



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

---

Я.А. Смородинский

P-1109

КИНЕМАТИКА  
И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

*Ам. журн., 1963, т 14, в 1, с 110-121.*  
*Fortsch. der Physik, 1965, т 13, в 4, с 157-173.*

Я.А. Смородинский

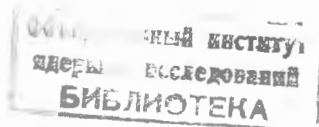
P-1109

КИНЕМАТИКА  
И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Пусть Лобачевского кривые  
Украсят города . . .

В. Хлебников "Ладомир"

Направлено в журнал "Атомная энергия"  
(Специальный номер, посвященный памяти академика И.В. Курчатова)



## А н н о т а ц и я

Кинематические задачи релятивистской механики решаются в пространстве скоростей, которое обладает метрикой Лобачевского. На нескольких примерах иллюстрируется применение гиперболической геометрии в кинематике. Показано, каким образом надо рассматривать вращение волчка и спин частиц в пространстве Лобачевского и выяснена связь между преобразованием спина и параллельным переносом в этом пространстве.

**Ja. A. Smorodinski**

### **KINEMATICS AND LOBACHEVSKY'S GEOMETRY**

#### Abstract

The relativistic kinematical problems are formulated in terms of the velocity space with Lobachevsky's metric.

The application of a hyperbolic geometry to kinematics is illustrated by some examples. It is shown how the rotation of a top and the kinematics of a particle spin should be treated in Lobachevsky's space. The connection between the spin transformation and the parallel displacement in this space is outlined.

## В в е д е н и е

Хотя прошло уже много лет с тех пор как Клейн<sup>/1/</sup> в 1909 г. обнаружил, что пространство скоростей специальной теории относительности является пространством Лобачевского, т.е. пространством постоянной отрицательной кривизны, эта геометрическая модель недостаточно используется при описании релятивистской кинематики.

Отмеченное в ранней работе Зоммерфельда<sup>/2,3/</sup> соответствие между законом сложения скоростей в релятивистской механике и правилом сложения векторов в геометрии Лобачевского оставалось практически единственной иллюстрацией геометрических свойств пространства скоростей.

Более подробное развитие геометрия пространства скоростей получила в работе Котельникова<sup>/4/</sup>, однако и эта статья осталась малоизвестной. В последние годы эта задача была вновь рассмотрена Черниковым<sup>/5,6/</sup>, активно пропагандировавшим идеи Лобачевского. Из учебников и монографий лишь в книге Фока<sup>/7/</sup> геометрии Лобачевского уделяется достаточно внимания.

Описание релятивистской кинематики с помощью геометрии Лобачевского демонстрирует простой смысл различных формул, которые потеряли свою наглядность в обычной их записи. Это касается формул обычной кинематики и в особенности — кинематики вращающихся тел и, соответственно, в квантовой механике — частиц со спином.

В этой статье будет приведен ряд примеров применения геометрии Лобачевского к физике элементарных частиц и ядерных реакций. При этом все сведения из геометрии будут сообщаться попутно, поскольку у читателя не предполагается наличия предварительного знакомства с этим предметом.

Мне представилась честь посвятить эту статью памяти Игоря Васильевича Курчатова, который любил и понимал теоретическую физику.

### § 2. Векторы в пространстве скоростей

Начнем с небольшого отступления в обычную векторную алгебру. Вектором называют такую совокупность трех величин, которые при вращениях системы координат преобразуются так же как координаты — компоненты радиуса вектора. Ясно, что вопрос о том, каким образом преобразуются любые другие величины, может быть решен только из физических соображений. В механике Ньютона скорость частицы считается также вектором; это связано с тем, что интервал времени является скаляром и, соответственно, операция дифференцирования по времени является скалярной операцией. Отсюда уже следует что пространство скоростей  $\Omega(v)$  обладает теми же геометрическими свойствами, что и координатное пространство  $\Omega(r)$ , являясь пространством эвклидовым. Далее, так как в механике Ньютона масса частицы скаляр, то импульс частицы преобразуется так же, как скорость, а потому и пространство импульсов также является эвклидовым

пространством. Таким образом в механике Ньютона все три трехмерных пространства  $\Omega(r)$ ,  $\Omega(v)$  и  $\Omega(p)$  имеют одинаковую метрику.

В механике Эйнштейна положение меняется. Пространство координат и пространство импульсов в механике Эйнштейна обладает, как известно, псевдоэвклидовой метрикой с инвариантами  $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = (\Delta s)^2$ ;  $\epsilon^2 - c^2 p^2 = m^2$  и их свойства описаны всюду.

Нас в дальнейшем будут интересовать свойства третьего пространства – пространства скоростей. Четырехмерной скоростью или кратко 4-скоростью называют производную координат частицы по собственному времени. Скорость имеет компоненты:

$$\vec{u} = \beta (1 - \beta^2)^{-1/2}; \quad u_0 = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad (2.1)$$

где  $\beta$  – обычная нерелятивистская скорость в единицах скорости света ( $0 < \beta < 1$ ). Скорость  $u$ , хотя и является 4-вектором /она есть отношение импульса частицы к ее массе/, не вполне отвечает физическому понятию скорости. Скоростью обычно называют величину  $\beta$ , равную отношению импульса частицы к ее энергии  $\beta = p/\epsilon$ . Эту величину можно также считать длиной трехмерного вектора, определяющего относительную скорость частицы и начала некоторой избранной системы координат. Геометрия относительных скоростей и составляет тему дальнейшего изложения.

Характерной особенностью 4-скорости является то, что ее 4-длина равна единице:

$$u_0^2 - \vec{u}^2 = 1. \quad /2.2/$$

Поэтому концы вектора 4-скорости в псевдоэвклидовом четырехмерном пространстве всегда лежат на поверхности одной из полостей двухполостного гиперboloида /2.2/, а именно на той из них, которая отвечает положительной величине компоненты  $u_0$ . Таким образом, скоростям всех частиц отвечают точки, расположенные на 3-мерной поверхности, в то время как их импульсы /при разных массах/ могут заполнять все пространство. Поэтому скорость по существу является трехкомпонентной величиной, представляемой точкой на верхней полости гиперboloида. Геометрию скоростей можно рассматривать двумя способами: либо как геометрию векторов в четырехмерном пространстве с псевдоэвклидовой метрикой, либо же как геометрию точек на поверхности гиперboloида в этом пространстве. Положение напоминает положение с поверхностью земли, свойства которой, конечно, можно описывать как свойства поверхности в трехмерном эвклидовом пространстве, однако, удобнее делать это с помощью сферической геометрии в двух измерениях.

При описании пространства скоростей, как поверхности гиперboloида, не возникает необходимости в выделении начала координат и все соотношения выражаются только через взаимные расстояния точек на этой поверхности. В связи с этим такое описание было названо абсолютной геометрией.

Если вместо действительной координаты  $u_0$  ввести мнимую  $u_4 = i u_0$ , то гиперboloид превратится в сферу с радиусом, равным мнимой единице, а скоростям частиц будут отвечать точки, лежащие на верхней половине этой сферы. В таком представлении для вычисления можно использовать формулы сферической тригонометрии, заме-

няя в них радиус  $a$  на  $ia$ . /В дальнейшем радиус  $a$ , равный скорости света, будет всегда считаться равным 1 /.

### § 3. Кинематика Ньютона

Напомним коротко основные кинематические соотношения нерелятивистской механики. Рассмотрим реакцию



Частицы  $c$  и  $d$  могут быть либо теми же самыми, что и частицы  $a$  и  $b$  /рассеяние/, либо отличаться от них /реакция/. Зная массы частиц, можно найти скорость центра инерции  $u$ . Скорости самих частиц будем обозначать теми же буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Скорости  $c$  и  $d$  определяются законами сохранения энергии и импульса. Обычно кинематические соотношения иллюстрируют с помощью окружностей /ср. напр. <sup>18</sup>//. Для нас удобнее воспользоваться чертежом четырехугольника /рис. 1/. На этом рисунке точки отвечают концам векторов скоростей частиц, расстояния между точками — относительным скоростям. Так, например, отрезок  $(ua)$  есть скорость частицы  $a$  относительно точки  $u$ , т.е. скорость  $a$  в системе центра инерции. Отрезок  $ab$  есть скорость  $b$  в системе, где  $a$  покоится и т.д.

Рассматривая рассеяние в какой-либо определенной системе координат, следует приписать отрезкам — сторонам и диагоналям четырехугольника — определенные направления. Так, например, если рассеяние рассматривается в системе, где покоится частица  $a$ , то налетающая частица описывается вектором от  $b$  к  $a$ , две частицы — продукты реакции — векторами, направленными от точки  $a$  к точкам  $c$  и  $d$  соответственно.

Рассмотрим два примера. Рассеяние двух одинаковых частиц. /Рис. 2/. В этом случае точка  $u$  расположена на одинаковом расстоянии от всех вершин, и фигура превращается в прямоугольник. Это значит, что угол между скоростями  $a'$  и  $b'$ , т.е. между разлетающимися частицами в системе, где  $a$  вначале покоилась, равен  $\pi/2$ .

Если массы частиц  $a$  и  $b$  разные, но рассеяние упругое, то фигура превращается в трапецию /рис. 3/.  $ub = ub'$ ;  $ua = ua'$ . Скорость после рассеяния частицы  $b$  в системе, где  $a$  вначале покоилась /отрезок  $ab'$ /, связана с углом рассеяния  $\theta$  /в этой системе угол  $bab'$ / формулой, которая находится из треугольника  $b'ua$ .

$$\cos \theta = \frac{b_u^2 - a_u^2 - b_a'^2}{2 a_u b_a'}$$

где  $a_u$  и  $b_u$  — скорости частиц  $a$  и  $b$  в системе  $u$  /не зависящие от угла рассеяния/, а  $b_a'$  — скорость частицы  $b$  после рассеяния в системе, где  $a$  покоилась вначале.

Из этих примеров видно, что плоская тригонометрия полностью описывает связь между скоростями частиц в разных системах координат /точнее — между относительными скоростями/ и углом рассеяния. Можно еще добавить, что если нужно рассмотреть

движение относительно какой-либо другой системы координат, то нарисовав еще одну точку /в той же плоскости или в пространстве/ и соединив ее с углами четырехугольника, нетрудно получить все нужные кинематические соотношения. Заметим еще, что при заданных массах четырехугольник определяется двумя параметрами: длиной диагонали – относительной скоростью частиц и углом между диагоналями – углом рассеяния в системе ц.и.

Описанное соответствие между кинематикой и плоской тригонометрией есть следствие того, что мы называли евклидовым характером пространства скоростей.

Такое описание кинематики оказывается обладает важным свойством. При переходе к механике Эйнштейна можно не менять рисунков, а лишь заменить формулы плоской тригонометрии на формулы геометрии гиперболической /или сферической с мнимым радиусом<sup>x/</sup>.

#### § 4. Геометрия Лобачевского в пространстве скоростей

Геометрия Лобачевского отличается от обычной евклидовой отсутствием аксиомы о параллельных. Это прежде всего приводит к тому, что сумма углов треугольника перестает быть равной  $\pi$ , а всегда меньше  $\pi$ . При этом равные углы могут быть только у равных треугольников; эта геометрия не знает подобных треугольников.

Наиболее простой и "наглядной" реализацией геометрии Лобачевского является верхняя полость гиперboloида в пространстве /4-мерном / с псевдоевклидовой метрикой или же поверхность шара с радиусом равным  $i$ <sup>xx/</sup>.

Для того, чтобы установить соответствие между геометрией Лобачевского и пространством скоростей /трехмерным/, надо установить связь между расстояниями на поверхности гиперboloида и относительными скоростями. Напомним, что на поверхности гиперboloида описывается четырехмерная скорость; очевидно, однако, что расстояние между двумя точками /определяемое как  $ds^2 = du_0^2 - d\vec{u}_0^2$  / не имеет ничего общего с относительной скоростью. Если определять расстояние на поверхности гиперboloида, как длину отрезка геодезической /гиперболы/, соединяющей эти точки, то такую величину можно выразить через относительную скорость. Для этого рассмотрим два вектора 4-скорости  $u_1$  и  $u_2$  и составим их четырехмерное скалярное произведение

$$u_1 u_2 = u_{10} u_{20} - \vec{u}_1 \vec{u}_2 . \quad /4.1/$$

---

<sup>x/</sup>Если же вычисления вести в пространстве импульсов, а не скоростей, то в релятивистской кинематике возникают более сложные геометрические соотношения, связанные со свойствами эллипсов /ср.<sup>8/</sup>.

<sup>xx/</sup> Геометрию Лобачевского часто реализуют в терминах проективной геометрии, проектируя точки шара /или гиперboloида/ на плоскость, касательную к нему. Такая проекция изменяет углы, но превращает криволинейный треугольник в прямолинейный. Есть и другие способы описания геометрии. Подробности /которые нам здесь не нужны/ можно найти у Клейна<sup>10/</sup>.

Так как это произведение инвариантно, то его проще всего вычислять в системе, где одна из частиц покоится, т.е. в системе, где одна из скоростей, например,  $u_1$ , имеет только одну компоненту  $u_{10} = 1$ . В этой системе  $u_{20}$  равно  $(1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ , где  $\beta$  по определению - относительная скорость. Поэтому

$$u_1 u_2 = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad /4.2/$$

Так как 4-длины  $u_1$  и  $u_2$  равны единице, то скалярное произведение равно косинусу угла между векторами.

Если бы мы имели дело с пространством с евклидовой метрикой, то скалярное произведение двух единичных векторов было бы равно просто косинусу угла между ними. В пространстве с псевдоевклидовой метрикой естественно приравнять это произведение гиперболическому косинусу

$$u_1 u_2 = \text{ch}(u_1 u_2) = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \equiv \gamma_{12}. \quad /4.3/$$

Обозначая фактор Лоренца через  $\gamma_{12}$ , мы отмечаем, что он определяется относительной скоростью частиц 1 и 2. Из этого определения следует, что<sup>x/</sup>

$$\text{sh}(u_1 u_2) = \beta (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad /4.4/$$

$$\text{th}(u_1 u_2) = \beta. \quad /4.5/$$

Аргументы гиперболических функций есть гиперболический угол, определяемый проще всего из скалярного произведения /4.3/. Обозначение дуги, совпадающее с символом скалярного произведения, вряд ли может привести к недоразумениям.

Соотношения /4.3/-/4.4/ устанавливают связь между расстоянием между точками  $u_1$  и  $u_2$  на поверхности гиперboloида /или мнимой сферы/ и скалярной относительной скоростью. После этого можно рисовать точки гиперboloида на плоскости, но при вычислениях использовать формулы гиперболической геометрии. В такой геометрии сумма углов треугольника меньше  $\pi$ , а разность между  $\pi$  и суммой углов треугольника равна его площади:

$$S = \pi - A - B - C. \quad /4.5/$$

Одним из следствий /4.5/ является то, что в гиперболической геометрии отсутствуют подобные треугольники. Треугольники с равными углами просто равны друг другу. Физическое объяснение сразу следует из предельного характера скорости света. В кинематике Ньютона соотношения между скоростями не изменяются, если все скорости изменить в одно и то же число раз. В кинематике Эйнштейна это уже несправедливо, так как отношение скоростей частиц к скорости света изменится. Этот пример хорошо иллюстрирует связь между конечностью скорости света и неевклидовой геометрией пространства скоростей.

Для большей наглядности можно рисовать треугольник с вогнутыми сторонами, сохраняя углы между ними /рис. 4/, длины сторон при этом искажаются.

<sup>x/</sup> Если масса одной из частиц  $m$ , то в системе, где другая частица покоится, энергия частицы равна  $m \text{ch}(u_1 u_2)$ , а импульс  $p = m \text{sh}(u_1 u_2)$ .



Для решения треугольников в гиперболической геометрии служат несколько формул /см., например, /9/.

Формула косинусов

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos A . \quad /4.6/$$

При стремлении кривизны к нулю /длин сторон к нулю, так как мы положили радиус кривизны равным 1/, /4.6/ переходит в теорему косинусов плоской тригонометрии.

Вторая формула косинусов

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \operatorname{ch} a \quad /4.7/$$

переходит в тождество при  $A + B + C = \pi$ .

Формула синусов

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C} . \quad /4.8/$$

К этому надо добавить еще формулу для площади треугольника

$$\cos \frac{S}{2} = \frac{1 + \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2}} . \quad /4.9/$$

Если пользоваться этими формулами и не использовать следствия теоремы о параллельных /равенство накрестлежащих углов, площадь треугольника и т.д./, то кинематические соотношения можно получать из рисунков плоской геометрии.

В качестве примера рассмотрим столкновение одинаковых частиц. Вернемся к рис. 2. Расстояние между точками  $a$  и  $b$  отвечает относительной скорости частиц  $a$  и  $b$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(ab) &= \gamma_{ab} \\ \operatorname{th}(ab) &= \beta_{ab} . \end{aligned} \quad /4.10/$$

Скорость системы ц.и. по-прежнему определяется точкой, делящей отрезок  $(ab)$  пополам. Она равна

$$\beta_{au} = \operatorname{th} \frac{ab}{2} = \left( \frac{\operatorname{ch}(ab) - 1}{\operatorname{ch}(ab) + 1} \right)^{1/2} . \quad /4.11/$$

Если заданы координаты всех вершин /т.е., например, заданы скорости и угол рассеяния в системе ц.и./, то скорости частиц после рассеяния, например, в системе  $a$  определяются по формуле косинусов

$$\gamma_{ab'} = \operatorname{ch}^2(au) + \operatorname{sh}^2(au) \cos \alpha \quad /4.12/$$

$$\gamma_{aa'} = \operatorname{ch}^2(au) - \operatorname{sh}^2(au) \cos \alpha . \quad /4.13/$$

Угол между рассеянными частицами /угол  $a'ab'$ / в системе  $a$  выражается через

$$\langle (a' a b') \rangle = \frac{\pi - \delta}{2}, \quad /4.12/$$

где  $\delta$  – гиперболический дефект – площадь треугольника  $a' a b'$  /в единицах  $c^2$  / определяется по формуле /4.8/ из известных длин сторон треугольника. Таким образом, все кинематические соотношения определяются, если заданы координаты вершин и точки пересечения диагоналей прямоугольника /или в общем случае четырехугольника/. Определив “длины” всех сторон и площади треугольника, мы получаем полное решение задачи. Отметим, что все соотношения, получаемые таким образом, зависят только от скоростей частиц, но не от их масс.

Если требуется определить кинематические соотношения в какой-либо другой системе координат, то для этого надо только отметить точку, описывающую эту систему на плоскости скоростей, и соединить ее с вершинами основного четырехугольника. После этого задача решается тем же методом.

Такое положение возникает при описании распада одной частицы на две. В этом случае одна из диагоналей четырехугольника вырождается в точку, и мы приходим к рис. 5, где  $L$  означает скорость системы наблюдателя,  $c$  – скорость распадающейся частицы,  $a$  и  $b$  – скорости продуктов распада /  $c$  – одновременно есть скорость системы ц.п. продуктов распада/. Скорость  $a$  в системе  $L$  связана с углом вылета  $a$  в этой системе по формуле косинуса

$$\cos a = \frac{-ch(ac) + ch(La) ch(Lc)}{sh(La) sh(Lc)} \quad /4.13/$$

Можно далее выразить все величины через энергии и импульсы частиц /как это обычно и делается/, однако, при этом будет не столь очевидно, что соотношение зависит только от скоростей, но не от масс частиц. Заметим, что минимальная и максимальная скорости определяются, если повернуть  $(ab)$  вокруг точки  $c$  так, чтобы она легла на линию  $Lc$ .

Конечно, примеры, разобранные выше, весьма просты и их можно исследовать обычным алгебраическим методом, но все же нельзя не согласиться с тем, что геометрический метод нагляднее.

## § 5. Сложение скоростей

Как уже говорилось, скоростью называют две разные величины: скорость – вектор и относительная скорость – расстояние между двумя точками в гиперболической геометрии. 4-скорости складываются по обычным правилам линейного векторного пространства, в то время как сложение относительных скоростей определяется совсем другими правилами<sup>x/</sup>.

---

<sup>x/</sup> Относительная скорость входит в определение инвариантного сечения реакции. Если плотности сталкивающихся частиц равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , то число актов

Прежде всего надо отметить, что в гиперболической геометрии нельзя определить направления скорости; так как геодезическая линия кривая, то направление ее меняется. Поэтому, в частности, направление скорости частицы  $b$  в системе  $a$ , не совпадает /вернее не строго противоположно/ с направлением скорости частицы  $a$  в системе  $b$  / хотя величины скоростей и равны/. Угол между направлениями  $(ab)$  и  $-(ba)$  есть ничто иное, как угол поворота вектора при параллельном переносе вдоль кривой  $ab$ . Он, очевидно, определяется только длиной  $ab$ . Ниже будет показано, что этот угол  $a$  определяется формулой

$$\sin a = th(ab) . \quad /5.1/$$

Формулы, служащие для решения гиперболических треугольников, позволяют установить и законы сложения векторов. Обратимся к рис. 6. Физический смысл его таков: система  $b$  движется относительно системы  $a$  со скоростью, определяемой "длинной" отрезка  $(ab)$ , т.е. со скоростью  $th(ab)$ ; в системе  $b$  частица  $c$  движется со скоростью  $th(bc)$ . Тогда  $th(ac)$  есть скорость частицы  $c$  относительно системы  $a$ .

Величина  $ac$  находится по формуле косинусов:

$$ch(ac) = ch(ab) ch(bc) - sh(ab) sh(bc) \cos b \quad /5.2/$$

/  $b$  - угол при этой вершине/. Угол  $a$  находится по теореме синусов

$$\sin a = sh(bc) \frac{\sin b}{sh(ac)} . \quad /5.3/$$

Этими формулами и определяется закон сложения скоростей в кинематике Эйнштейна.

реакции в объеме  $dV$  и в интервале  $dt$  определяется обычно формулой:

$$dN / dt dV = \rho_1 \rho_2 \sigma V , \quad /x/$$

где  $V^2 = (\beta_2 - \beta_1)^2 - (\beta_1 \times \beta_2)^2$ ,  $\beta_1$   $\beta_2$  -

векторы скоростей частиц. Формулу можно переписать так;

$$\frac{dN}{dt dV} = (j_1^2 j_2^2)^{1/2} sh a \cdot \sigma . \quad /xx/$$

Здесь  $j_{1,2}^2 = \rho_{1,2}^2 - i_{1,2}^2$  - 4-длины векторов тока, а  $a$  - "угол" между ними. Если через  $\rho_{10}$  и  $\rho_{20}$  обозначить плотности /число частиц в единице объема/ в собственных системах координат, то /xx/ можно записать

$$\frac{dN}{dt dV} = \rho_{01} \rho_{02} \sigma sh a . \quad /xxx/$$

Таким образом, относительная скорость в нерелятивистской формуле переходит в  $sh a$  в формуле релятивистской /ср./19/.

Включим теперь в рассмотрение частицы без массы - фотона и нейтрино. Их скорость /равная 1/ изображается точкой, находящейся на бесконечном расстоянии. Геодезические, соединяющие эту бесконечно удаленную точку с двумя любыми другими точками, по определению параллельны / как линии, пересекающиеся на бесконечности/. Угол между двумя такими геодезическими /в бесконечно-удаленной вершине/, опять-таки по определению, равен нулю. В геометрии Лобачевского такой кинематической диаграмме отвечает утверждение, что через каждую точку можно провести прямую, параллельную данной. Таких прямых, как это видно из рис. 7, существует две: одна пересекает исходную прямую справа /на бесконечности/, другая пересекает ее слева. Угол, который составляет параллельная прямая с перпендикуляром, называют углом параллельности Лобачевского и обозначают через  $\Pi(x)$ , где  $x$  - расстояние до исходной прямой. При  $x=0$ , очевидно,  $\Pi(x) = \pi/2$ ; с увеличением расстояния  $x$   $\Pi(x)$  стремится к нулю. Угол параллельности связан с расстоянием  $x$  формулой

$$\operatorname{th} x = \cos \Pi(x). \quad /6.1/$$

Вместо угла параллельности можно рассмотреть его дополнение до  $\pi/2$ . Эту величину называют гиперболической амплитудой или гудерманианом

$$gdx + \Pi(x) = \pi/2. \quad /6.2/$$

Формула /6.1/ тогда запишется так:

$$\operatorname{th} x = \sin(gdx). \quad /6.3/$$

Угол  $\alpha$  в формуле /5.1/ и есть  $gdx$ . Можно дать этим формулам кинематическую интерпретацию. Параллельные прямые, пересекающиеся в бесконечно-удаленной точке, отвечают скоростям фотона /или нейтрино/ относительно двух каких-либо систем координат. Если, например,  $\pi^0$ -мезон распадается на два кванта /рис. 8/, то кинематическая диаграмма имеет два угла, равных нулю. Угол разлета квантов  $\theta$  - есть угол в вершине гиперболического треугольника, два других угла которого равны нулю. Его величину можно выразить через  $\operatorname{th} x$ , скорость  $\pi^0$  мезона и угол вылета  $\alpha$  в системе  $\pi_0$  относительно скорости наблюдателя  $L$ . Нетрудно видеть, что этот угол минимален, когда угол вылета  $\alpha$  равен  $\pi/2$ . В этом случае  $\theta$  есть, очевидно, удвоенный угол параллельности  $\operatorname{th} x = \beta$

$$\theta_{min} = 2\Pi(x) = 2\arccos \beta, \quad /6.4/$$

где  $\beta$  - скорость пиона.

В качестве второго примера рассмотрим релятивистскую абберацию - преобразование угла между фотоном /или нейтрино/ и относительной скоростью двух систем /рис. 9/.

Угол излучения фотона в системе  $g$  относительно относительной скорости  $ba$  обозначен через  $\theta'$ . Тот же угол в системе  $b$  обозначен через  $\theta$ . Пунктир - перпендикуляр на  $(ab)$ .

"Прямые"  $(a_y), (c_y)$  и  $(b_y)$  параллельны.

Поэтому

$$\begin{aligned} -\cos \theta' &= \text{th } x \\ \cos \theta &= \text{th } y . \end{aligned} \quad /6.5/$$

Составим  $\text{th}(x+y)$ , который равен  $\beta$  /скорость в системе  $b$  /:

$$\frac{\cos \theta - \cos \theta'}{1 - \cos \theta \cos \theta'} = \beta . \quad /6.6/$$

Решая<sup>/6.6/</sup> относительно одного из  $\cos$ , получим обычные формулы. Если угол  $\theta'$  равен  $\pi/2$ , то треугольник становится прямоугольным /один угол  $\theta$ , другой -  $\pi/2$  /. В таком треугольнике третий угол равен  $\arccos \beta$  /по свойствам параллельных/. Фотон, который в системе  $a$  вылетел под углом  $\pi/2$ , приходит в системе  $b$  под углом /при  $\beta \rightarrow 1$  /, почти совпадающим с направлением движения. Это значит, что наблюдатель "видит" светящийся объект из системы  $a$  повернутым на угол  $\pi/2$ . Это красивое явление поворота быстро движущегося предмета было обнаружено Террелом<sup>/11/</sup>. Интересно отметить, что в гиперболической геометрии существует треугольник, в котором все три угла равны нулю и у которого, следовательно, стороны попарно параллельны. Площадь такого треугольника равна  $\pi/2$ , так как она равна разности между  $\pi/2$  и суммой углов треугольника. Такой кинематический треугольник встретится при рассмотрении распада на 3 фотона, которым и будут соответствовать три бесконечно удаленных точки.

### § 7. Волчок и томасовская прецессия

Рассмотрим теперь кинематику вращающейся частицы. В этом случае польза от гиперболической геометрии становится еще более ощутимой.

В нерелятивистской механике вращение описывается трехмерным вектором угловой скорости. Обобщение его на механику Эйнштейна требует некоторой осторожности. Именно, можно считать угловую скорость, подобно магнитному полю, частью антисимметричного тензора второго ранга. Тогда в релятивистском случае потребуется вводить еще один трехмерный вектор, подобный полю электрическому. Такой путь приводит к объединению угловой скорости и скорости центра тяжести в один тензор, похожий на тензор, объединяющий электрический и магнитный дипольные моменты. Физический смысл объединения состоит в том, что к угловой скорости прибавляется орбитальная. Построенный таким образом тензор просто связан с полным угловым моментом частицы /сумма орбитального и спинного угловых моментов/. Можно, однако, не усложнять картину и не впутывать в дело орбитальное движение. Рассмотрим волчок, вращающийся в равномерно движущейся системе координат. Каждая точка его поверхности движется относительно покоящегося в лаб. системе наблюдателя по кривой, составленной из суммы вращательного и поступательного движений. Преобразование Лоренца из системы волчка в лабораторную систему связывает чистое вращение с движением по кривой. Когда мы

говорим о вращении, то мы интуитивно отделяем поступательное движение от собственного вращения. Нетрудно придать такой операции строгий кинематический смысл. Для этого определим 4-вектор угловой скорости так, чтобы в собственной системе координат у него были бы только три пространственные компоненты, совпадающие с компонентами нерелятивистской угловой скорости. Ковариантным выражением этого свойства будет ортогональность 4-вектора угловой скорости, линейной скорости частицы

$$\omega u = 0. \quad /7.1/$$

Формула /7.1/ служит определением 4-вектора в любой другой системе координат. Именно, угловая 4-скорость частицы, движущейся со скоростью  $u = (\gamma, \mathbf{u})$ , где  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ , определяется формулами:

$$\vec{\omega} \rightarrow \frac{(\vec{\omega} \vec{u}) \vec{u}}{1 + \gamma} + \vec{\omega}_0; \quad \omega_0 \rightarrow (\vec{\omega} \vec{u}). \quad /7.2/$$

В гиперболической геометрии формулы /7.2/ показывают, что вектор угловой скорости лежит в трехмерном пространстве, ортогональном скорости частицы, т.е. вектор угловой скорости всегда остается трехмерным вектором. Рассмотрим компоненты этого вектора с точки зрения разных наблюдателей. Для того, чтобы можно было сравнивать компоненты, наблюдатели должны как-то условиться о методе сравнения самих систем координат. Обозначим систему наблюдателя через  $L$ , а систему частицы через  $R$ . Тогда описание угловой скорости формулами /7.2/ есть описание ее в системе  $L$ . Можно поступить иначе, построив в системе  $L$  другую систему координат, отвечающую системе  $R$ . Тогда наблюдатель в  $R$  может сообщить наблюдателю в  $L$  три компоненты вектора скорости, по которым можно будет построить вектор в системе  $L$ . Здесь мы встречаемся с тем, как в неевклидовой геометрии встает вопрос о сравнении векторов, находящихся в разных точках пространства. Для того, чтобы такое сравнение можно было произвести, необходимо перенесение сравниваемых векторов в одну точку. При этом и возникает обсуждаемый нами вопрос о том, как определить такую операцию инвариантным образом. Прежде всего оба наблюдателя могут определить одну из осей в направлении их относительной скорости /при этом один из наблюдателей будет считать скорость положительной, другой - отрицательной/.

Для того, чтобы определить вторую ось, надо построить нормаль к плоскости: выберем еще одну вспомогательную систему со скоростью, непараллельной относительной скорости систем  $L$  и  $R$ . Обозначим ее через  $U$ . Тогда с помощью антисимметричного тензора четвертого ранга построим 4-вектор  $N$ :

$$N_a = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} L^\beta R^\gamma U^\delta. \quad /7.3/$$

Нетрудно видеть, что в каждой из трех систем  $L$ ,  $R$ ,  $U$  этот вектор сводится к обычному трехмерному векторному произведению. Действительно, в этих системах один из индексов равен "0", тогда два другие пробегают лишь пространственные значения. Таким образом в системах  $L$  и  $R$  построены по две пространственные оси. Третья ось в каждой системе строится как перпендикуляр к уже построенным двум. Геометрически описанное построение отвечает параллельному переносу вектора вдоль геодези-

ческой, соединяющей точки  $L$  и  $R$  <sup>хх/</sup>. Ясно, что поскольку наблюдатели находятся в разных системах, такая "синхронизация" систем координат не может привести к какому-либо противоречию <sup>хх/</sup>. Мы встретимся с новым явлением, если будем производить параллельный перенос по замкнутому контуру. Как известно из геометрии, при параллельном переносе вдоль замкнутого контура вектор не возвращается в исходное положение, а поворачивается на угол, равный площади, охватываемой контуром. Поворот происходит в направлении, обратном движению по контуру /т.е. вектор "не доходит" до своего исходного положения/.

Простейший пример такого рода есть так называемая томасовская прецессия. Рассмотрим волчок, летящий со скоростью  $\beta$ . Пусть, он получает ускорение  $\dot{\beta}$  и его скорость через время  $dt$  становится равной  $\beta + \dot{\beta} dt$  /рис. 10/. Для того, чтобы выяснить, как изменится направление угловой скорости, необходимо сравнить вектор угловой скорости, перенесенный из исходной системы волчка  $R$  в систему наблюдателя  $L$ , с направлением того же вектора в системе волчка  $R_{dt}$ , также перенесенного в систему  $L$ .

Искомая разность есть не что иное, как поворот вектора при параллельном переносе вдоль периметра треугольника, равный его площади. Для его вычисления удобно воспользоваться не формулой /4.8/, а ей эквивалентной:

$$\sin S = \frac{1 + \operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c}{8 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2}} [\epsilon u_A u_B u_C].$$

В этой формуле последний член есть длина нормали /6.2/ к плоскости треугольника,  $u_A, u_B, u_C$  - 4-скорости. В системе, где, например, покоится  $a$ , этот множитель равен просто длине векторного произведения пространственных частей 4-скоростей  $b$  и  $c$ . Положим  $\operatorname{th} a = \operatorname{th} b = \beta$ ; замечая, что  $\dot{\beta} dt$  бесконечно мала и что  $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b = \gamma$ ,  $2 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} = 1 + \gamma$ , получим

$$S = -\frac{\gamma}{1 + \gamma} \beta \times \dot{\beta}. \quad /7.5/$$

Таким образом, волчок под действием ускорения  $\dot{\beta}$  прецессирует со скоростью:

$$\Omega = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \beta \times \dot{\beta}. \quad /7.6/$$

В низшем порядке по скорости скорость прецессии:

$$\Omega \cong -\frac{1}{2} \beta \times \dot{\beta}, \quad /7.7/$$

---

<sup>хх/</sup> Мы говорили, что направление относительной скорости  $R$  с точки зрения  $L$  не вполне противоположно направлению скорости  $L$  с точки зрения  $R$ . Такой "поворот", связанный с псевдоэвклидовой метрикой, и приводит 4-вектор к трехкомпонентному виду.

<sup>хх/</sup> Мы говорили "синхронизация" по аналогии с операцией "синхронизации" часов - аналогии, которая, как мы увидим ниже, имеет глубокий смысл.

т.е. площади треугольника, вычисленного по формуле эвклидовой геометрии. Этот эффект называется томасовской прецессией и обычный его вывод достаточно утомителен /ср. 12/.

В связи с томасовской прецессией можно несколько подробнее остановиться на вопросе о "синхронизации систем координат". Предположим, что существуют три системы наблюдателей движущиеся равномерно так, что сначала система 1 встречается с системой 2, потом 2 встречается с системой 3, и, наконец, 3 опять встречается с системой 1. Система 1 должна иметь большие размеры, чтобы такая последняя встреча могла бы произойти /ясно, что она произойдет в другом месте системы 1, по сравнению с первой встречей/. Если во время первой встречи наблюдатели 1 и 2 "синхронизируют" свои системы координат, после чего во время встречи с наблюдателем 3 наблюдатель 2 передает ему полученное направление, то при возвращении информации в систему 1, в момент второй встречи наблюдателей 3 и 1, система окажется повернутой на томасовский угол прецессии. Таким образом, в движущихся системах нельзя выбрать единых трехмерных систем координат. Этот эффект похож на известный парадокс часов, который иллюстрируется тем же рисунком 11. Если наблюдатели будут при встречах передавать информацию о времени, то при возвращении в систему 1 часы отстанут. Величина отставания, как известно, равна периметру треугольника /в обычном пространстве/, а "отставание" системы координат равно его площади / в пространстве скоростей<sup>х/</sup>.

### § 8. С п и н

Все, что было сказано о волчке, переносится и на кинематику спина<sup>хх/</sup>. В частности, закон преобразования спина совпадает с /2.2/, так как преобразование есть кинематическая операция, зависящая только от скорости. Это, однако, справедливо лишь для свободных частиц. Если частица находится во внешнем поле, то положение меняется. Частица во внешнем поле не имеет определенного импульса и скорости. Поэтому для нее нельзя ввести системы покоя, а, следовательно, и нельзя просто определить спин. В результате для частицы в поле возникают примеси состояний с более низкими значениями спина, с которыми приходится бороться путем введения различных дополнительных условий. Только для частиц со спином  $1/2$  /и, конечно, частиц без спина/ и для

---

<sup>х/</sup> Обычно парадокс часов рассматривают с помощью только двух наблюдателей. При этом приходится вводить неравномерное движение одного из них /поворот в обратный путь/. При трех системах этой трудности нет, но приходится говорить о синхронизации часов вдоль первой системы, так как встречи 1-2 и 3-1 происходят в разных ее точках. Впрочем синхронизация часов вдоль равномерно движущейся системы координат трудности не представляет. Оба эффекта—"отставание часов" и "поворот" координатных осей зависят, конечно, и от кривизны пространства.

<sup>хх/</sup> А также и на другие мультипольные моменты ядер, о которых мы здесь говорить не будем /ср./<sup>13/</sup>. Связь спина с геометрией Лобачевского была рассмотрена в в/14/.



фотона из-за градиентной инвариантности спин остается хорошо определенным понятием. Мы будем говорить поэтому только о свободных частицах.

Если рисовать спин как вектор перпендикулярных скоростей, то прямо из рис. 12 видно, что с точки зрения двух наблюдателей А и В угол, который составляет спин со скоростью, отличается на угол при вершине  $R$  — собственной системы частицы. Если частица не имеет массы, то угол при  $R$  равен нулю. Отсюда сразу следует, что продольно-поляризованная частица с массой ноль остается продольно-поляризованной в любой системе координат, т.е. что понятие продольного нейтрино и кругово-поляризованного фотона суть понятие релятивистски инвариантные.

Если частица со спином рассеивается, что является аналогом ее ускорения в классической задаче, то кроме изменения направления спина при рассеянии в собственной системе  $\phi$  спин еще претерпевает томасовский поворот  $\Omega$ , рассчитываемый из площади треугольника с вершинами, отвечающими системе лабораторной, и систем покоя частицы до и после рассеяния<sup>х/</sup>. Поэтому суммарный поворот спина  $\psi$  равен\*

$$\psi = \phi - \Omega .$$

Прецессия спина играет существенную роль при рассеянии. Поворот спина при рассеянии, например, электрона в кулоновом поле на языке классической механики означает связь спина с орбитой.

Параллельный перенос спина позволяет наглядно описывать и сложение спинов в системах частиц. Так как параллельный перенос позволяет перенести все спины в одну точку /в одну систему координат/, и углы между перенесенными спинами просто вычисляются по формулам гиперболической геометрии, то задача сводится к сложению спинов в одной системе координат, т.е. к обычной нерелятивистской задаче.

### § 9. Заключение

Этой статьей мы хотели обратить внимание на почти очевидное обстоятельство, что работая с векторами в пространстве скоростей, надо понимать геометрию этого пространства. Подобно тому, как в обычной геометрии можно обойтись аналитическими формулами, никогда не прибегая к наглядным методам тригонометрии, так и в кинематике Эйнштейна можно обойтись без чертежей и тригонометрических формул. Однако такой путь, который в свое время был идеалом механики Лагранжа<sup>кх/</sup>, вряд ли может быть идеалом в наше время. Аппарат теоретической физики стал сейчас настолько сложным, что любые наглядные /а тем более строгие/ модели должны играть все большую роль в науке.

---

х/ Этот эффект был описан Стаппом<sup>/16/</sup>. На его связь с геометрией Лобачевского указывал недавно Вик<sup>/17/</sup>.

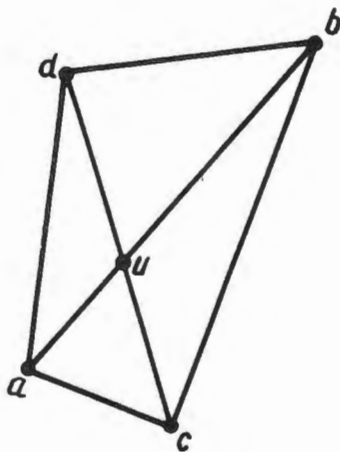
кх/ Лагранж писал в предисловии к своей "Аналитической механике", что его "... методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу" /18/.

В заключение мне хотелось бы поблагодарить Н.А. Черникова, с которым обсуждались затронутые здесь задачи.

### Л и т е р а т у р а

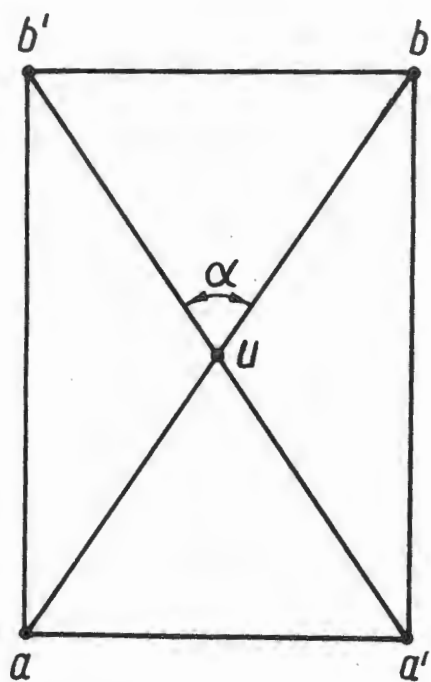
1. Ф. Клейн. Сб. Новые идеи в математике. Вып. 5, СПб 1909, стр. 144.
2. А. Зоммерфельд. Phys. Zs. 10, 286 /1909/.
3. А. Зоммерфельд. Электродинамика. М., 1958, стр. 322.
4. Н. Котельников. Сборник в память Лобачевского. Казань, 1928 г.
5. Н.А. Черников. Научные доклады Высшей школы. 2, 158, /1958/.
6. Н.А. Черников. Препринт № 723, Дубна 1961.
7. В.А. Фок. Теория пространства и времени. 2 изд. М.-Л., 1961.
8. Л. Ландау, Е. Лифшиц. Теория поля, 4 изд. И., Л., 1962, стр. 42 и дальше.
9. А.Р. Ямпольский. Гиперболические функции. М., 1960.
10. Р. Клейн. Неэвклидова геометрия. М.-Л. 1936.
11. J.Terrell. Phys. Rev. 116, 1041 (1959).
12. С.Moller. Theory of Relativity. Oxford, 1952, p. 53.
13. В.Л. Любошиц и Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 42, 846, 1962.
14. Я. Смородинский. ЖЭТФ, 43, № 6, 1962.
15. Н.А. Черников. ДАН 114, 530 /1957/.
16. H.Stapp. Phys. Rev. 103, 425 (1957).
17. G.Wick. Am. of Phys. 18, 65 (1962).
18. Лагранж. Аналитическая механика, т. 1, стр. 5, М.-Л., 1938.

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 октября 1962 года.



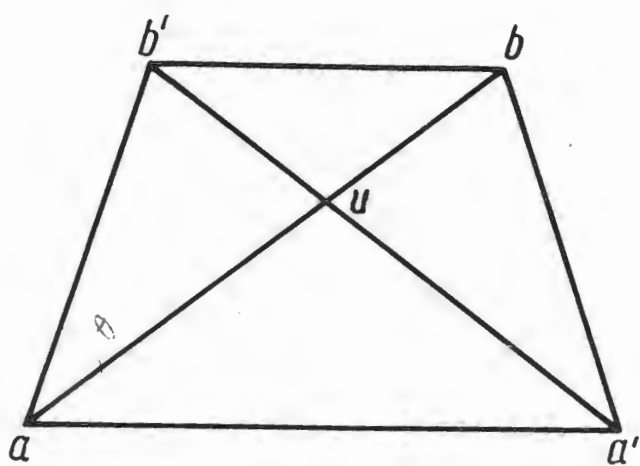
Р и с. 1.

Четырехугольник, описывающий кинематику реакции  $a + b + c + d$ , вершины — концы векторов скоростей — трехмерных в нерелятивистской механике, четырехмерных в релятивистской.  $u$  — конец вектора скорости системы центра инерции. Расстояния между точками — относительные скорости в нерелятивистской механике и гиперболические тангенсы этих скоростей в релятивистской.



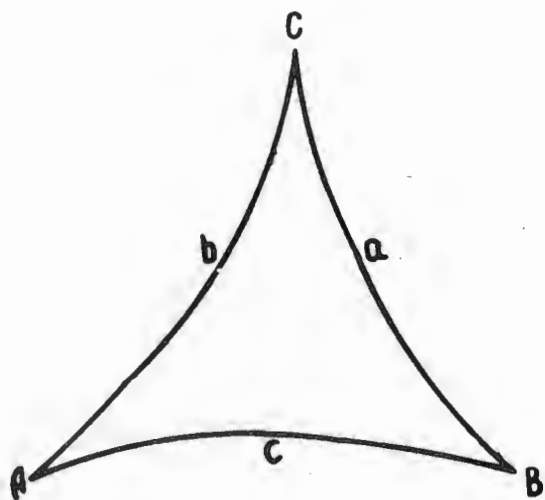
Р и с. 2.

Упругое столкновение одинаковых частиц  $a + b \rightarrow a' + b'$ .



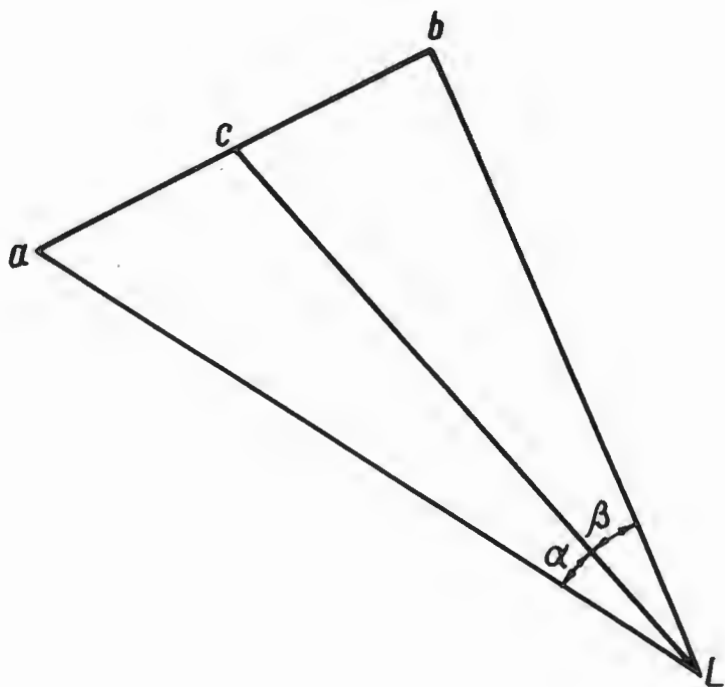
Р и с. 3.

Упругое столкновение разных частиц.



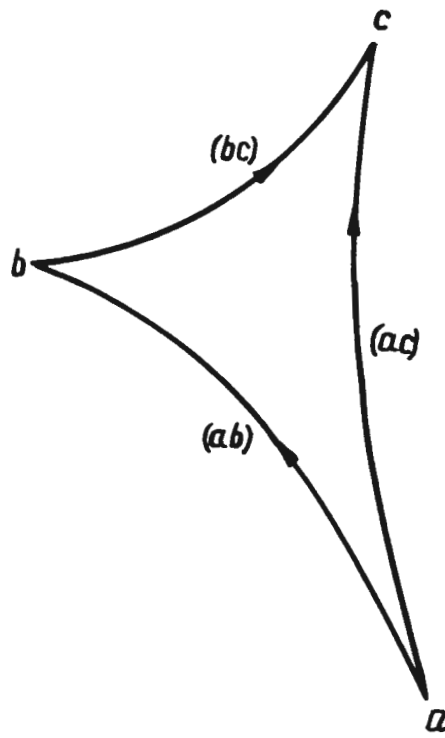
Р и с. 4.

Схематический чертеж гиперболического треугольника. Сумма углов не равна  $\pi$



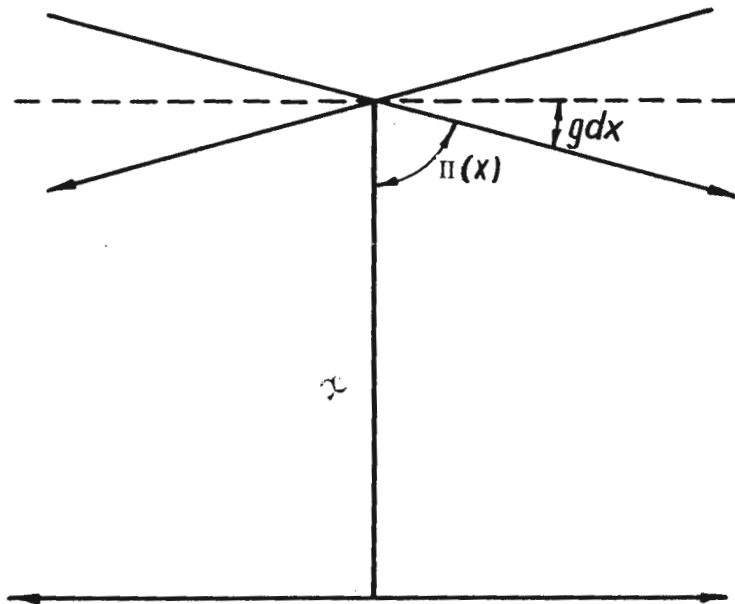
Р и с. 5.

Распад частицы  $c \rightarrow a + b$  .  $L$  - скорость лабораторной системы координат.



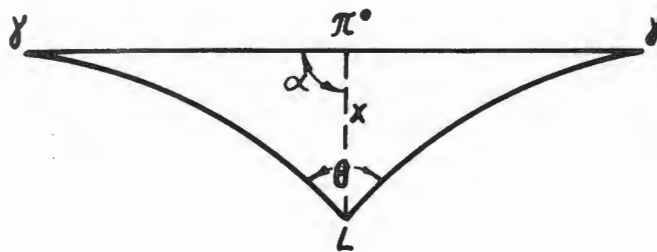
Р и с. 6.

Сложение скоростей в гиперболической геометрии  $(ab) + (bc) = (ac)$ .



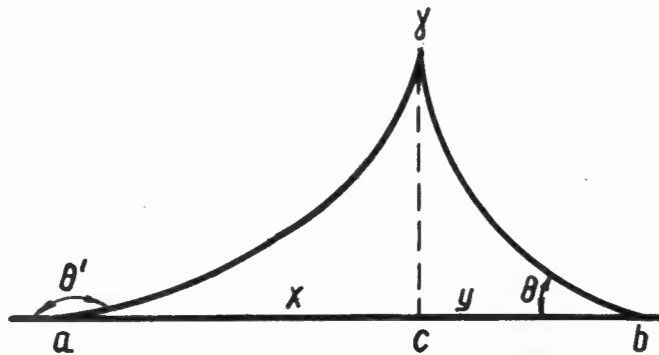
Р и с. 7.

Параллельные прямые - левая и правая на плоскости Лобачевского.  $\Pi(x)$  угол параллельности Лобачевского;  $g dx + \Pi(x) = \pi/2$ .



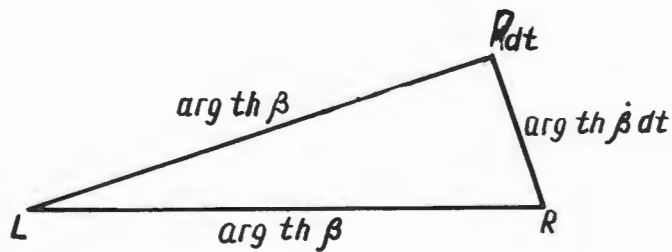
Р и с. 8.

Распад  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ .  $\text{th } \beta$  скорость  $\pi$ -мезона.  $L$  - 4-скорость системы наблюдателя.



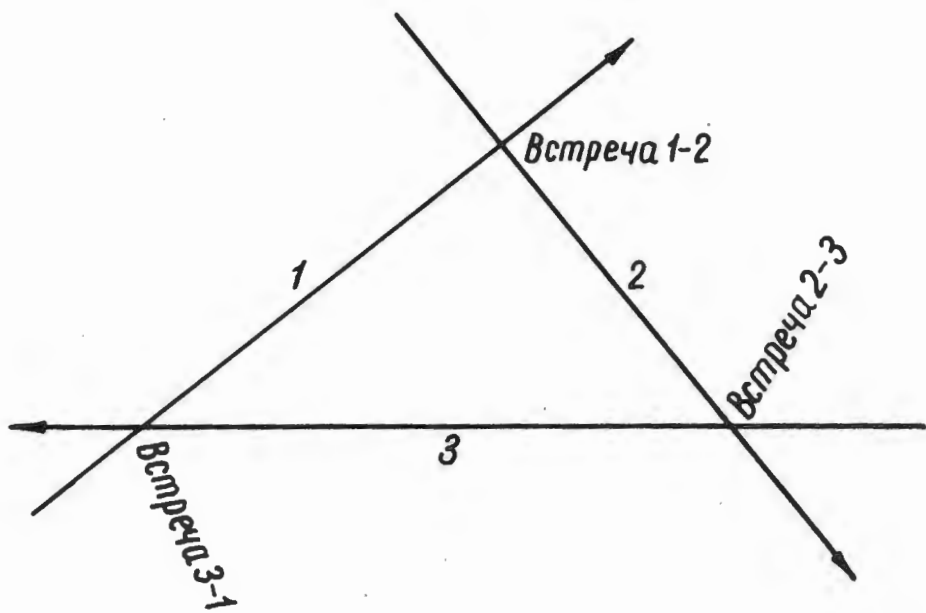
Р и с. 9.

Абберация. Наблюдатель  $a$  видит фотон под углом  $\theta'$ ; наблюдатель  $b$  видит его под углом  $\theta$ .



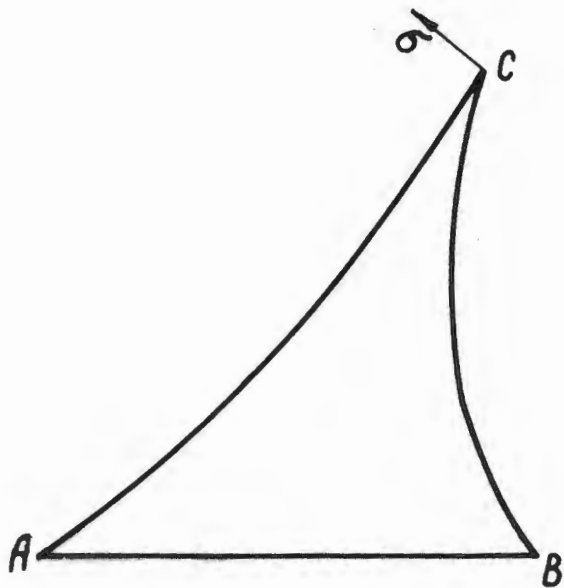
Р и с. 10.

Томассовская прецессия. Поворот оси волчка в первом приближении равен площади треугольника, образованного скоростями волчка в два момента времени  $t$  и  $t+dt$ .



Р и с. 11.

Схема "синхронизации" систем координат и часов с помощью 3-х наблюдателей



Р и с. 12.

Направление спина  $\sigma$  с точки зрения двух наблюдателей A и B. Из чертежа видно, что углы, которые составляет спина  $\sigma$  с относительными скоростями AC и BC, отличаются друг от друга на угол C. Это и есть поворот спина при переходе из одной системы координат в другую. Если  $c=0$  /фотон или нейтрино/, то поворота нет.