ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

О.А. Хрусталев

Р - 1126

ОБ ИНФРАКРАСНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ

Дубна 1962 г.

О.А. Хрусталев

Р - 1126

ОБ ИНФРАКРАСНЫХ ОСОБЕННОСТЯХ

Дубна 1962 г.

А н н о т а ц и я

Показано, что "инфракрасная катастрофа" не возникает при рассмотрении электромагнитного поля в диагональном по фазе представлении.

O.A.Khrustalev

ON INFRARED SINGULARITIES

Abstract

It is shown that in considering the electromagnetic field in the phase diagonal representation the "infrared catastrophe" does not appear.

Вероятность излучения фотона, если считать ее по теории возмущений, логарифмически расходится при стремлении частоты фотона к нулю – это известная "инфракрасная катастрофа".

С другой стороны, Блох и Нордсик[1] на модельном примере показали, что точное сечение процесса с излучением конечного числа фотонов равно нулю, т.е. во всех электродинамических процессах излучается бесконечное число мягких γ -квантов, что полностью соответствует полуклассическим представлениям.

При более тщательном исследовании проблемы оказалось, что и обнуление сечения и стремление его к бесконечности – почти одно и то же: в области малых энергий теория возмущений неприменима, а суммирование некоторого ряда диаграмм приводит к изменению электронной функции Грина[2].

$$\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2} \to \frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2}\left(\frac{m}{p^2-m^2}\right)^{\frac{e^2}{2\pi}(3-d_\ell(0))} . \qquad /1/$$

В лоренцовой калибровке степень полюса точной функции Грина выше степени полюса причинной функции Грина, что и приводит к обнулению сечений для процессов с любым конечным числом фотонов. Ввиду градиентной инвариантности теории это справедливо для любой калибровки.

Факт изменения степени полюса функции Грина можно считать /так это обычно и трактуется/ проявлением взаимодействия классического тока /эффект не зависит от спина частицы/ с электромагнитным полем при равномерном движении. Естественней предположить, что "инфракрасная катастрофа" связана с незаконной попыткой работать в диагональном по числу фотонов представлении даже в области бесконечно малых частот. Действительно, если конечное состояние каждой реакции, включающей электромагнитное взаимодействие, есть состояние с неопределенным числом мягких γ -квантов, то нельзя приготовить и начального состояния, которое было бы n -фотонным состоянием. В большинстве случаев эти фотоны несущественны и ими можно пренебречь, но если мы интересуемся инфракрасной областью, этого сделать нельзя. Другой вопрос: как отличить "начальный" фотон от "конечного", если его длина волны становится неопределенно большой ?

Попробуем более последовательно, чем это делалось /см., например[3]/, рассмотреть электромагнитное поле в представлении с диагональной фазой.

В кулоновской калибровке $A_\nu = (0, \vec{A})$,

$$\vec{A} = \sum_\lambda \frac{1}{\sqrt{2\omega_\lambda}} \{\sqrt{1+n_\lambda}\, e^{i\phi_\lambda} \vec{A}_\lambda + e^{-i\phi_\lambda}\sqrt{1+n_\lambda}\, \vec{A}^*_\lambda\} , \qquad /2/$$

где ϕ_λ -некоторые функции времени, а

$$n_\lambda = i\,\frac{\delta}{\delta\phi_\lambda} - \qquad /3/$$

оператор числа частиц[x/].

Рассмотрим электрон, взаимодействующий с электромагнитным полем. В интересующем нас приближении электрон можно считать нерелятивистским и бесспиновым. Отбрасывая в уравнении Шредингера квадратичные по $\vec{A}$ члены, получим

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^{\,2} - \frac{e}{m}\vec{A}\hat{\vec{p}}\right)\psi\,. \qquad /4/$$

Можно представить ψ в виде

$$\psi = \psi_o\,\Psi\,, \qquad /5/$$

где ψ_o –решение уравнения

$$i\,\frac{\partial\psi_o}{\partial t} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^{\,2}\,\psi_o\,. \qquad /6/$$

а Ψ –функционал от ϕ_λ, удовлетворяющий уравнению

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{e}{m}(Ap)\,\Psi, \qquad /7/$$

$\vec{p}$ –собственное значение импульса электрона в состоянии ψ_o. Используя /2/, получим

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\sum\frac{1}{\sqrt{2\omega_\lambda}}\left\{\rho_\lambda\sqrt{1+n_\lambda}\,e^{i\phi_\lambda} + \rho_\lambda^* e^{-i\phi_\lambda}\sqrt{1+n_\lambda}\right\}, \qquad /8/$$

$$\rho_\lambda = \frac{e}{m}(\vec{A}_\lambda\vec{p}).$$

Ψ можно искать в виде разложения

$$\Psi = \sum_\nu c_\nu\,e^{-i\phi_\nu}, \qquad /9/$$

которое в случае свободного поля $(\phi_\nu = \omega_\nu t)$ переходит в обычный ряд Фурье. В общем виде уравнение /8/ трудно решаемо. Представим, однако, что мы разбили гамильтониан взаимодействия электрона с электромагнитным полем на две части, соответствующие взаимодействию с "мягкими" и "жестким" фотонами $(\omega_\lambda \gtrless \epsilon)$. "Жесткие" фотоны будем описывать в представлении чисел заполнения, а мягкие – в представлении с диагональной фазой. Тогда в разложении /9/ можно ограничиться одной гармоникой и так как

$$f(n_\lambda)\,e^{-i\phi_\lambda} = f(1)\,e^{-i\phi_\lambda}\,,$$

то уравнение /8/ перейдет в

$$i\,\frac{\partial\Psi}{\partial t} = F(\epsilon, t)\,\Psi\,. \qquad /10/$$

[x/] Мы вводим оператор n_λ всегда в виде $\sqrt{1+n_\lambda}$, избегая выражений вида $\sqrt{n_\lambda}$, чтобы обойти трудности, связанные с особенностями в нуле.

$F(\epsilon,t)$-функция времени, получаемая при подстановке в правую часть /8/ в качестве ϕ_λ их выражений для свободного электромагнитного поля $\phi_\lambda = \omega_\lambda t$ /такая замена естественна в инфракрасной области/, суммирование по λ ограничивается областью частот $\omega_\lambda < \epsilon$. Решение этого уравнения $\Psi(\epsilon,t)$ при $\epsilon \to 0$ стремится к единице.

Таким образом, "функция Грина" системы "электрон + электромагнитное поле с постоянной фазой мягких фотонов" не содержит инфракрасных особенностей.

Чтобы лучше уяснить смысл полученного, проделаем над гамильтонианом, соответствующим /4/, преобразования, аналогичные использованным в методе Блоха-Нордсика; если

$$H = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^{\,2} + H_{\text{фот.}} - \frac{e}{m}\vec{A}\vec{p}\,, \qquad /11/$$

то после подстановки в уравнение Шредингера

$$\psi = \psi_0 u$$

где

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \frac{1}{2m}\hat{\vec{p}}^{\,2}\psi_0\,,$$

получим

$$\hat{p}^2\psi = \hat{\vec{p}}^{\,2}\psi_0 u + 2\hat{\vec{p}}\psi_0 p u + \psi_0\hat{\vec{p}}^{\,2} u$$

считая, что $\hat{\vec{p}}\psi_0 = \vec{p}\psi_0$ и отбрасывая член $\hat{\vec{p}}^{\,2}u$, приходим к уравнению

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = (\vec{v}\hat{\vec{p}})u - e(\vec{A}\vec{v})u - \frac{e}{m}(\vec{A}\hat{\vec{p}})u + H_{\text{фот.}}u\,, \qquad /12/$$

что соответствует гамильтониану

$$H = (\vec{v}\hat{\vec{p}}) - e(\vec{A}\vec{v}) - \frac{e}{m}(\vec{A}\hat{\vec{p}}) + H_{\text{фот.}}, \qquad /13/$$

где $\vec{v} - c$ -число-скорость электрона.

Выписывая выражения $\vec{A}$ и $H_{\text{фот.}}$ в терминах операторов излучения и поглощения, получим:

$$H = \vec{v}\hat{\vec{p}} - \sum_{s\lambda}(\vec{\epsilon}_{s\lambda}\vec{v})(e^{i\vec{k}_\lambda\vec{r}}\, a_{s\lambda} + a^+_{s\lambda}e^{-ik_\lambda r}) + \sum_{s\lambda}\omega_\lambda a^+_{s\lambda}\, e^{-ik_\lambda r}e^{ik_\lambda r}\, a_{s\lambda}$$

$$- \sum_{s\lambda}(e^{i\vec{k}_\lambda\vec{r}}\, a_{s\lambda} + a^+_{s\lambda}\, e^{-i\vec{k}_\lambda\vec{r}})(\vec{\epsilon}_{s\lambda}\frac{\hat{\vec{p}}}{m}), \qquad /14/$$

$$\vec{\epsilon}_{s\lambda} = e(2\omega_\lambda)^{-1/2}\vec{e}_{s\lambda}\,.$$

Применяя последовательно канонические преобразования, определяемые матрицами

$$S_1 = \exp(i\sum_{s\lambda}(\vec{k}_\lambda\vec{r})a^+_{s\lambda}a_{s\lambda}), \qquad /15/$$

$$S_2 = \exp(\sum_{s\lambda} b_{s\lambda}(a_{s\lambda} - a^+_{s\lambda})),$$

где

$$b_{s\lambda} = \frac{(\vec{v}\vec{\epsilon}_{s\lambda})}{\omega_\lambda - (\vec{v}\vec{k}_\lambda)} \quad , \qquad /16/$$

и отбрасывая в конечном выражении члены, содержащие $\vec{\rho}$ /это соответствует предположению о том, что Ψ в /5/ есть функционал только от функций ϕ_λ / и члены, содержащие выражения вида $a_{s\lambda}\, a_{s'\lambda}$, получим в результате

$$\tilde{H} = \sum_{s\lambda} \omega_\lambda\, a^+_{s\lambda} a_{s\lambda} - \sum_{s\lambda} \frac{(\vec{v}\vec{\epsilon}_{s\lambda})^2}{\omega_\lambda - (\vec{v}\vec{k}_\lambda)} \quad . \qquad /17/$$

Выразив собственные функции $\tilde{H}$ через фазы ϕ_λ и проделав обратные к S_2 и S_1 преобразования, найдем, что преобразованные собственные функции имеют вид разложения /9/.

Автор признателен Н.Н. Боголюбову, А.А. Логунову, Я.А. Смородинскому, Л.Д.Соловьеву за обсуждения.

Литература

1. F.Bloch, A.Nordsieck, Phys. Rev. 52, 54 (1937).
2. В.З. Бланк. ДАН СССР, 104, 706 /1955/.
   А.А. Логунов. ЖЭТФ, 29, 871 /1955/.
   А.А. Абрикосов, ЖЭТФ, 30, 87 /1956/.
   А.П. Горьков. ЖЭТФ, 30, 790 /1956/.
3. P.A.M.Dirac., Proc. Roy .Soc. London A114, 243 (1927).
   В. Гайтлер. Квантовая теория излучения, ИИЛ, Москва, 1956 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 ноября 1962 г.