ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.К. Мельников

Р - 1115

О СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВИНТОВЫХ ТОКОВ, ТЕКУЩИХ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТОРА

Дубна 1962 год

В.К. Мельников

Р - 1115

О СИЛОВЫХ ЛИНИЯХ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ВИНТОВЫХ ТОКОВ, ТЕКУЩИХ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТОРА

Направлено в ДАН СССР

Дубна 1962 год

А н н о т а ц и я

Работа посвящена исследованию поведения силовых линий магнитного поля винтовых токов, текущих по поверхности тора. В работе показано, что несимметрия названного магнитного поля является одной из причин возникновения протуберанцев на поверхности плазмы. В работе также показано, что с помощью дополнительного вертикально направленного поля определенной величины названный эффект несимметрии винтового магнитного поля может быть в значительной мере ослаблен.

V.K. Melnikov

ON THE LINES OF FORCE OF A MAGNETIC FIELD OF SCREW CURRENTS FLOWING ALONG THE SURFACE OF A TORUS

Abstract

This paper is devoted to the investigation of the behaviour of the lines of force of a magnetic field of screw currents flowing along the torus surface. It is shown that the asymmetry of this magnetic field is one of the reasons for the appearance of the protuberance on the surtace of the plasma. It is also shown that the effect of the asymmetry of the screw magnetic field may be considerably weakened by means of a vertical field of certain magnitude.

Настоящая заметка посвящена исследованию поведения силовых линий магнитного поля винтовых токов, текущих по поверхности тора. Эта задача имеет важное значение в теории стелларатора.

Результаты настоящего исследования позволяют утверждать, что несимметрия рассматриваемого магнитного поля является одной из причин возникновения протуберанцев на поверхности плазмы. В заметке также показано, что с помощью дополнительного вертикально направленного магнитного поля определенной величины названный эффект несимметрии винтового магнитного поля может быть в значительной мере ослаблен.

Итак, пусть поверхность тора получена с помощью вращения окружности $(x-R_0)^2+z^2=a^2$ вокруг оси $z\,(R_0>a)$. Введем в области, ограниченной поверхностью тора, тороидальную систему координат (r,ϕ,ψ) с помощью соотношений: $x=(R_0+r\cos\phi)\cos\psi$, $y=(R_0+r\cos\phi)\sin\psi$, $z=r\sin\phi$. Пусть далее по винтовой линии $r=a$, $\phi=\ell\psi+\phi_0$ в направлении возрастания ψ течет постоянный ток I (ℓ – целое). Для нахождения создаваемого этим током магнитного поля воспользуемся законом Био-Савара. Путем элементарных вычислений находим, что выражения для составляющих вектора $\vec{H}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$H_r=\frac{I}{c}\int_0^{2\pi}[-a\ell R_0\cos(\theta-\phi_0+\ell\sigma)\sin\sigma+aR_a\sin(\theta-\phi_0+\ell\sigma)\cos\sigma-$$

$$-a^2\ell\cos\phi\sin\sigma+2R_a^2\sin\phi\sin^2\frac{\sigma}{2}]\,R^{-3}\,d\sigma,$$

$$H_\phi=\frac{I}{c}\int_0^{2\pi}[a\ell R_0\sin(\theta-\phi_0+\ell\sigma)\sin\sigma+aR_a\cos(\theta-\phi_0+\ell\sigma)\cos\sigma-$$

$$-rR_a\cos\sigma+a^2\ell\sin\phi\sin\sigma+2R_a^2\cos\phi\sin^2\frac{\sigma}{2}-$$

$$-a\ell r\sin(\phi-\theta+\phi_0-\ell\sigma)\sin\sigma]\,R^{-3}\,d\sigma,$$

$$H_\psi=\frac{I}{c}\int_0^{2\pi}[-a^2\ell+a\ell r\cos(\theta-\phi_0+\ell\sigma)-rR_a\sin\phi\sin\sigma+$$

$$+aR_a\sin(\phi-\theta+\phi_0-\ell\sigma)\sin\sigma+2a\ell R_0\cos(\phi-\theta+\phi_0-\ell\sigma)\sin^2\frac{\sigma}{2}+$$

$$+2a^2\ell\sin^2\frac{\sigma}{2}-2a\ell r\sin\phi\sin(\phi-\theta+\phi_0-\ell\sigma)\sin^2\frac{\sigma}{2}]\,R^{-3}d\sigma,$$

где $\theta=\phi-\ell\psi$, $R_a=R_0+a\cos(\phi-\theta+\phi_0-\ell\sigma)$ и

$$R^2=4R_a(R_0+r\cos\phi)\sin^2\frac{\sigma}{2}+a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi_0+\ell\sigma).$$

Посмотрим какова асимптотика у выражений (1) при $\frac{a}{R_0} \to 0$. Полагая $r = a\rho$, $\psi = \frac{a}{R_0} z$, $\sigma = \frac{a}{R_0}\xi$, $\alpha = \frac{a\ell}{R_0}$ и $\epsilon = \frac{a}{R_0}$, мы легко получаем, что при $\epsilon \to 0$ выражения (1) стремятся соответственно к следующим:

$$H_\rho = \frac{I}{ac}\int_{-\infty}^{\infty}[-\alpha\,\xi\cos(\theta-\phi_0+\alpha\xi)+\sin(\theta-\phi_0+\alpha\xi)]R^{-3}\,d\xi\,,$$

$$H_\phi = \frac{I}{ac}\int_{-\infty}^{\infty}[\alpha\,\xi\sin(\theta-\phi_0+\alpha\xi)+\cos(\theta-\phi_0+\alpha\xi)-\rho]R^{-3}\,d\xi\,, \tag{2}$$

$$H_z = \frac{I}{aa}\int_{-\infty}^{\infty}[-\alpha+\alpha\rho\cos(\theta-\phi_0+\alpha\xi)]R^{-3}\,d\xi\,,$$

где $\theta = \phi - \alpha z$, а $R^2 = \xi^2 + 1 + \rho^2 - 2\rho\,\mathrm{Cos}(\theta-\phi_0+\alpha\xi)$.

Как и следовало ожидать, написанные выражения совпадают с выражениями для составляющих магнитного поля, полученного с помощью винтового тока, текущего по поверхности прямого кругового цилиндра. Этот факт наводит на мысль, что ответ на вопрос о расположении силовых линий магнитного поля винтовых токов, текущих по поверхности тора, при малых значениях отношения $\frac{a}{R_0}$ можно получить, исследовав расположение силовых линий магнитного поля винтовых токов, текущих по поверхности цилиндра, на которое наложено специальным образом подобранное возмущение.

При решении этой задачи мы рассмотрим представляющую реальный интерес систему $2n$ токов, образующих два семейства: токи первого семейства текут в направлении возрастания ψ по винтовым линиям $r = a$, $\phi = \ell\psi + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, токи второго семейства текут в обратном направлении по винтовым линиям $r = a$, $\phi = \ell\psi + \frac{(2k-1)\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Выражения для составляющих полученного таким способом магнитного поля получаются с помощью очевидной комбинации выражений вида (1). Отсюда непосредственно следует, что полученное магнитное поле будет периодическим по θ с периодом $\frac{2\pi}{n}$. Далее из сказанного выше следует, что выражения для составляющих этого магнитного поля могут быть представлены в виде:

$$H_r(r, n\theta, \phi, \epsilon) = H_r^0(r, n\theta) + \epsilon H_r^1(r, n\theta, \phi, \epsilon),$$

$$H_\phi(r, n\theta, \phi, \epsilon) = H_\phi(r, n\theta) + \epsilon H_\phi(r, n\theta, \phi, \epsilon), \tag{3}$$

$$H_\psi(r, n\theta, \phi, \epsilon) = H_\psi^0(r, n\theta) + \epsilon H_\psi^1(r, n\theta, \phi, \epsilon),$$

где $H_r^0(r, n\theta)$, $H_\phi^0(r, n\theta)$ и $H_\psi^0(r, n\theta)$ означают соответствующие комбинации выражений вида (2). Из этих выражений легко следует, что $H\ (r, n\theta)$ – нечетная функция θ, а $H_\psi^0(r, n\theta)$ и $H_\psi^0(r, n\theta)$ – четные функции θ. Используя далее выражения (1), нетрудно убедиться, что при $\epsilon \to 0$ выражения для $H_r^1(r, n\theta, \phi, \epsilon), H_\phi^1(r, n\theta, \phi, \epsilon)$ и $H_\psi^1(r, n\theta, \phi, \epsilon)$ стремятся соответственно к следующим:

$$H^1_r = \frac{1}{ac}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m[\cos(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)\sin(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)-$$

$$-a\xi\operatorname{Cos}\phi+\tfrac{1}{2}\xi^2\sin\phi]R_m^{-3}d\xi-\frac{3I}{2ac}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m[\rho\operatorname{Cos}\phi+$$

$$+\cos(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)][-a\xi\operatorname{Cos}(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)+\sin(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)]\xi^2R_m^{-5}d\xi,$$

$$H^1_\phi = \frac{I}{ac}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m[\cos(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)\cos(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)+$$

$$+a\xi\sin\phi+\tfrac{1}{2}\xi^2\cos\phi-\rho\operatorname{Cos}(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)-$$

$$-a\rho\xi\sin(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)]R_m^{-3}d\xi-\frac{3I}{2ac}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m[\rho\operatorname{Cos}\phi+ \qquad (4)$$

$$+\cos(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)][a\xi\sin(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)+$$

$$+\cos(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)-\rho]\xi^2R_m^{-5}d\xi,$$

$$H^1_\psi = \frac{I}{ac}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m[-\rho\xi\sin\phi+\xi\sin(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)+$$

$$+\tfrac{1}{2}a\xi^2\cos(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)]R_m^{-3}d\xi-\frac{3I}{2ac}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{2n}(-1)^m[\rho\cos\phi+$$

$$+\cos(\phi-\theta+\frac{m\pi}{n}-a\xi)][-a+a\rho\operatorname{Cos}(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)]\xi^2R_m^{-5}d\xi,$$

где $R_m^2=\xi^2+1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\frac{m\pi}{n}+a\xi)$. Из выражений (4) следует, что имеют место следующие равенства:

$$H^1_r(r,n\theta,\phi,0)=H^1_{r,1}(r,n\theta)\sin\phi+H^1_{r,2}(r,n\theta)\cos\phi,$$

$$H^1_\phi(r,n\theta,\phi,0)=H^1_{\phi,1}(r,n\theta)\sin\phi+H^1_{\phi,2}(r,n\theta)\cos\phi, \qquad (5)$$

$$H^1_\psi(r,n\theta,\phi,0)=H^1_{\psi,1}(r,n\theta)\sin\phi+H^1_{\psi,2}(r,n\theta)\cos\phi,$$

где $H^1_{r,1}(r,n\theta)$, $H^1_{\phi,2}(r,n\theta)$ и $H^1_{\psi,2}(r,n\theta)$ – четные функции θ, а $H^1_{r,2}(r,n\theta)$, $H^1_{\phi,1}(r,n\theta)$ и $H^1_{\psi,1}(r,n\theta)$ – нечетные функции θ.

Пусть теперь в области, ограниченной поверхностью тора, кроме рассматриваемого винтового магнитного поля имеется продольное магнитное поле с составляющими $H_r = H_\phi = 0$ $H_\psi = \dfrac{H_0 R_0}{R_0 + r\cos\phi}$. Тогда уравнения силовых линий суммарного магнитного поля могут быть записаны в виде:

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{(R_0 + r\cos\phi)^2 H_r}{H_0 R_0 + (R_0 + r\cos\phi) H_\psi},$$

$$\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{\frac{1}{r}(R_0 + r\cos\phi)^2 H_\phi - \ell[H_0 R_0 + (R_0 + r\cos\phi) H_\psi]}{H_0 R_0 + (R_0 + r\cos\phi) H_\psi}, \tag{6}$$

где $\theta = \phi - \ell\psi$. Следуя высказанной ранее идее, сделаем в системе (6) замену: $r = a\rho$, $\psi = \frac{a}{R_0} z$, $\alpha = \frac{a\ell}{R_0}$ и $\epsilon = \frac{a}{R_0}$. В результате замены система (6) примет вид:

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{[1 + \epsilon\rho\cos(\theta + \alpha z)] H_r}{H_0 + [1 + \epsilon\rho\cos(\theta + \alpha z)] H_\psi},$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{[1 + \epsilon\rho\cos(\theta + \alpha z)]^2 H_\phi - \alpha\rho H_0 - \alpha\rho[1 + \epsilon\rho\cos(\theta + \alpha z)] H_\psi}{\rho H_0 + \rho[1 + \epsilon\rho\cos(\theta + \alpha z)] H_\psi},$$

где $\theta = \phi - \alpha z$. Поведение силовых линий системы (7) при $\epsilon = 0$ хорошо известно (см., напр.,/1/ гл. УIII). Необходимо отметить только следующую деталь. В зависимости от знаков α и H_0 вершины цилиндрической n -угольной поверхности (сепаратрисы), разделяющей области с одинаковыми силовыми линиями, в пространстве (r, θ, z) лежат либо на полуплоскостях $\theta = \frac{(2k-1)\pi}{n}$, либо на полуплоскостях $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Первый случай будет иметь место, когда α и H_0 имеют разные знаки, второй – когда α и H_0 имеют одинаковые знаки. Поскольку второй случай принципиально ничем не отличается от первого, во всех дальнейших рассуждениях будем предполагать, что α и H_0 имеют разные знаки.

Каждой боковой грани рассматриваемой цилиндрической поверхности (назовем их ветвями сепаратрисы) присвоим номер, совпадающий с номером текущего напротив нее тока, и посмотрим, что произойдет с каждой ветвью сепаратрисы при малых $\epsilon \neq 0$. Из общей теории следует (см./2/, § 5), что при малых $\epsilon \neq 0$ каждая из ветвей сепаратрисы расщепится на две родственные ветви; качественное расположение сечений этих ветвей плоскостью $z = z_0$ совпадает с тем, которое изображено на рис. 4 моей заметки/3/. Для характеристики размеров и формы щели между родственными ветвями сепаратрисы рассмотрим их сечения полуплоскостями $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Картина, получившаяся в одном из сечений, изображена на рис. 1. Очевидно, что она будет периодической по z с периодом $\frac{2\pi}{\alpha}$. На тех участках, на которых сплошная кривая лежит выше пунктирной, силовые линии входят внутрь ограниченной ветвями сепаратрисы области, наоборот, на

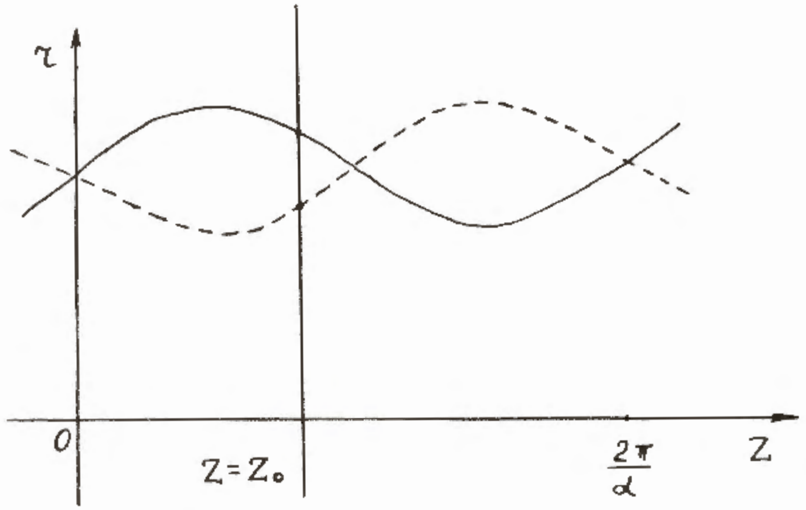

Рис. 1.

на тех участках, на которых сплошная кривая лежит ниже пунктирной, силовые линии выходят наружу.

Пусть $\Delta_\epsilon^k(z_0)$ – расстояние между точками сплошной и пунктирной кривой, лежащими на прямой $z = z_0$ (индекс k относится к рассматриваемым родственным ветвям сепаратрисы). Непосредственное вычисление показывает, что $\Delta_\epsilon^k(z_0)$ имеет вид:

$$\Delta_\epsilon^k(z_0) = \epsilon\Lambda\sin\left(\alpha z_0 + \frac{2k\pi}{n}\right) + \ldots, \tag{8}$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости, а Λ не зависит от z_0. Имеет место следующее равенство:

$$\begin{aligned}\Lambda = K\int_{-\infty}^{\infty}\{[H_\phi^0 - \alpha\rho(H_0 + H_\psi^0)][H_{r,1}^1\cos(\theta + \alpha z) - \\ - H_{r,2}^1\sin(\theta + \alpha z)] + H_r^0[-(H_{\phi,1}^1 - \alpha\rho H_{\psi,1}^1)\cos(\theta + \alpha z) + \\ + (H_{\phi,2}^1 - \alpha\rho H_{\psi,2}^1)\sin(\theta + \alpha z)]\}(H_0 + H_\psi^0)^{-1}\,dz + \\ + K\int_{-\infty}^{\infty}\alpha\rho H_r^0(2H_0 + H_\psi^0)(H_0 + H_\psi^0)^{-1}\sin(\theta + \alpha z)\,dz,\end{aligned} \tag{9}$$

где интегрирование происходит вдоль силовой линии $\rho = \rho(z)$, $\theta = \theta(z)$ системы (7) при $\epsilon = 0$, лежащей на n -ой ветви сепаратрисы и удовлетворяющей условию: $\theta(0) = 0$; постоянная K равна значению выражения $\dfrac{H_0 + H_\psi^0}{H_\phi^0 - \alpha\rho(H_0 + H_\psi^0)}$ в точке ($\rho = \rho(0)$, $\theta = 0$). Первый из написанных интегралов обязан своим происхождением винтовому полю, второй – продольному.

Предположим теперь, что в области, ограниченной поверхностью тора, к рассматриваемым магнитным полям добавлено слабое вертикально направленное магнитное поле с составляющими: $H_r = \frac{aH_1}{R_0}\sin\phi$, $H_\phi = \frac{aH_1}{R_0}\cos\phi$, $H_\psi = 0$. В этих условиях в выражении для функции $\Delta_\epsilon^k(z_0)$ появится дополнительный член вида $\epsilon\delta H_1 \sin(az_0 + \frac{2k\pi}{n})$, где δ не зависит от z_0 и может быть определено из следующего равенства:

$$\delta = K\int_{-\infty}^{\infty}\{[H_\phi^0 - a\rho(H_0 + H_\psi^0)]\cos(\theta + az) + H_r^0\sin(\theta + az)\}(H_0 + H_\psi^0)^{-1}dz. \tag{10}$$

Интегрирование в равенстве (10) происходит вдоль той же силовой линии, что и в равенстве (9). Таким образом, выбирая H_1 так, чтобы выполнялось равенство $\Lambda + \delta H_1 = 0$, мы достигнем этим существенного уменьшения щели между родственными ветвями сепаратрисы. Этот факт может иметь практическое значение.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить Л.Г. Заставенко, Ф.В. Карманова, П.А. Черемных и С.В. Фомина за полезное обсуждение полученных результатов.

Литература

1. Л.А. Арцимович. Управляемые термоядерные реакции, ГИФМЛ, Москва, 1961.
2. В.К. Мельников. Об устойчивости центра при малых периодических возмущениях. 1, 2, препринты ОИЯИ, Р-660, Р-737, 1961.
3. В.К. Мельников. О силовых линиях магнитного поля. ДАН СССР, 142, № 3 (1962), 542-545.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1962 года.