ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Л.Г. Заставенко, А. Чилок

Р-1112

УГЛОВОЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ μ -МЕЗОНОВ, ПРОНИКШИХ ИЗ АТМОСФЕРЫ НА БОЛЬШУЮ ГЛУБИНУ В ЗЕМЛЮ

Дубна 1962 год

Л.Г. Заставенко, А. Чилок

Р-1112

УГЛОВОЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ μ -МЕЗОНОВ, ПРОНИКШИХ ИЗ АТМОСФЕРЫ НА БОЛЬШУЮ ГЛУБИНУ В ЗЕМЛЮ

Дубна 1962 год

А н н о т а ц и я

Подсчитано угловое и энергетическое распределение μ -мезонов, проникших в землю сверху, на большой глубине /$4 \cdot 10^4$ г/см^2/ в области углов $\cos\theta < -0,4$ / $\cos\theta = 1$ соответствует направлению вниз /и энергий $E >$ 0,75 Бэв.

L.G. Zastavenko, A. Chilok

ANGULAR AND ENERGY DISTRIBUTION OF FAST μ – MESONS PENETRATING DEEP INTO THE EARTH FROM THE ATMOSPHERE

Abstract

The angular and energy distributions of μ – mesons penetrating deep into the Earth from above (the depth is $4 \cdot 10^4$ g/cm^2) in the angle region $\cos\theta < -0.4$ ($\cos\theta = 1$ corresponds to the downward direction) and in the energy range $E > 0.75$ BeV have been calculated.

§ 1. Введение

μ -мезоны, проникшие на глубину сверху и затем рассеявшиеся на большие углы, являются помехой в эксперименте, предлагаемом в [1]. Целью настоящей работы является оценка этих помех в области углов $\cos\theta < -0{,}4$ и энергий $E > 0{,}75$ Бэв на глубине $4\cdot 10^4$ г/см^2. Угловое и энергетическое распределение μ- мезонов высоких энергий, приходящих на поверхность Земли сверху, мы берем в виде[2]

$$F_0(>E,\theta) = N_0 E^{-1,5}(1 + E\cos\theta_э/E_\pi)^{-1}, \qquad /1/$$

где $E_\pi \approx 100$ Бэв, $\cos\theta_э = Max\{\cos\theta, 1/8\}$,

$$\theta < \frac{\pi}{2}, \quad N_0 = 0{,}033 \text{ см}^{-2}\text{сек}^{-1}\text{стерад}^{-1}(\text{Бэв})^{1,5},$$

энергия E в формуле берется в Бэв'ах;

$$f_0(E,\theta) = \frac{dF_0}{dE} = N_0 E^{-1,5}\frac{1{,}5 + 2{,}5\,E\cos\theta\;/E_\pi}{(1 + E\cos\theta\;/E_\pi)^2}, \qquad /2/$$

Мы будем считать, что проходя через слой вещества 1 г/см^2 μ – мезон теряет энергию

$$q = 2 \text{ Мэв см}^2\text{г}^{-1}, \qquad /3/$$

что справедливо в существенной для нас области энергий $E < 1000$ Бэв. Без учета рассеяния распределение μ - мезонов на глубине x г/см^2 было бы

$$F_0(x, >E,\theta) = F_0(E + qx/\cos\theta, \theta). \qquad /4/$$

Эта формула дает следующее значение потока сверху вниз на глубине x:

$$2\pi\int F_0(x, >E,\theta)\cos\theta\cdot d\cos\theta \simeq \frac{10 N_0}{9\cdot 3{,}5}(qx)^{-1,5}$$

для глубины 4 10^4 г/см^2 поток составляет 4,5 10^{-5} частиц через 1 см^2 за секунду, то есть 1,2 10^8 частиц через 100 м^2 за месяц, что на восемь порядков больше, чем ожидаемое число μ - мезонов от нейтрино[1].

Рассеяние μ - мезонов в земле приводит к тому, что функция их распределения отлична от /4/ и не равна нулю в области $\theta > \pi/2$; поскольку, однако, /как естественно ожидать/ эта функция резко убывает с ростом θ, то при данной энергии E есть конус около направления вверх $\cos\theta < a(E)$ такой, что плотность μ -мезонов, пришедших сверху $F(x, >E,\theta)$ меньше плотности нейтринных μ -мезонов $F_\nu(x, >E,\theta)$ в нем. Получение оценки функции $F(x, >E,\theta)$ и является нашей целью, эта оценка дает возможность найти существенную для эксперимента, предлагаемого в[1], функцию $a(E)$.

§ 2. Рассеяние μ -мезонов

Рассеяние быстрого μ -мезона на ядре протекает различным образом в зависимости от величины передаваемого ядру импульса; для малых передач

$$\sigma(k, \cos\theta) = \sigma_1(k, \cos\theta) = \begin{cases} 0 & \theta < \theta_{min} \\ 4r_0^2\left(\frac{\mu c^2}{k}\right)^2 \frac{z^2}{4(1-\cos\theta)^2} & \theta_{min} < \theta < \theta_{max} \end{cases} \qquad /5/$$

$$\theta_{min} = A^{1/3}(kr_б)^{-1}, \quad \theta_{max} = A^{-1/3}(kr_я)^{-1}$$

$$r_б = 10^{-8} \qquad r_я = 1{,}3 \cdot 10^{-13}$$

A -атомный вес, z -заряд ядра, μ - масса μ -мезона, $r_0 = e^2/(\mu c^2)$ /4/; при больших передачах импульса ядру происходит его расщепление; для упрощенного описания имеющей место здесь сложной картины мы принимаем, что рассеяние в этом случае происходит по отдельности, на каждом из протонов ядра как на свободном, что дает в пересчете на ядро

$$\sigma(k, \cos\theta) = \sigma_2(k, \cos\theta) = 4r_0^2\left(\frac{\mu c^2}{k}\right)^2 \frac{zF}{4(1-\cos\theta)^2}, \quad \theta > \theta_{max} \qquad /6/$$

$$F = \frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\frac{K}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \left(\frac{K}{M}\right)^2\left[15\sin^4\frac{\theta}{2} + 3\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right]}{1 + 2\frac{K}{M}\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Здесь энергии μ -мезона до и после рассеяния k и p связаны соотношением:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{k} + 1 - \cos\theta,$$

в котором мы пренебрегаем массой покоя μ - мезона /поскольку нас интересует его энергия более 0,75 Бэв/ и берем массу нуклона M равной 1 Бэв.

Чтобы получить сечение на г/см^2 формулы /5/ и /6/ следует умножить на число n_0 ядер в 1 г вещества:

$$n_0 \cong \frac{1}{2MZ} = 3{,}1 \cdot 10^{23}/Z. \qquad /7/$$

На основании данных о составе земли мы принимаем $Z = 12$. Из /5/ находим средний квадрат угла отклонения μ -мезона при замедлении в земле от энергии k_1 до энергии k_2:

$$\bar{\theta}^2(k_1, k_2) = 8{,}9 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right).$$

Таким образом в нашей задаче многократное рассеяние дает отклонения $\approx$ 0,1 радиана, так что следует ожидать, что функция $F(x, >E, \theta)$ в интересующей нас области $\theta - \frac{\pi}{2} \approx 1$ в основном определяется одним однократным рассеянием, с некоторой поправкой за счет многократного рассеяния. Положив в /6/ $F = 1$, получаем оценку среднего числа соударений с отклонением на угол $> \theta > \theta_{max}$, которое μ -мезон испытывает, замедляясь от энергии $k = \infty$ до энергии k: $N(k) \approx 4 \cdot 10^{-5}(\theta^2 k)^{-1}$;

для $\theta = 0{,}1$ и $K = 1$ Бэв это число есть $4\ 10^{-3}$. Таким образом, как правило, μ -мезон замедляется до энергии 1 Бэв, не испытав рассеяния на большой угол.

§ 3. Основные формулы

Наша задача сводится к решению кинетического уравнения

$$n\nabla_x f(\vec{x},\vec{n},k) = -n_0\sigma(k)f + n_0\int d\Omega(\bar{n}')\sigma_1(k,\bar{n}\bar{n}')f(\vec{x},\bar{n}',k) +$$

$$+ n_0\int dp'\,d\Omega(\bar{n}')\sigma_2(k,\bar{n}\bar{n}')f(\bar{x},\bar{n}',k)\,\delta[k-\phi(\bar{n}\bar{n}',p)] + q\frac{\partial f}{\partial k}, \qquad /8/$$

где $$\sigma(k) = \int d\Omega(\bar{n}')[\sigma_1(k,\bar{n}\bar{n}') + \sigma\ (k,\bar{n}\bar{n}')],$$

$$\phi(\bar{n}\bar{n}',p) = [\frac{1}{p} + 1 - \bar{n}\bar{n}']^{-1},$$

функция $\sigma(k,\bar{n}\bar{n}')$ определена /5/ и /6/, n_0 – /7/, q –/3/ – в области $\bar{x}\bar{n}_0 > 0$ при условии, что f совпадает с функцией /1.2/ в плоскости $\bar{x}\bar{n}_0 = 0$ для направлений $\bar{n}$ вниз: $\vec{n}_0\vec{n} > 0$.

Уравнение /3.1/ весьма сложно для решения в лоб. Вместе с тем, принимая во внимание специфику задачи, легко видеть, что функция

$$\tilde{\tilde{f}}(\vec{x},\vec{n},k) = \int d\Omega(\bar{n}')\Phi(k,\bar{n}\bar{n}')\eta(\bar{n}_0\bar{n}')f_0(q\frac{\bar{x}\vec{n}_0}{\bar{n}'\vec{n}_0},\bar{n}'\vec{n}_0) \qquad /9/$$

является разумной аппроксимацией $f(\bar{x},\bar{n},k)$.

В формуле /9/ $\Phi(k,\bar{n}\bar{n}')$ – решение уравнения /8/, не зависящее от x и удовлетворяющее условию:

$$\Phi(k,\bar{n}\bar{n}') \to \delta(\bar{n}-\bar{n}') \quad \text{при} \quad k\to\infty,$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$$

Функция $\tilde{\tilde{f}}(\vec{\xi},\vec{n},k)$ как функция только от двух последних своих аргументов при фиксированном значении первого, есть не зависящее от координаты $\vec{x}$ решение уравнения /8/, такое что определенный им поток через плоскость $\bar{x}\bar{n}_0 = 0$ в направлении $\vec{n}$ совпадает с потоком /2/ при энергии $E_\xi = q\frac{\vec{\xi}\ \vec{n}_0}{\vec{n}\ \vec{n}_0}$ / μ -мезоны, имеющие на уровне земли энергию ниже этой, на глубину $\vec{\xi}$ не попадают/. С дальнейшим ростом энергии $E > E_\xi$ поток f_0 убывает как $E^{-2{,}5}$, а поток от $\tilde{f}$ почти не меняется, поскольку, однако, вероятность рассеяния на большой угол с ростом энергии падает, то можно надеяться, что несмотря на разницу в порождающих потоках функции $\tilde{f}$ и f близки близки друг к другу в интересующей нас области энергий /$E \sim 5$ Бэв/.

Таким образом, замысел конструкции /9/ состоит в том, что для данной глубины ξ строится функция $\tilde{\tilde{f}}(\vec{\xi}, \vec{n}, k)$ – не зависящее от координаты решение уравнения /8/, порождающий которое поток /вернее, часть его, существенная на глубине $\vec{\xi}$ / близок к $f_0(2)$.

Сделаем еще следующее замечание: на глубину под землей $x >> 4 \cdot 10^4$ г/см^2 проникают лишь μ – мезоны, имеющие на поверхности земли энергию $E >> 100$ Бэв. В этом случае становятся существенными радиационные потери и величина q /3/ зависит от энергии.

Имея нашу таблицу функции $\Phi(k, \cos\theta)$ распределение μ –мезонов на такой глубине можно рассчитать в два этапа: 1/ определяем распределение на глубине $\approx x - 4 \cdot 10^4$ по формуле вида /4/, учитывающей однако зависимость q от энергии 2/ принимая это распределение за исходное, определим далее распределение на глубине x по формуле вида /9/. Пересчет $\Phi(k, \cos\theta)$ для иных Z, чем взятое нами значение $Z = 12$, можно выполнить в предположении линейной зависимости Φ от Z.

§ 4. Результаты расчета

Наиболее сложен расчет функции $\Phi(k, \vec{n}\vec{n}')$; он был выполнен по методу перевала, описанному в /3/. В таблице 1 даны значения функции – $\lg \Phi(k, \bar{n}\bar{n}')$.

В таблице II дана функция $K(k, \tau)$, через которую интересующая нас величина

$$\phi(x, k, \tau) = - \int_k^\infty dp \int_{\bar{n}'\bar{n}_0 < \tau} d\Omega \, (\bar{n}')\bar{n}'\vec{n}_0 f(x, \bar{n}', p)$$

потока μ – мезонов с энергией более k Бэв в обратном конусе $\bar{n}\bar{n}_0 < \tau$ за 1 сек. через площадку 1 см^2 на глубине $(x/80) \, 4 \cdot 10^4$ г см$^{-2}$ выражается так:

$$\phi(x, k, \tau) \cong 4\pi N_0 x^{-2,5} K(k, \tau).$$

Здесь N – константа, входящая в формулу /1/. Для нашей глубины $4 \cdot 10^4$ г см$^{-2}$ $x = 80$ и

$$4\pi N_0 x^{-2,5} = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ см}^{-2}\text{сек}^{-1}$$

Например, для $k = 1$ Бэв и $\tau = -0,7$, $\phi = 3 \cdot 10^{-14}$ μ– мезона в 1 сек через 1 см^2, т.е. $8 \; 10^{-2}$ μ –мезона в месяц через 100 м^2.

В порядке обсуждения полученных результатов необходимо отметить, что они весьма близки к результатам простейшего расчета, учитывающего только однократное рассеяние

$$(\phi(x, k\tau) \to \phi_1(x, k, \tau)).$$

Наибольшая величина отношения ϕ/ϕ_1 получается, как этого и естественно ожидать, при $k = 3/4$, $\tau = -0,4$, и равна ≈ 4; при изменении k и τ вглубь рассмотренной области это отношение приближается к единице и даже становится меньше ее /см[3] § 3/. Поскольку различие ϕ и ϕ_1 в интересующей нас области невелико, то наш расчет по сравнению с простейшим обладает в основном лишь преимуществом большей надежности. Иначе: проведенный нами сложный расчет свидетельствует о том, что простейший расчет, учитывающий только однократное рассеяние, дает решение нашей задачи с достаточной точностью.

Отметим, что мы вычисляли функцию $\Phi(k, \cos\theta)$ также в приближении, учитывающем лишь многократное рассеяние /то есть диффузию/ и однократное рассеяние. Как и расчет по методу перевала /[3] §3/, этот расчет не дает увеличения $\Phi(k, r)$ по сравнению с $\Phi_1(k, r)$, учитывающей только однократное рассеяние, в области углов, близких к предельному углу однократного рассеяния.

Нами исследована зависимость $\Phi(k, \cos\theta)$ от параметра θ_{max}: увеличение этого параметра в 1,5 раза не дает заметного роста $\Phi(k, \cos\theta)$; это согласуется с однократным характером рассеяния.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность проф. Г.Т. Зацепину и проф. М.А. Маркову, по предложению которых выполнена настоящая работа. Авторы благодарны также большому числу сотрудников математического сектора ЛТФ и вычислительного центра ОИЯИ за помощь при проведении расчета.

Литература

1. М.А. Марков. Доклад на Рочестерской конференции 1959 г.
2. И.В. Железных. Дипломная работа. ФИАН, 1958 г.
2. Г.Т. Зацепин, В.А. Кузьмин. ЖЭТФ, 39 , 1677, /1960/.
3. Л.Г. Заставенко, А. Чилок. Применение метода стационарной фазы к решению кинетических уравнений /будет опубликовано/.
4. B Rossi and K.Greisen. Reviews of Modem Phys. 13, 240 (1941).
5. M.N. Rosenbluth. Ph. Rev. 79 615 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 октября 1962 года.

Таблица I.

Функции $-\lg_{10}\Phi(k, \cos\theta)$.

$1+\cos\theta$ \ $\frac{1}{K}$	4/3	I	I/2	I/3	I/5
I,9	+I,33	I,50	2,0I	2,48	3,32
I,8	+2,07	2,28	3,37	4,2I	5,50
I,7	+2,63	3,06	4,40	6,I0	8,00
I,6	+3,I3	3,72	4,67	7,90	II,00
I,5	+3,62	4,29	6,I6	I0,00	I4,00
I,4	+4,07	4,8I	7,67	I2,00	I7,00
I,3	+4,48	5,I7	9,40	I4,00	20
I,2	4,89	5,5I	II,40	I6,00	
I,I	5,29	6,78	I3,50	I8	
I,0	5,50	7,20	I5,50	20	
0,9	5,70	8,70	I7,50		
0,8	6,I0	I0,20	I9,50		
0,7	7,I0	II,70	20		
0,6	8,20	I3,20			
0,5	9,30	I4,70			

Таблица 2.

Функции $K(k, \tau)$.

τ \ $\frac{1}{K}$	4/3	I	I/2	I/3
-0,4	8,29^{-7}	3,65^{-7}	2,94^{-8}	4,6I^{-9}
-0,5	2,52^{-7}	9,47^{-8}	4,28^{-9}	3,20^{-I0}
-0,6	7,I3^{-8}	2,2I^{-8}	4,96^{-I0}	I,I6^{-II}
-0,7	I,78^{-8}	4,24^{-9}	3,52^{-II}	I,7I^{-I3}
-0,8	3,49^{-9}	5,39^{-I0}	9, $^{-I3}$	5,65^{-I6}
-0,9	2,90^{-I0}	I,I6^{-II}	3,23^{-I6}	