ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л.Г. Заставенко, А. Чилок

Р - 1113

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ К РЕШЕНИЮ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Дубна 1962 год

Л.Г. Заставенко, А. Чилок

Р - 1113

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ К РЕШЕНИЮ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Дубна 1962 год

Аннотация

Применение метода стационарной фазы дает возможность получить решение кинетических уравнений типа встречающихся в теории многократного рассеяния для больших углов рассеяния.

L.G Zastavenko, A.Chilok

APPLICATION OF STATIONARY PHASE METHOD TO THE SOLUTION OF KINETIC EQUATIONS

Abstract

The application of the stationary phase method makes it possible to obtain a solution of the kinetic equations similar to those encounted in the multiple scattering theory for large scattering angles.

§ 1. Введение

Исследование распределения μ -мезонов с энергией ~ 1 Бэв, проникших в землю из атмосферы, на большой глубине под землей /1/, приводит к кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y\lambda^2 < 1-\vec{n}\vec{n}' < x\lambda^2} \sigma_1(\vec{n}\vec{n}')\, d\Omega(\vec{n}')\,[f(\lambda,\vec{n}') - f(\lambda,\vec{n})] + - \frac{f(\lambda,\vec{n})}{2\pi} \int\limits_{x\lambda^2 < 1-\vec{n}\vec{n}' < \lambda} \sigma_2(\lambda,\vec{n}\vec{n}')\, d\Omega(\vec{n}')$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{x\lambda^2 < 1-\vec{n}\vec{n}' < \lambda} \sigma_2(\lambda,\vec{n}\vec{n}')\, f(\lambda - 1 + \vec{n}\vec{n}', \vec{n}')\, d\Omega(\vec{n}') \qquad /1/$$

с начальным условием

$$f(\lambda,\vec{n}) \to \delta(n - n_0) \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Здесь $\sigma_1 = Q_1(1-\vec{n}\vec{n}')^{-2}$; $\sigma_2 = Q_2 F(\lambda,\vec{n}\vec{n}')(1-\vec{n}\vec{n}')^{-2}$

$$Q_1 = 2{,}3 \cdot 10^{-4}, \quad Q_2 = 2{,}0 \cdot 10^{-5}, \quad x = 1{,}2 \cdot 10^{-3}, \quad y = 1{,}5 \cdot 10^{-11},$$

λ -длина волны μ -мезона. Близкие к /1/, хотя и более простые, уравнения рассматривались в связи с задачей о рассеянии частиц в среде без потери энергии в работах /3,4,2/. Наша задача, однако, не решается с помощью развитых там методов: теория Мольера /3/ применима лишь для малых углов рассеяния. Что касается непосредственного суммирования ряда /2/ /4/, то неизбежные ошибки при подсчете $f_\ell(\lambda)$ из уравнения /3/ приведут, в интересующей нас области больших углов рассеяния, к погрешности в сумме ряда /2/ большей, чем сама эта сумма /ввиду больших сокращений/. Поэтому мы вынуждены развить свой собственный метод приближенного подсчета решения уравнения типа /1/. Как и другие авторы мы воспользуемся разложением $f(\lambda,\vec{n})$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(\lambda,\vec{n}) = \sum \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\vec{n}\,\vec{n}_0)\, f_\ell(\lambda). \qquad /2/$$

Для $f_\ell(\lambda)$ получаем уравнение:

$$\frac{df_\ell}{d\lambda} = \Phi_\ell(\lambda) f_\ell(\lambda) + \int_{1-\lambda}^{1-x\lambda} P_\ell(r)\, \sigma_2(\lambda-1+r, r)\, f_\ell(\lambda-1+r)\, dr \qquad /3/$$

$$- \int_{1-\lambda}^{1-x\lambda^2} f_\ell(\lambda)\, \sigma_2(\lambda, r)\, dr,$$

где $$\Phi_\ell(\lambda) = \int_{1-x\lambda^2}^{1-y\lambda^2} dr\, \sigma_1(r) \{ P_\ell(r) - 1 \}$$

с начальным условием:

$$f_\ell(\lambda) \to 1 \qquad \text{при} \quad \lambda \to 0. \qquad /4/$$

Мы предполагаем /хотя и не можем этого доказать/, что уравнение /3/ вместе с начальным условием /4/ определяет $f_\ell(\lambda)$ как целую функцию ℓ. Далее, из определения

$$P_\ell(t) = 1 + \frac{\rho^2+1/4}{(1!)^2}\left(\frac{1-t}{2}\right) + \frac{(\rho^2+1/4)[\rho^2+9/4]}{(2!)^2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \dots$$

$\rho = \ell + 1/2$, годного для всех ℓ, вытекает, что $f_\ell(\lambda)$ есть четная функция ρ:

$$f_\ell(\lambda) = \psi(\lambda, \rho^2). \qquad /5/$$

Тогда уравнение /2/ может быть переписано в виде:

$$f(\lambda, \cos\theta) \equiv \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \frac{\rho\, d\rho}{4\pi i} \left\{ \frac{P_{-1/2+\rho}(\pi-\theta)}{\cos\pi\rho}\, \psi(\lambda, \rho^2) \right\}. \qquad /6/$$

Это преобразование было применено Фоком и Зоммерфельдом при исследовании распространения радиоволн. Из /3/ чувствуется, что $f_\ell(\lambda)$ весьма быстро растет с ростом $|\rho|$ при $\mathrm{Re}\,\rho = 0$. Отсюда ясно, что выражение в фигурных скобках в /6/ имеет седловую точку $\rho = \rho_0(\lambda, \theta)$ на верхней мнимой полуоси.

Наш способ подсчета $f(\lambda, \cos\theta)$ состоит в замене контура интеграции в /6/ на контур C_0, проходящий через точку $\rho_0(\lambda, \theta)$, на котором выражение в фигурных скобках сохраняет постоянную фазу /то есть просто вещественно/ и численном счете получающегося интеграла.

В следующем параграфе мы разберем простой пример, разъясняющий смысл использованного приема.

§ 2. Пример

Пусть $W(x) \geq 0$, $\int W(x)\,dx = 1$, $W(-x) = W(x)$, $W(x) = 0$ при $|x| > x_0$,

$$\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial \lambda} = -f(\lambda, x) + \int W(x - x')\,dx'\, f(\lambda, x'),$$

$$f(\lambda, x) \to \delta(x) \qquad \lambda \to 0 .$$

Формулы

$$f(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx} \phi(\lambda, p)\,dp ,$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = [u(p) - 1]\phi(\lambda, p),$$

в этом случае подобны /2/ и /3/;

$$u(p) = \int W(x)\, e^{ipx}\, dx \qquad /7/$$

Находим:

$$f(\lambda, x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ipx + \lambda[u(p) - 1]}\,dp = \frac{1}{2\pi} \int dp\, e^{F(p, \lambda, x)} . \qquad /8/$$

Из /7/ следует, что $U(p) = U(-p)$, $U(p)$ вещественна при $Re\, p = 0$ и $U(p)$ монотонно растет /как экспонента/ с ростом $|p|$ при $Re\, p = 0$; $u(0) = 1$, так что /при $x > 0$/ подынтегральная функция в /8/ имеет седловую точку на положительной мнимой оси. Таким образом, имеется аналогия со случаем, рассматриваемым в § 1. Далее возьмем для определенности

$$W(x) = \begin{cases} \tfrac{1}{2} & \text{при } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{при } |x| > 1 \end{cases}, \qquad U(p) = \frac{\sin p}{p} .$$

Уравнение $\quad ix + \frac{d}{dp}\left(\frac{\sin p}{p}\right) = 0$

определяет седловые точки $\quad p = p_k(x/\lambda)$, $k = \ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

$$Re\, p_0 = 0 , \qquad sign\, Re\, p_k = sign\, k .$$

При $x/\lambda = 0$ эти точки все расположены на вещественной оси

$$\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{\sin p}{p}\right) = 0 \qquad \text{при } p = p_k(0) \right].$$

С ростом x/λ от нуля эти точки двигаются по кривым D_n :

$$\arg \frac{d}{dp}\left(\frac{\sin p}{p}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n ,$$

n –целое. От точек $p_k(0)$, k – четное, эти кривые отходят вверх,от точек $p_k(0)$, k –нечетное – вниз.

Перейдем теперь к описанию кривых стационарной фазы, проходящих через точки $p_k(x/\lambda)$. При $x/\lambda = 0$ – это кривые, на которых $Im\ \frac{\sin p}{p} = 0$: $\alpha)\ Im p = 0$.

$\beta)$ –кривые B_k , проходящие через точки $p_k(0)$ перпендикулярно вещественной оси и с ростом $/Im p/$ приближающиеся к прямым $Re p = \pi k$. При росте x/λ часть кривой B_{-1}, лежащая в верхней полуплоскости /мы обозначим ее B_{-1+} / отрезок вещественной оси от $p_{-1}(0)$ до $p_1(0)$ и кривая B_{+1+} , деформируясь, образуют гладкую кривую $C_0(x/\lambda)$,проходящую через точку $p_0(x/\lambda)$ / она лежит на верхней половине мнимой оси/ перпендикулярно мнимой оси; кривая B_{+1+} , отрезок $[p_1(0),\ p_3(0)]$ вещественной оси и кривая B_{+3+} , деформируясь, образуют гладкую кривую $C_2(x/\lambda)$, проходящую через точку p / она лежит в верхней полуплоскости/. Внутренняя область кривой C_0 делится "кривой" стационарной фазы $Re p = 0$, /проходящей через $p_0(x/\lambda)$ / на две половины: в правой из них $Im F(p, \lambda, x) < 0$, в левой $Im F > 0$; точно так же область внутри кривой C_2 состоит из двух – в правой

$$Im F(p, \lambda, x) < Im F[p_2(x/\lambda), \lambda, x],$$

в левой это неравенство имеет обратный знак. Теперь ясно, что условием непересечения кривых C_0 и C_2 является

$$Im F\left[p_2\left(\frac{x}{\lambda}\right), \lambda, x\right] < Im F\left[p_0\left(\frac{x}{\lambda}\right), \lambda, x\right].$$

Не умея доказать это неравенство, мы, однако, предполагаем его справедливым. Точно так же мы предполагаем выполнение аналогичных условий непересечения всех пар кривых $C_{2k}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, $C_{2(k+1)}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Далее напрашивается деформация контура в /8/, "приводящая" к разложению:

$$f(\lambda, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(\lambda, x) \qquad /9/$$

$$f_k(\lambda/x) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_{2k}} e^F dp .$$

Так как при $s = x/\lambda = 0$ неравенство

$$- s Im p_0(s) + U[p_0(s)] - 1 >$$

$$> - s IMp_2(s) + ReU[p_2(s)] - 1$$

выполнено, то оно выполяется и в некотором интервале $0 < s < s_0$. Для s из этого интервала будет $[a(s)>0]$

$$f_1(\lambda,x)/f_0(\lambda,x)=O[e^{-\lambda a(s)}] \qquad \text{при} \quad \lambda\to\infty. \qquad /10/$$

Поскольку каждый член ряда /9/ есть аналитическая функция x а $f(\lambda,x)$ таковой не является, то ясно, что ряд /9/ может дать хорошую аппроксимацию $f(\lambda,x)$ лишь для больших значений λ, когда неаналитичность функции $W(x)$ сглаживается большим числом свертываний, и что ряд /9/ равномерно сходиться к $f(\lambda,x)$ не может.

При сделанном нами выше выборе функции $W(x)$ при $k\to\infty$ будет:

$$f(x,\lambda)\approx k^{-|x|/\lambda}\, e^{-\lambda+x}$$

Если $|x|/\lambda<1$ – ряд /9/ расходится, если $|x|\lambda>1$ – ряд /9/ сходится, причем равномерно по x; так как сумма его Σ есть аналитическая функция x, /в отличие от $f(\lambda,x)$ /, то $\Sigma\neq f$.

§ 3. Числовой материал

Ниже приводится найденная нами в связи с задачей [1] таблица 1 функции $f(\lambda,\cos\theta)$ при выборе функции $F=1$ /см. определение $\sigma_2(\lambda,\vec{n}\vec{n}')$ в уравнении /1/; для сравнения даны также таблица II этой функции в приближении однократного рассеяния $f_1(\lambda,t)=\mathrm{Max}\{0,\ \frac{3{,}12\cdot10^{-6}}{(1-t)^2}(\lambda+t-1)\}$.

Около углов, близких к предельному углу однократного рассеяния, наш расчет дает $f<f_1$, что кажется сомнительным и заставляет думать об оценке второго члена разложения /9/; однако, мы надеемся все жe, что дело объясняется диффузионным стоком в область кинематической тени.

Обратим еще внимание на то, что λ в нашем случае, в отличие от § 2, не есть число соударений – в силу нашего выбора сечений любому значению λ у нас соответствует бесконечное большое число испытанных частицей соударений. Таким образом с такой точки зрения этот случай особо благоприятен для применения нашего метода.

По поводу интегродифференциального уравнения /3/ отметим, что /хотя это уравнение в нашем случае сингулярное / оно весьма успешно решается простейшим способом $(\ell=-\frac{1}{2}+ia,\ a>0)$.

Может показаться, что наличие полюсов функции $1/\cos\pi\rho$ на вещественной оси осложняет ситуацию в случае $\theta\to0$, когда седловая точка приближается к вещественной оси. Чтобы избежать этой трудности, подставим в /8/ разложение

$$1/\cos\pi\rho=2[e^{\pi i\rho}+e^{3\pi i\rho}+\ldots]\ ;$$

получим

$$f(\lambda, \cos\theta) = \sum_0^\infty f_{2k+1}(\lambda, \cos\theta),$$

где каждая из функций f_{2k+1} оценивается по кривой стационарной фазы без указанного выше возражения. Фактор $e^{(2k+1)\pi i\rho}$ вызывает удаление седловых точек $\rho_{0,2k+1}(\lambda, \theta)$ с ростом k от вещественной оси и соответствующее уменьшение функций f_{2k+1}, рост k на единицу соответствует, грубо говоря, увеличению угла рассеяния на 2π, то есть в нашем случае очень большому убыванию, так что $f(\lambda, \cos\theta) \approx f_1(\lambda, \cos\theta)$.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. М.А. Маркову, из задания которого возникла настоящая работа, Б.Н. Валуеву за обсуждение постановки задачи и В.И. Огиевецкому и Н.А. Черникову за консультации по предмету кинетических уравнений.

Литература

1. А. Чилок, Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р-1112, Дубна, 1962 г. ЖЭТФ /будет опубликовано/.
2. H.A.Bethe. Phys. Rev. 89, 1256 (1953).
3. C.Molieve, Z.Naturforsh 3a, 78 (1948).
4. S.A.Gondsmit, J.L.Saunderson. Phys.Rev. 57, 27 and 58, 36 (1940).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 октября 1962 года.

Таблица I функции $-\lg_{10} f(\lambda, \cos\theta)$

$\cos\theta$ \ λ	4/3	I	I/2	I/3	I/5
0,9	I,538	I,76	2,54	3,I8	4,25
0,8	2,37	2,75	4,00	5,0I	
0,7	3,0I	3,53	5,I5		
0,6	3,55	4,20	5,73	9,02	
0,5	4,07	4,8I	7,44		
0,4	4,54	5,36	9,23		
0,3	4,97		II,02		
0,2	5,40	6,II			
0,I		6,70			
0,0		7,87			
-0,I					
-0,2	6,70				
-0,3	7,75				
-0,4	8,95				
-0,8		2I,24			

Таблица 2

Функции $-\lg_{10} f_1(\lambda, \cos\theta)$

$\cos\theta$ \ λ	4/3	I	I/2	I/3	I/5
0,9	3,41	3,55	3,90	4,I4	4,50
0,8	4,06	4,20	4,63	4,99	
0,7	4,45	4,60	5,I6	5,98	
0,6	4,74	4,93	5,7I		
0,5	4,98	5,20			
0,4	5,20	5,46			
0,3	5,40	5,72			
0,2	5,59	6,0I			
0,I	5,78	6,4I			
0,0	5,99				
-0,I	6,23				
-0,2	6,55				
-0,3	7,20				