ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики
Лаборатория высоких энергий

С.Н. Соколов, К.Д. Толстов

Р - 1085

КОНТРОЛЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ И ОЦЕНКА ИСТИННОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Дубна 1962 год

С.Н. Соколов, К.Д. Толстов

Р - 1085

КОНТРОЛЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ НАБЛЮДЕНИЙ И ОЦЕНКА ИСТИННОГО ЧИСЛА СОБЫТИЙ

Дубна 1962 год

А н н о т а ц и я

Показано, что обычная оценка полного числа событий на основании двух просмотров приводит к грубым просчетам, если события неоднородны по трудности их обнаружения. Выводится формула для оценки полного числа событий на основании трех просмотров, учитывающая главное влияние указанной неоднородности. Дается простой метод подсчета стандартных ошибок любых оценок, выраженных через числа событий, найденных в многократных просмотрах.

Summary

The usual estimate of the total number of events basing on two scans is shown to be misleading if the events are inhomogeneous with respect to the difficulty of their detection. An estimate basing on three scans is derived which takes into account the principle part of the mentioned inhomogeneity. Paper gives also a simple general method of calculation of standard errors of any estimates expressable in terms of the number of events found in many-fold scans .

1. Определение и контроль эффективности наблюдений

Расчет сечений взаимодействия или других количественных величин требует точного знания числа событий, образованных в определенном объеме эмульсии или на заданном числе камерных снимков. Необходимо поэтому знать эффективность просмотра, то есть вероятность регистрации событий нужного типа. Для определения эффективности необходим повторный просмотр, причем обычно постулируется, что все события находятся с одной и той же вероятностью p_i, соответствующей данному просмотру i. Однако этот постулат должен проверяться в первую очередь, так как фон и вуаль в районе данного события или внимательность наблюдателя могут сделать вероятность регистрации данного случая меньшей или большей[x/].

Пусть истинное число событий есть n. Вероятность нахождения события номер x в просмотре i обозначим через $p_i(x)$. Под эффективностью просмотра ϵ_i будем понимать вероятность обнаружения, усредненную по всем событиям на пластинке

$\epsilon_i = \frac{1}{n} \sum_{x=1} p_i(x)$.

Выпишем основные соотношения для случая $p(x) = const$. Ожидаемое общее число случаев, находимых в двух просмотрах хотя бы одним из наблюдателей i и k, равно:

$$m_{i+k} = n\epsilon_i + n(1-\epsilon_i)\epsilon_k \,. \tag{1}$$

Эффективность двойного просмотра равна:

$$\epsilon_{i+k} = m_{i+k}/n = \epsilon_i + \epsilon_k - \epsilon_i\epsilon_k \,. \tag{2}$$

Аналогично этому для эффективности тройного просмотра получим:

$$\epsilon_{1+2+3} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - (\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_3 + \epsilon_3\epsilon_1) + \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 \,. \tag{3}$$

Если выполняется условие $p(x) = const$, то вероятность регистрации события в каждом из двух просмотров равна произведению вероятностей:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_i\epsilon_k \,. \tag{4}$$

В случае, если просмотр проведен более 2 раз, эффективность каждого просмотра можно найти несколькими независимыми путями. Обозначим через ϵ_i^k оценку эффективности просмотра i, определяемую по числу событий m_k, найденных в просмотре k, и в том и другом — m_{ik}. Имеем

$$\epsilon_i = m_{ik}/m_k \,. \tag{5}$$

В качестве усредненной оценки ϵ_i' для эффективности ϵ_i можно взять средневзвешенное всех значений ϵ_i, полученных подстановкой в (5) экспериментально найденных m_i, m_{ik}, m_{ij}, ... Усредненная оценка n' числа событий n может быть найдена как средневзвешенное из n_i, где

---

x/ Случай $p \neq const$ из известных авторам работ впервые отмечен в /4/,/6/,/1/. На зависимость эффективности просмотра от времени ранее обращал внимание болгарский физик П. Марков.

$$n_i = m_i/\epsilon'_i \quad , \qquad (6)$$

или с помощью комбинированных эффективностей:

$$n = m_{i+k}/\epsilon_{i+k} \quad , \qquad (7)$$

$$n = m_{1+2+3}/\epsilon_{1+2+3} \, , \qquad (8)$$

где m_{1+2+3} – общее число случаев, найденных в 3-х просмотрах.

Выполнение условия $p(x) = const$ можно проверить следующими способами. Сравним опытное a и расчетное a' число событий, которые найдены один раз, например, события $a_j = m_j - m_{ji} - m_{jk} + m_{jik}$, найденные только в просмотре j. Вероятность нахождения только в просмотре j будет равна:

$$\epsilon_j^{i+k} = (1 - \epsilon_{i+k})\,\epsilon_j \ . \qquad (9)$$

Расчетное число случаев, найденных только в просмотре j, равно:

$$a'_j = n\,\epsilon_j^{i+k} \ . \qquad (10)$$

Второй способ: если $p(x) = const$, то события, найденные в просмотре i и пропущенные, одинаковы по вероятности их нахождения, поэтому должны быть равны эффективности, определенные по истинному числу n и по найденному числу m_i.

В соответствии с этим определим эффективности просмотров k, и j, исходя из m_i, а также из: m_{ik} – числа случаев, найденных совместно в i и k,
m_{ij} – числа случаев, найденных совместно в i и j,
m_{ijk} – числа случаев, найденных совместно в трех просмотрах. Эффективность просмотра j, определяемую из m_{ikj} и m_{ik}, обозначим как ϵ_j^{ik}. Имеем:

$$\epsilon_j^{ik} = m_{ikj}/m_{ik} \ . \qquad (11)$$

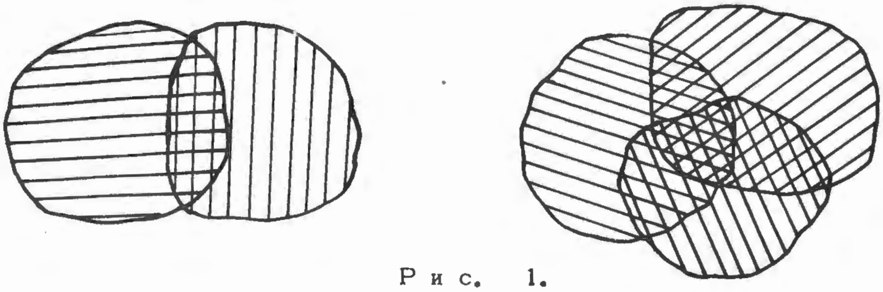
Расчетное число случаев m'_i, которое находится по результатам просмотров k, j, равно:

$$m'_i = m_{ij}/\epsilon_j^{ik} = m_{ij}\,m_{ik}/m_{ikj} \ . \qquad (12)$$

Систематическое (при разных i, j, k) отличие этих величин, например, $m'_i < m_i$ докажет, что $p(x) \neq const$. Обычно внимание сосредоточивается на получении максимальных эффективностей ϵ_j, ϵ_{j+k}, однако, если не выполнены эти контрольные условия, то все эффективности определены неверно, причем систематическая погрешность в эффективности может в несколько раз превышать среднеквадратичную ошибку σ_ϵ, подсчитываемую в следующем параграфе.

2. Метод подсчета статистических погрешностей

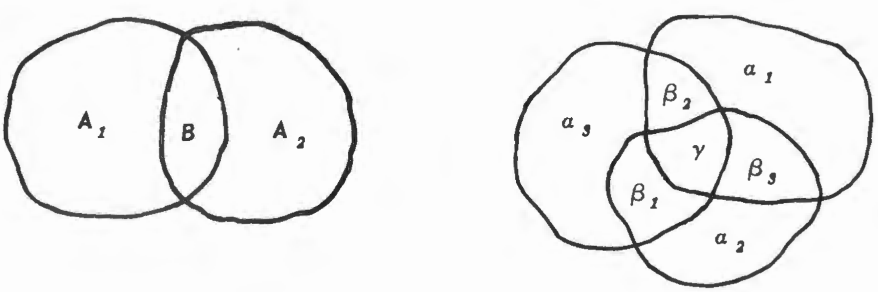
В этом параграфе мы дадим простой и общий метод подсчета дисперсии оценок любых величин, которые могут быть выражены через результаты многократных просмотров, то есть через экспериментально найденные числа m_i, m_{ik}, m_{ikj}, и т.д. Заметим прежде всего, что обычные затруднения при подсчете дисперсий связаны с тем, что величины m_i, m_{ik}, m_{ikj} коррелированы между собой. Например, пара величин m_1, m_{12} коррелирована вследствие того, что все события, вошедшие в m_{12}, входят и в m_1; а пара величин m_{21}, m_{23} – из-за того, что среди событий, учтенных в m_{21}, и m_{23}, имеется m_{123} общих и т.д. Наглядно это хорошо видно на рис. 1, где события, найденные разными наблюдателями, отмечены различной штриховкой.



Р и с. 1.

Пренебречь указанными корреляциями нельзя, так как обычно они не малы и заметно влияют на точность оценок (смотри, например, вычисление дисперсии оценки ϵ_i^k в работах[1,2]).

Однако усложнений, вносимых корреляцией, можно в значительной мере избежать, если в качестве исходных цифр использовать всегда число событий, найденных только одним наблюдателем, только тремя и т.д. Как видно из рисунка 2,



Р и с. 2.

такими величинами являются: в двукратном просмотре

$$A_i = m_i - m_{12}\ , \quad B = m_{12}\ ; \tag{13}$$

в трехкратном просмотре

$$a_i = m_i - m_{ik} - m_{ij} + m_{123}\ , \quad \beta_i = m_{jk} - m_{123}\ , \quad \gamma = m_{123} \tag{14}$$

и т.д.

Действительно, ни одно событие x не входит одновременно в A_i и B или одновременно в a_i, β_i, γ и эти числа, рассматриваемые как оценки величин

$$\bar{A}_i = \sum_{x=1}^{n} p_i(x)[1-p_k(x)]\ , \quad \bar{B} = \sum_{x=1}^{n} p_1(x)p_2(x)\ , \quad \bar{a}_i = \sum_{x=1}^{n} p_i(x)[1-p_j(x)][1-p_k(x)], \tag{15}$$

и т.д., которым они равны в среднем, не коррелированы между собой, если на вид функций $p_i(x)$ не накладывать каких-либо специальных ограничений. Оценки A_i, ... имеют дисперсии[x/]

x/ Приведенные здесь и ниже дисперсии, строго говоря, являются только оценкой истинных дисперсий. Истинные же дисперсии выражаются через $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{a}$, ...

$$\sigma_A^2 = A \quad , \quad \sigma_B^2 = B \quad , \quad \sigma_a^2 = a, \dots \quad . \tag{16}$$

В практически интересных случаях на вид функции $p(x)$ всегда бывают наложены некоторые ограничения-гипотезы, позволяющие оценить ожидаемое число пропущенных случаев m_0 через число найденных[x/]. Такие ограничения влияют на дисперсии оценок A, ... таким же образом, как если бы на эти оценки наложить связь

$$A_1 + A_2 + B + r = const \, , \sum_{i=1}^{3} a_i + \sum_{i=1}^{3} \beta_i + \gamma + r = const \, , \tag{17}$$

где r -некоторая независимо оцененная величина с дисперсией $\sigma_r^2 = m_0$. Применяя стандартную технику балансирования оценок (смотри, например[3], § 15) и обозначая дисперсии после балансирования (или короче "балансированные дисперсии") через $\tilde{\sigma}^2$, для дисперсии произвольной функции $K(A, B)$ получим (в квази-линейном приближении)

$$\tilde{\sigma}_K^2 = \sum_{i=1}^{2} A_i \left(\frac{\partial K}{\partial A_i}\right)^2 + B\left(\frac{\partial K}{\partial B}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\partial K}{\partial A_i} + B\frac{\partial K}{\partial B}\right)^2 , \tag{18}$$

где n предполагается оцененным через A, B. Выражение для балансированной ковариации $\tilde{\sigma}_{KL}^2 \equiv \tilde{\sigma}_K \tilde{\sigma}_L \tilde{r}_{KL}$ для пары функций $K(A, B), L(A, B)$ выглядит аналогично:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{KL}^2 = & \sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\partial K}{\partial A_i} \frac{\partial L}{\partial A_i} + B \frac{\partial K}{\partial B} \frac{\partial L}{\partial B} - \\ & - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\partial K}{\partial A_i} + B \frac{\partial K}{\partial B}\right)\left(\sum_{i=1}^{2} A_i \frac{\partial L}{\partial A_i} + B\frac{\partial L}{\partial B}\right) . \end{aligned} \tag{19}$$

Для тройных просмотров формулы такие же, но с очевидной заменой A, B на a, β, γ.

В частном случае $K = A_1$, $L = B$ или $L = A_2$ по формулам (18),(19) получаем

$$\tilde{\sigma}_A^2 = A - \frac{A^2}{n} \, , \quad \tilde{\sigma}_B^2 = B - \frac{B^2}{n} \, , \quad \tilde{r}_{AB} = - \frac{AB}{n\,\tilde{\sigma}_A \tilde{\sigma}_B} \, , \quad \tilde{r}_{A_1 A_2} = - \frac{A_1 A_2}{n\,\tilde{\sigma}_{A_1} \tilde{\sigma}_{A_2}} \, . \tag{20}$$

Выражение (20) показывает, что учет ограничений на $p_i(x)$ уменьшает дисперсии оценок и делает их коррелированными. К счастью, эта корреляция однотипна для всех пар оценок A, B; a, β, γ, что позволяет учесть ее всего одним дополнительным членом в формулах (18),(19).

Из выражения (20) также видно, что когда число зарегистрированных событий приближается к n, балансированные дисперсии стремятся к нулю.

[x/] Для произвольных функций $p_i(x)$, например, если все $p_i(x) = 0$ при $n \geq x > c_i$ этого сделать невозможно.

Это вполне понятно, ибо если событий пропускается мало, то число найденных не может сильно колебаться. В противоположном предельном случае, когда A , $B \ll n$ корреляции малы и балансированные дисперсии стремятся к дисперсиям (16) до балансирования.

Проиллюстрируем формулу (18) на примерах. При этом нам нужны будут формулы (13), (14), разрешенные относительно m :

$$m_i = A_i + B \ , \quad m_{12} = B \ , \tag{13a}$$

$$m_i = \alpha_i + \beta_k + \beta_j + \gamma \ , \quad m_{ik} = \beta_j + \gamma \ , \quad m_{123} = \gamma \ . \tag{14a}$$

Пример 1. Дисперсия оценки $\epsilon_i^k = m_{ik} m_k^{-1}$.

Подставляя $\epsilon_i^k = B(A_k + B)^{-1}$, имеем

$$\tilde{\sigma}^2_{\epsilon_i^k} = A_k\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial A_k}\right)^2 + B\left(\frac{\partial\epsilon}{\partial B}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(A_k\frac{\partial\epsilon}{\partial A_k} + B\frac{\partial\epsilon}{\partial B}\right)^2 = \tag{21}$$

$$= A_k B(A_k + B)^{-3} - n^{-1} 0^2 = (\epsilon_i^k)^2(1 - \epsilon_i^k)\, m_{12}^{-1} = \sigma^2_{\epsilon_i^k} \ .$$

Пример 2. Дисперсия оценки $m_1' = m_{12}\, m_{13}\, m_{123}^{-1}$. Подставляя $m_1' = (\beta_3 + \gamma)(\beta_2 + \gamma)\gamma^{-1}$, имеем

$$\tilde{\sigma}^2_{m_1'} = \beta_2\left(\frac{\partial m_1'}{\partial\beta_2}\right)^2 + \beta_3\left(\frac{\partial m_1'}{\partial\beta_3}\right)^2 + \gamma\left(\frac{\partial m_1'}{\partial\gamma}\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\beta_2\frac{\partial m_1'}{\partial\beta_2} + \beta_3\frac{\partial m_1'}{\partial\beta_3} + \gamma\frac{\partial m_1'}{\partial\gamma}\right)^2 =$$

$$= m_1' + m_1'(m_{12} - m_{123})(m_{13} - m_{123})\, m_{123}^{-2} - (m_1')^2 n^{-1} \ . \tag{22}$$

Пример 3. Дисперсия оценки $n = m_1 m_2 m_{12}^{-1} = (A_1 + B)(A_2 + B)B^{-1}$. Пользуясь аналогией с примером 2, сразу получаем

$$\tilde{\sigma}^2_n = n(m_1 - m_{12})(m_2 - m_{12})\, m_{12}^{-2} \ . \tag{23}$$

3. Оценка истинного числа случаев

Для наилучшего приближения к истинному числу случаев на практике нужно вначале провести сопоставление m_i и m_i' и в особенности сравнить α и α' , как это было рекомендовано в § 1. Это возможно, если просмотр проведен не менее 3-х раз. Если окажется, что условие $p(x) = const$ справедливо, то все формулы (6), (7) и (8) равноценны. Однако известные авторам эмульсионные и камерные примеры дают существенное различие величин m_i , m_i' , α , α' . Проиллюстрируем это на примере, когда просмотр с достаточной статистической точностью был проведен трижды (v^0 – события в пропановой камере).

Результаты наблюдений и расчетов представлены в таблице.

Из 2 столбца таблицы следует, что m_i' практически совпадает с m_i'' , которое определялось по графикам работы /4/, полученным с помощью метода максимального правдоподобия, но в предположении $p(x) = const$. Расчетные m_i' и m_i'' всегда меньше опытных средних значений m_i. В седьмом столбце дана оценка полного числа событий, полученная по формулам (6) или (7) – это число даже меньше, чем суммарное число найденных событий m_{1+2+3}.

Опытное число случаев, найденных только один раз, $a = \sum_{i=1}^{3} a_i$ – почти вдвое больше, чем число $a' = \sum_{i=1} a'_i$, рассчитанное по формуле (10). Все это доказывает, что условие $p(x) = const$ не выполняется и приводит к завышению эффективностей и уменьшению истинного числа событий. Следовательно, в разбираемом примере для получения истинного числа событий необходимо учесть зависимость вероятности обнаружения p от номера события x; при этом мы понимаем под вероятностью $p(x)$ следующее. Пусть наблюдатель i просматривает N раз пластинку, на которой имеется всего n событий, причем просмотры независимы и в среднем равноценны[x/]. Пусть число просмотров, в которых обнаружено событие номер x, равно $r(x)$. Тогда $p_i(x) = \lim_{N \to \infty} r(x) N^{-1}$. Согласно этому определению, ожидаемые количества находимых событий равны

$$m_i = \sum_{x=1}^{n} p_i(x), \quad m_{ik} = \sum_{x=1}^{n} p_i(x) p_k(x), \quad m_{ikj} = \sum_{x=1}^{n} p_i(x) p_k(x) p_j(x). \tag{24}$$

Ясно, что определить функции $p_i(x)$ во всех деталях практически невозможно, и приходится ограничиться оценкой только некоторых параметров этих функций.

Наиболее важными параметрами функций $p_i(x)$ являются эффективность $\epsilon_i = n^{-1} \sum_{x=1}^{n} p_i(x)$ и парная селекционная поправка η_{ik}, которую мы определим формулой

$$\eta_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} [p_i(x)\epsilon_i^{-1} - 1][p_k(x)\epsilon_k^{-1} - 1] \tag{25}$$

и которая входит в выражение для m_{ik}

$$m_{ik} = n\,\epsilon_i\,\epsilon_k (1 + \eta_{ik}). \tag{26}$$

Поправка η_{ik} отражает тот факт, что среди совокупности событий X_i, отобранных первым из наблюдателей i или k, процент легко и труднонаблюдаемых событий уже другой, чем в целом по пластинке, вследствие чего на совокупности событий X_i второй наблюдатель имеет несколько иную эффективность, чем на совокупности всех n событий. Для наблюдателей, работающих по близкой методике, следует ожидать, что $\eta_{ik} > 0$.

Поправки η_{ik} можно оценить по результатам трех просмотров, если предположить, что тройная селекционная поправка

$$\eta_{ikj} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} [p_i(x)\epsilon_i^{-1} - 1][p_k(x)\epsilon_k^{-1} - 1][p_j(x)\epsilon_j^{-1} - 1], \tag{27}$$

входящая в выражение

$$m_{123} = n\,\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 (1 + \eta_{12} + \eta_{23} + \eta_{31} + \eta_{123}), \tag{28}$$

[x/] То есть качества наблюдателя могут случайно меняться от просмотра к просмотру и во время самого просмотра, но усредненные по большому промежутку времени они не должны иметь каких-либо систематических тенденций.

мала и может быть отброшена. Тогда, полагая $\eta_{123}=0$ и подставляя в (24), (26), (28), экспериментально найденные m_1, m_2, m_3, m_{12}, m_{23}, m_{31}, m_{123}, мы получим 7 уравнений

$$\begin{aligned} m_1 &= n\epsilon_1 \qquad & m_{23} &= n\epsilon_2\epsilon_3(1+\eta_{23}) \\ m_2 &= n\epsilon_2 \qquad & m_{31} &= n\epsilon_3\epsilon_1(1+\eta_{31}) \\ m_3 &= n\epsilon_3 \qquad & m_{12} &= n\epsilon_1\epsilon_2(1+\eta_{12}) \\ & & m_{123} &= n\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3(1+\eta_{23}+\eta_{31}+\eta_{12}) \end{aligned} \tag{29}$$

для семи неизвестных n, ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, η_{23}, η_{31}, η_{12}. Решая уравнения (29), получим оценки

$$n = \frac{m_1 m_{23} + m_2 m_{31} + m_3 m_{12}}{2m_{123}} - \sqrt{\left(\frac{m_1 m_{23} + m_2 m_{31} + m_3 m_{12}}{2m_{123}}\right)^2 - \frac{2m_1 m_2 m_3}{m_{123}}}, \tag{30}$$

$$\epsilon_i = m_i n^{-1}, \quad \eta_{ik} = n\, m_{ik}\, m_i^{-1}\, m_k^{-1} - 1.$$

Следует заметить, что уравнения (29) допускают второе решение для n, а именно, решение со знаком "+" перед квадратным корнем. Такое решение соответствует формальной возможности добавить к наблюдаемым событиям, учитываемым формулой (30), определенное количество ненаблюдаемых событий с $p(x)=0$, не вступая в противоречие с предположением $\eta_{123}=0$. Ограничиваясь разумными экспериментами, имеющими дело с наблюдаемыми событиями, мы выбираем решение (30) с наименьшим n.

Для общего случая N просмотров в предположении $\eta_{12\ldots N}=0$ легко написать систему 2^N-1 уравнений, аналогичных (29). Эта система после исключения всех ϵ и η приводит к уравнению $(N-1)$-ой степени для n, наименьший корень которого является искомой оценкой.

Для случая, представленного в таблице, формула (30) дает

$n = 609$	$\epsilon_1 = 0{,}772$	$\epsilon_2 = 0{,}675$	$\epsilon_3 = 0{,}557$
	$\eta_{12} = 0{,}094$	$\eta_{23} = 0{,}189$	$\eta_{31} = 0{,}116.$

Различные конкретные гипотезы о форме функции $p(x)$ приводят к практически тем же результатам, что и формула (30). Например, если предположить, что (после расстановки событий в порядке возрастающей трудности обнаружения) $p_i(x) = c_i \exp(-x^2\sigma^{-2}2^{-1})$, и подставить это выражение в (24), заменив там для удобства суммирование $\sum_{x=1}^{n}$ на интегрирование $\int_0^n dx$, то решение полученных уравнений дает[x/] $n=619$; $c_1 = 1{,}018$; $c_2 = 1{,}037$; $c_3 = 0{,}934$; $\sigma_1 = 436$; $\sigma_2 = 339$; $\sigma_3 = 302$, что соответствует $\eta_{123} = -0{,}0125$. Отклонение η_{123} от нуля и некоторый сдвиг n по сравнению с $n=609$, полученным выше, связан с тем, что функции $p_i(x) = c_i\exp(-x^2\sigma^{-2}2^{-1})$ несимметричны относительно точки x, в которой $p_i(x)=\epsilon_i$.

---

x/ Расчеты производились на электронной вычислительной машине М-20 по методу линеаризации /5/.

Впрочем, сдвиг n в процентах даже меньше, чем превышение единицы константами c_1, c_2.

Остановимся коротко на дисперсии оценки (30). Выражение, получающееся по формуле (18), слишком громоздко, чтобы его здесь выписывать, При малых η_{ik} и не очень сильно отличающихся эффективностях, когда имеет смысл говорить об усредненной эффективности $\epsilon = \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$, для дисперсии оценки (30) справедлива приближенная формула

$$\tilde{\sigma}_n^2 \approx n\left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right)^3, \tag{31}$$

по которой получаем $n = 609 \pm 9$. Небольшая величина балансированной стандартной ошибки $\tilde{\sigma}_n = 9$ связана с тем, что число пропущенных случаев $m_0 \approx 50$ невелико, а величина $\tilde{\sigma}_n$ не должна заметно превышать $\sqrt{m_0}$.

Подчеркнем, что $n = 609 \pm 9$ есть оценка числа событий на данной пластинке. Оценка интенсивности I_n, то есть оценка числа событий, которое в среднем должно быть на идентичной пластинке при облучении в тех же условиях, имеет, разумеется, большую дисперсию, а именно $\sigma_{I_n} = \sqrt{9^2 + 609} = 26$.

В заключение авторы благодарят Нгуен Дин Ты за обсуждение и предоставленную возможность использовать материалы наблюдений, А. Лукьянцева за расчеты на машине М-20, а таже проф. Л. Яноши и Е. Гомбоши за обсуждения.

Литература

1. К.Д. Толстов. Препринт ОИЯИ Р-864 (1961).
2. М.И. Подгорецкий, Э.Н. Цыганов. Препринт ОИЯИ, Р-839 (1961).
3. N.P.Klepikov, S.N.Sokolov. Analysis and Planning of Experiments by the Method of Maximum Likelihood. Akademie-Verlag, Berlin (1961).
4. E.Gombosi and L.Ianossy. A-MTA Kozponti Fiziko i Kutato Intezetenek Koztemengei 8, 83 (1960).
5. С.Н. Соколов, И.Н. Силин. Препринт ОИЯИ, Д-810 (1961).
6. C.Waddington. Suppl. Nuovo Cim. XIX, 37 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 сентября 1962 года.

I Просмотр	2 Число случаев в одном просмотре Опытное	 Расчетное По ф-ле (I2)	 По работе /4/	3 Эффективность	4 Число случаев, найденных в каждом из 2-х и в каждом из 3-х просмотров	
i	m_i	m'_i	m''_i	ϵ_i	m_{ik}	m_{123}
I	470	420	4I5±2I	0,86	m_{12} =347	
2	4II	382	384±20	0,77	m_{23} =272	m_{123}=247
3	339	32I	32I±I8	0,66	m_{31} =292	

5 Число случаев, найденных в сумме 2-х и в сумме 3-х просмотров и соответствующие эффективности		6 Число случаев, найденных только в одном просмотре	7 Оценка истинного числа случаев	
m_{i+k}, m_{1+2+3}	ϵ_{i+k}, ϵ_{1+2+3}	$a = a_1 + a_2 + a_3$	n	
m_{1+2} =534	ϵ_{1+2} =0,97	Опытное	По ф-ле (6)	537±I5
m_{2+3} =478	ϵ_{2+3} =0,92	a =I39	(7)	538
m_{3+1} =5I7	ϵ_{3+1} =0,95	Расчетное по	(8)	557
m_{1+2+3}=556	ϵ_{1+2+3}=0,997	ф-ле (I0)	По работе /4/	557
		a' =7I	По ф-лам (30)	609±9
			(I_n =609±26)	