. Rev., 106, 157, 1957.
2. M.L. Goldberger Phys. Rev. 99, 508, 1955.
M.L. Goldberger, H. Mizawa, and R. Oehme Phys. Rev., 99, 986, 1955.

Б.Л.Иоффе ЖЭТФ, 31, 583, 1956.

Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений" ГТИ (в печати).

3. Л.Ландау и Я.Смородинский ЖЭТФ, 14, 269, 1944.

H. Bethe Phys. Rev., 76, 38, 1949.
4. T. Orear Phys. Rev., 96, 176, 1954.

А.И.Мухин, Б.М.Понтекорво ЖЭТФ, 31, 550, 1956.

5. G. Puppi and A.Stanghellini Nuovo Cimento, 5, 1303, 1957.
6. Л.Пузиков, Р.Рындин, Я.Смородинский, ЖЭТФ, 32, 592,1957.
7. См. например , Suppl. Nuovo Cimento, 2, 17, 1955.
8. T.M. Blatt and L.C. Bidenharn Rev. Mod. Phys., 24, 282, 1952.
9. S. Minami Prog. Theor. Phys., 11, 213, 1954.
10. Р.Рындин, Я.Смородинский ДАН СССР, 103, 69, 1955.