ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория высоких энергий

А.Б. Шварцбург

Р - 1121

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОР В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Дубна 1962 г.

А.Б. Шварцбург

Р - 1121

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОР В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Дубна 1962 г.

Аннотация

Рассматривается электростатическая задача для тонких диэлектрических и металлических колец во внешнем поле в случаях радиально-симметричного и однородного полей. Находятся приобретаемые кольцами в таких полях дипольный и квадрупольный моменты.

A.B.Schwartzburg

DIELECTRIC TORUS IN ELECTRIC FIELD

Abstract

An electrostatic problem for thin dielectric and conducting rings in the external field is considered in the cases of axial-symmetrical and homogeneous fields. Dipole and quadrupole moments acquired by the rings in these fields are found.

1. Радиально-симметричное поле

Будем рассматривать диэлектрический тор, внесенный в поле заряженного цилиндра так, что ось симметрии тора совпадает с осью цилиндра, которую примем за ось z. Пусть R и r –соответственно большой и малый радиусы тора, ϵ –диэлектрическая постоянная вещества тора; q – заряд единицы длины цилиндра, a – его радиус, причём $a \ll R$. Если длина цилиндра значительно больше его радиуса, и диэлектрическая постоянная среды равна 1, то в отсутствие тора потенциал поля цилиндра на расстоянии ρ от оси z равен Ψ_0.

$$\Psi_0 = 2q\ln\rho \,. \tag{1}$$

Введем тороидальную систему координат: α, β, ϕ. Тогда

$$\rho = \frac{c\,sh\,\alpha}{ch\,\alpha - \cos\beta}\;; \quad x = \frac{c\,sh\,\alpha\cos\phi}{ch\,\alpha - \cos\beta}\;; \tag{2}$$

$$y = \frac{c\,sh\,\alpha\sin\phi}{ch\,\alpha - \cos\beta}\;; \quad z = \frac{c\sin\beta}{ch\,\alpha - \cos\beta}\;;$$

где

$$c = \sqrt{R^2 - r^2}\;; \quad ch\,\alpha = \frac{R}{r}\,. \tag{3}$$

Уравнение поверхности тора: $\alpha = \alpha_0$.

Потенциал Ψ_0 в новых координатах:

$$\Psi_0 = 2q\ln\frac{c\,sh\,\alpha}{ch\,\alpha - \cos\beta}\,, \tag{4}$$

Для определения потенциала поля Ψ после внесения тора ищем решение уравнения Лапласа, записанного в тороидальных координатах:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{sh\,\alpha}{ch\,\alpha - \cos\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{sh\,\alpha}{ch\,\alpha - \cos\beta}\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{sh\,\alpha\,(ch\,\alpha - \cos\beta)}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = 0\,, \tag{5}$$

Если потенциал внутри тора Ψ_1, а снаружи Ψ_2, то граничные условия непрерывности потенциала и нормальных составляющих индукции требуют, чтобы:

$$\Psi_1 = \Psi_2\,\big|_{\alpha = \alpha_0}\;; \tag{6}$$

$$\epsilon\frac{\partial\Psi_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial\alpha}\,\Big|_{\alpha=\alpha_0}\,. \tag{7}$$

Будем рассматривать торы в виде тонких колец, у которых

$$\frac{R}{r} = ch\,\alpha \gg 1\,, \tag{8}$$

Это условие в сочетании с тем, что $R \gg a$, дает возможность пренебречь изменением q при внесении тора в поле цилиндра. Учитывая симметрию задачи относительно плоскости $z = 0$ и независимость Ψ от угла ϕ, ищем решения (5) в виде выражений, конечных вместе с первой производной при $\alpha \to \infty$

$$\Psi_1 = -\sqrt{ch\,\alpha - \cos\beta}\sum_{n=0}^{\infty} A_n Q_{n-1/2}(\alpha)\cos n\beta\;; \tag{9}$$

$$\Psi_2 = \Psi_0 + \sqrt{ch\,\alpha - \cos\beta}\sum_{n=0}^{\infty} B_n P_{n-1/2}(\alpha)\cos n\beta ; \tag{10}$$

где $P_{n-1/2}(\alpha)$ и $Q_{n-1/2}(\alpha)$ — тороидальные функции индекса $n - 1/2$ и, соответственно, первого и второго рода. Имея в виду (8) и учитывая, что при больших α /3/

$$Q_{n-1/2}(\alpha) \approx e^{-(n+1/2)\alpha}, \tag{11}$$

можно в рядах (9) и (10) удержать лишь первые члены. Используя значения $P_{n-1/2}(\alpha)$ и $Q_{n-1/2}(\alpha)$ при больших α /3/, подставляя после этого (9) и (10) в (6) и (7) и интегрируя по β от 0 до π, найдем из полученной системы уравнений для A_0 и B_0 :

$$A_0 = \frac{\pi q\sqrt{2}\,\ell n\, c}{\epsilon - 1} ; \quad B_0 = -\frac{\epsilon}{\epsilon - 1}\,\frac{\pi q\sqrt{2}\,\ell n\, c}{2} . \tag{12}$$

Положим формально в (12) $\epsilon = \infty$, что соответствует проводящему кольцу. На поверхности такого кольца наведутся заряды, поверхностная плотность которых σ равна:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} = \frac{\sqrt{2}q\ell n\, c}{4\pi c}\sqrt{ch\,\alpha_0 - \cos\beta}\,(\cos\beta - e^{\alpha_0})\,e^{-\frac{\alpha_0}{2}} . \tag{13}$$

Так как центр индуцированных на проводящем кольце положительных зарядов совпадает с центром отрицательных, то его дипольный момент в таком поле равен 0, а поэтому его квадрупольный момент не зависит от выбора начала координат. Из симметрии зарядов относительно оси z следует, что она является одной из главных осей тензора квадрупольного момента. Положение двух других осей произвольно, и компоненты D_{xx} и D_{yy} определяются через D_{zz} /1/

$$D_{xx} = D_{yy} = -1/2\, D_{zz} . \tag{14}$$

Компоненту D_{zz} вычисляем, имея в виду (2) и (3) и учитывая, что для тонких колец с точностью до $e^{-2\alpha}$ $c = R$.

$$D_{zz} = \iint_{\alpha_0} \sigma\,(2z^2 - \rho^2)\,dS = -\,12\pi q R^3 \ell n R \cdot e^{-2\alpha_0} ;$$

или, вводя об"ем кольца V, имеем окончательно:

$$D_{zz} = -\frac{3}{2\pi}\, V\,\ell n\, R , \tag{16}$$

2. Однородное электрическое поле

Пусть вышеописанный тонкий диэлектрический тор внесен в однородное электрическое поле E, направление которого примем за ось x, так, что ось x перпендикулярна оси тора.

Отсчитывая угол ϕ от направления поля и выбирая начало координат в центре тора, запишем потенциал однородного поля

$$\Psi_0 = -\frac{E\,c\,sh\,\alpha\cos\phi}{ch\,\alpha - \cos\beta} . \tag{17}$$

Определяя изменение потенциала, вызванное внесением тора, ищем решение уравнения (5) внутри тора в виде:

$$\Psi_2 = \Psi_0 + \sqrt{ch\,\alpha - \cos\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} P^{m}_{n-1/2}(\alpha)\cos n\beta\cos m\phi ; \tag{19}$$

где $P^{m}_{n-1/2}(a)$ и $Q^{m}_{n-1/2}(a)$ – тороидальные функции индекса $n-1/2$ порядка m и, соответственно, первого и второго рода. Из условия (6) следует, что из всех коэффициэнтов A_{nm} и B_{nm} отличны от 0 лишь A_{n1} и B_{n1}, которые в дальнейшем обозначим как A_n и B_n. Используя (6) и (7), запишем (18) и (19) в виде:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} A_n Q^{1}_{n-1/2}(a_0)\cos n\beta = -\frac{E c\, sh a_0}{(ch a_0-\cos\beta)^{3/2}} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n P^{1}_{n-1/2}(a_0)\cos n\beta\ ; \tag{20}$$

$$-\epsilon\sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\frac{sh a_0 Q^{1}_{n-1/2}(a_0)}{2\sqrt{ch a_0-\cos\beta}} + \sqrt{ch a_0-\cos\beta}\,\frac{\partial Q^{1}_{n-1/2}(a_0)}{\partial a}\right]\cos n\beta =$$

$$= -\frac{Ec(1-ch a_0\cos\beta)}{(ch a_0-\cos\beta)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n\left[\frac{sh a_0 P^{1}_{n-1/2}(a_0)}{2\sqrt{ch a_0-\cos\beta}} + \sqrt{ch a-\cos\beta}\,\frac{\partial P^{1}_{n-1/2}(a_0)}{\partial a}\right]\cos n\beta, \tag{21}$$

Имея в виду тонкие кольца, используем (8) и подставляя выражения для $Q^{1}_{n-1/2}(a)$ и $P^{1}_{n-1/2}(a)$ при больших a, интегрируем равенства (20) и (21) по β от 0 до π. Используя интегральное представление функции $Q_{n-1/2}(a)$ /2/

$$Q_{n-1/2}(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\frac{\cos n\beta\, d\beta}{\sqrt{ch a-\cos\beta}}\ , \tag{22}$$

найдем из полученной системы уравнений для A_0 и B_0

$$A_0 = \frac{4\sqrt{2}\,Ec}{\pi(\epsilon-2)}\ ;\quad B_0 = \frac{\epsilon}{\epsilon-2}\pi\sqrt{2}\,Ec\ . \tag{23}$$

Найдем теперь компоненту P_x дипольного момента тонкого диэлектрического кольца, внесенного в поле вышеописанным способом. При этом по симметрии задачи $P_y=0$ и $P_z=0$. Тогда

$$dP_x = \frac{\epsilon-1}{4\pi}E_x(a,\beta,\phi)\,dV\ . \tag{24}$$

Рассматривая в каждой точке тора проекции криволинейных составляющих градиента потенциала на ось x, получим:

$$-E(a,\beta,\phi) = \frac{1}{Ha}\frac{\partial\Psi_1}{\partial a}\cdot\frac{dx}{H_a da} + \frac{1}{H\beta}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\beta}\cdot\frac{dx}{H_\beta d\beta} + \frac{1}{H_\phi}\frac{\partial\Psi_1}{\partial\phi}\frac{dx}{H_\phi d\phi}\ . \tag{25}$$

Подставляя (25) в (24), интегрируем по объему кольца и, опуская члены высших порядков по e^{-a}, найдем:

$$P_x = \frac{\epsilon-1}{2\sqrt{2}}A_0\pi^2c^2e^{-2a_0}.$$

Учитывая A_0 и (23) и вводя объем тонкого кольца V получим окончательно

$$P = \frac{\epsilon-1}{\epsilon-2}\,\frac{1}{4\pi}VE\ . \tag{26}$$

Положим здесь $\epsilon=\infty$; при этом P_x будет представлять собой дипольный момент тонкого проводящего кольца, внесенного в поле вышеописанным образом:

$$P_x = \frac{1}{4\pi}VE\ . \tag{27}$$

Литература

1. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц "Электродинамика сплошных сред". 1957 г.
2. Н.Н. Лебедев. "Специальные функции и их приложения". 1953 г.
3. S.C Loh. "Canadian Journal of Physics" 37, 619, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1962 года.