1060

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Лю И-чень, И.Т. Тодоров

Р-1060

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕРШИННОЙ ЧАСТИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

ДАН СССР, 1963, т.148, №4, с 806-809.

Дубна 1962 год

Лю И-чень, И.Т.Тодоров

Р-1060

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕРШИННОЙ ЧАСТИ В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Дубна 1962 год

1. В работах [1,2] было показано, что диаграмма D, изображенная на рис. 1, мажорирует все сильно связные диаграммы нуклонно-фотонной вершинной части[x)] (штрихованные

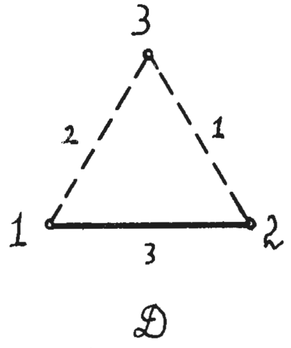

Рис. 1.

линии на рис. 1 - π -мезонные (с массой m), сплошная линия - нуклонная (с массой M), все узлы - внешние). Это означает, что в пространстве евклидовых внешних импульсов, в области G_E, в которой квадратичная форма диаграммы D меньше нуля

$$Q_D(\alpha, p^2) = \frac{\alpha_2\alpha_3 p_1^2 + \alpha_1\alpha_3 p_2^2 + \alpha_1\alpha_2 p_3^2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} - (\alpha_1 + \alpha_2) m^2 - \alpha_3 M^2 \tag{1}$$

при всех $\alpha_\nu \geq 0$ не равных одновременно нулю, отрицательна и квадратичная форма Q любой сильно связной диаграммы вершинной части.

Этот результат будет использован в настоящей заметке для двух целей: 1) для нахождения некоторой области в пространстве трех комплексных переменных

$$z_1 = p_1^2, \quad z_2 = p_2^2, \quad z_3 = p_3^2, \tag{2}$$

в которой аналитичен вклад любой сильно связной диаграммы вершинной части: 2) для вывода интегрального представления для произвольной диаграммы, которое полностью отображает установленные аналитические свойства вершинной части[xx)]. Из этих результатов следует спектральное представление вершинной части по двум переменным (типа предложенного в [3]), так же как и обычные одномерные дисперсионные соотношения в любом порядке теории возмущений.

---

x) Как обычно, рассматривается класс диаграмм, внутренние линии которых соответствуют сильно взаимодействующим частицам. Электромагнитное взаимодействие учтено лишь в первом порядке теории возмущений (узел 3 - единственный электромагнитный узел диаграммы D). Всюду в дальнейшем речь будет идти о сильно связных диаграммах, которые не распадаются на две части после разрыва любой одной внутренней линии.

xx) Представление такого типа было предложено Наканиши [4].

В п. 4 приводится интегральное представление амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне, вывод которого аналогичен выводу представления вершинной ...

2. Доказательство аналитичности вершинной части в комплексной области $\tilde{G}$ проведем в три этапа. Сначала определим евклидову область G_E, в которой отрицательна форма $Q(a,z)$ любой диаграммы вершинной части, затем найдем область $G \supset G_E$, состоящую из всех вещественных z /2/, для которых $Q(a,z)<0$, и наконец, определим комплексную окрестность $\tilde{G}$ области G, в которой аналитичен вклад произвольной диаграммы.

Евклидова область E в пространстве (z_1, z_2, z_3) состоит из вещественных точек z, удовлетворяющих неравенствам

$$E: \quad z_i \geq 0, \quad z_1^2+z_2^2+z_3^2 \leq 2(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3), \tag{3}$$

(при выполнении неравенства (3), линейная оболочка векторов p, связанных с z посредством (2), является евклидовым пространством). В области E, согласно сформулированному выше результату работ[1,2] достаточно исследовать диаграмму третьего порядка D. Эта диаграмма хорошо изучена[5]. Область G_D, в которой форма (1) отрицательна, проще всего записывается в переменных ζ (чтобы сохранить симметрию записи мы обозначаем массу линии ν диаграммы D через m_ν; в рассматриваемом случае $m_1=m_2=m$, $m_3=M$):

$$\zeta_1 = \frac{m_2^2+m_3^2-z_1}{2m_2m_3}, \quad \zeta_2 = \frac{m_1^2+m_3^2-z_2}{2m_1m_3}, \quad \zeta_3 = \frac{m_1^2+m_2^2-z_3}{2m_1m_2}, \tag{4}$$

в переменных ζ область G_D задается неравенствами[5]

$$G_D: \quad \begin{array}{ll} \zeta_i > -1 & \left(z_i < (m_j+m_k)^2 \right), \quad i=1,2,3, \\ \zeta_i+\zeta_j<0, & \zeta_k > \zeta_i\zeta_j - \sqrt{(1-\zeta_i^2)(1-\zeta_j^2)}, \end{array} \tag{5}$$

где (i,j,k) — любая перестановка чисел /1,2,3/.

Евклидова область аналитичности определяется равенством $G_E = G_D \cap E$. Для дальнейшего существенно, что (как нетрудно проверить) граница области G_E содержит весь "криволинейный" участок границы области G_D, т.е. ту часть поверхности

$$\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2-2\zeta_1\zeta_2\zeta_3 = 1, \tag{6}$$

которая задается параметрическими уравнениями

$$\zeta_\ell = \cos\theta_\ell, \quad \ell = 1,2,3, \quad \theta_k = \theta_i+\theta_j, \qquad \theta_i+\theta_j > \pi \quad (0<\theta_\ell<\pi). \tag{7}$$

Чтобы найти максимальную вещественную область аналитичности G, заметим, что квадратичная форма Q любой диаграммы вершинной части может быть записана в виде

$$Q(a,z) = A_1(a)z_1 + A_2(a)z_2 + A_3(a)z_3 - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu m_\nu, \tag{8}$$

где $A_i(a) > 0$ — однородные функции первой степени относительно a (см., например,[4]

§ 6, IУ). Из неотрицательности коэффициентов $A_i(a)$ следует, что если $Q(a, z^0) < 0$ для некоторого z^0, то $Q(a,z) < 0$ для всех $z \gtrsim z^0$ (т.е. $z_i \leq z_i^0$, $i = 1,2,3$). Таким образом мы убеждаемся, что область $G = G_D$.

Наконец, комплексную область аналитичности $\tilde{G} \supset G$ можно найти при помощи приема, использованного Ву [6] при исследовании амплитуды рассеяния скалярных частиц с одинаковой массой. Из линейности формы Q /8/ относительно z следует, что $Q(a, z) \neq 0$ (при всех неотрицательных a, не равных одновременно нулю) в комплексной точке $z = x + iy = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3)$, если существует такое вещественное число λ что точка $x + \lambda y \in G$. Мы определим G как множество комплексных векторов z для которых существует λ с перечисленными свойствами[x)].

3. Пусть каждой линии диаграммы соответствует скалярная функция распространения[xx)] $(k_\nu^2 - m_\nu^2 + io)^{-1}$ и пусть $2n > \ell + 2$, где ℓ – число внутренних линий, n – число узлов диаграммы. Вклад от любой сильно связной диаграммы вершинной части такого типа пропорционален функции (см.[4,7])

$$F(z) = \int_0^1 \dots \int_0^1 D^{-2}(a) \frac{\delta(1 - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu) \prod_{\nu=1}^{\ell} da_\nu}{[Q(a, z) + io]^{2n-\ell-2}}, \tag{9}$$

где $D(a)$ – однородная функция степени $\ell - n + 1$ от a, положительная при $a_\nu > 0$, а Q дается выражением типа (8). Из (9) заменой переменных[4]

$$\eta_i = [A_1(a) + A_2(a) + A_3(a)]^{-1} A_i(a), \quad i = 1,2,3, \quad \rho = [\sum_{i=1}^{3} A_i(a)]^{-1} \sum_{\nu=1}^{\ell} a_\nu m_\nu^2, \tag{10}$$

и $2\ell - n - 3$ кратным интегрированием по частям по ρ получаем следующее интегральное представление для любой сильно связной диаграммы вершинной части:

$$F(z) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 \int_{\rho_0(\eta)}^{\infty} d\rho \frac{f(\eta, \rho)}{\eta z - \rho + io} \delta(1 - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3), \tag{11}$$

где

$$\rho_0(\eta) = \max_{z \in G} \eta z, \qquad \eta z = \eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3, \tag{12}$$

а $f(\eta, \rho)$ – некоторая обобщенная функция (интеграл (11) следует понимать как предел (при $\epsilon \to +0$) интегралов по всему пространству переменных η и ρ от той же

---

x) Если изображать комплексные векторы $z = x + iy$ как приложенные векторы в трехмерном вещественном пространстве с началом в точке x и с концом в точке $x + y$ и каждому такому вектору поставить в соответствие прямую проходящую через него, то область G может быть охарактеризована геометрически как множество векторов, которым соответствуют прямые пересекающие G (Ж.Брос – частное сообщение).

xx) Все рассуждения и результаты этого пункта легко обобщаются на случай, когда некоторые линии диаграммы соответствуют спинорным или векторным частицам. Один из возможных приемов подобного обобщения описан в [4] (§ 3 и § 4).

подынтегральной функции, умноженной на бесконечно гладкую функцию $\phi_\epsilon(\eta,\rho)$, равную 1 в области интегрирования (11) и исчезающую вне ϵ -окрестности этой области). Максимум (12) можно вычислить в явном виде, если заметить, что он достигается на части границы области G_E, задаваемой параметрическими уравнениями (7). Он равен

$$\rho_0(\eta) = \Phi(\eta)\sum_{i=1}^{3}\frac{m_i^2}{\eta_i} \equiv \rho(\eta), \qquad \text{если} \quad \left|\frac{m_1}{\eta_1}-\frac{m_2}{\eta_2}\right| \le \frac{m_3}{\eta_3} \le \frac{m_1}{\eta_1}+\frac{m_2}{\eta_2}, \tag{13а}$$

$$\rho_0(\eta) = \eta_1(m_2+m_3)^2+\eta_2(m_1+m_3)^2+\eta_3(m_1-m_2)^2, \qquad \text{если} \quad \frac{m_3}{\eta_3} > \frac{m_1}{\eta_1}+\frac{m_2}{\eta_2}, \tag{13б}$$

$$\rho_0(\eta) = \eta_1(m_2+m_3)^2+\eta_2(m_1-m_3)^2+\eta_3(m_1+m_2)^2 \qquad \text{если} \quad \frac{m_2}{\eta_2} > \frac{m_1}{\eta_1}+\frac{m_3}{\eta_3}, \tag{13в}$$

$$\rho_0(\eta) = \eta_1(m_2-m_3)^2+\eta_2(m_1+m_3)^2+\eta_3(m_1+m_2)^2, \qquad \text{если} \quad \frac{m_1}{\eta_1} > \frac{m_2}{\eta_2}+\frac{m_3}{\eta_3} \tag{13г}$$

здесь (как и в п.2) $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = M$, а функция $\Phi(\eta)$ равна

$$\Phi(\eta) = \eta_1\eta_2+\eta_1\eta_3+\eta_2\eta_3. \tag{14}$$

В частном случае диаграммы D (рис. 1) нетрудно найти явный вид весовой функции $f(\eta,\rho)$ в представлении (11): $f_D(\eta,\rho) = \Phi^{-1}(\eta)\,\delta(\rho-\rho(\eta))$ / $\rho(\eta)$ задано формулой (13а)).

Представление (11), с учетом (13), является некоторым уточнением представления, найденного Наканиши[/4/] (в [/4/] не определяется точное значение $\rho_0(\eta)$). Ядро этого представления $(\eta z-\rho)^{-1}$ дает пример трехпараметрического семейства функций, аналитических в $\tilde{G}$ с параметрами ρ и η из области интегрирования в (11), такое, что для каждой точки границы $\partial\tilde{G}$ области $\tilde{G}$ можно найти некоторую функцию этого семейства, имеющую особенность в этой точке[x)]. Отсюда, в частности, следует, что область $\tilde{G}$ является естественной областью голоморфности в пространстве трех комплексных переменных (2).

Из представления (11), заменой переменных

$$\eta_1=\lambda\xi, \qquad \eta_2=\lambda(1-\xi), \qquad \rho=\lambda y+(1-\lambda)\,z_3, \tag{15}$$

и интегрированием по λ и η_3 получаем интегральное представление вершинной части как функции двух переменных z_1 и z_2 (при фиксированном z_3), выведенного Дезером и др.[/3/] на основе некорректного представления Дайсона для двойного коммутатора (см. также[/4/]).

Обычные одномерные дисперсионные соотношения могут быть получены как из интегрального представления (11), так и (проще) непосредственно, применением теоремы Коши, исходя из области аналитичности $\tilde{G}$, полученной в п.2.

---

x) Если $z = x+iy \in \partial\tilde{G}$ и $y \neq 0$, то необходимо выбрать η так, чтобы $\eta y = 0$ и $\eta x = \rho(\eta)$.

4. Исходя из результатов по мажорированию диаграмм рассеяния [8], можно вывести, аналогично п.3, интегральные представления для амплитуд рассеяния. Мы приведем результат такого исследования для случая рассеяния нуклона на нуклоне. В этом случае область G_{NN} в которой $Q < 0$ для всех сильно связных диаграмм этого процесса, есть треугольник

$$s = (p_1 + p_2)^2 < 4M^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2 < 4m^2, \quad u = (p_2 + p_3)^2 < 4m^2, \tag{16}$$

на плоскости $s + t + u = 2(M^2 + m^2)$ (мы считаем все внешние линии входящими). Вклад от сильно связных диаграмм в амплитуду рассеяния нуклона на нуклоне может быть представлен в виде[x)]

$$T(s,t) = \int_0^1 d\alpha \left\{ \int_{4m^2}^{\infty} d\rho \frac{f_1(\alpha,\rho)}{\alpha t + (1-\alpha)u - \rho} + \int_{\rho_0(\eta)}^{\infty} d\rho \left[\frac{f_2(\alpha,\rho)}{\alpha s + (1-\alpha)u - \rho} + \frac{f_3(\alpha,\rho)}{\alpha s + (1-\alpha)t - \rho} \right] \right\} \tag{17}$$

где

$$\rho_0(\alpha) = 4\,[M^2 \alpha + m^2 (1-\alpha)]\,. \tag{18}$$

Для получения (17) необходимо разбить область интегрирования по α в интеграле Фейнмана на части, в каждой из которых среди трех (зависимых) переменных s, t и u найдется такая пара, что коэффициенты перед этими переменными в форме $Q(\alpha, p)$ неотрицательны в данной части области интегрирования[xx)].

В заключение авторы выражают глубокую благодарность А.А.Логунову за полезное обсуждение настоящей работы.

Литература

1. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров и Н.А.Черников. ДАН СССР, 135, 801 (1960).
2. А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Н.А.Черников. Вопросы теории мажорирования диаграмм Фейнмана. Препринт ОИЯИ Д-578, Дубна 1960.
3. *S.Deser, W.Gilbert and E.Sudarshan. Phys. Rev. 115, 731 (1959).*
4. *N.Nakanishi. Suppl. Prog. Theor. Phys. N. 18, 1 (1961).*
5. *R.Karplus, Ch.Sommerfield and E. Wichmann. Phys. Rev. 111, 1187 (1958). 114, 376 (1959).*
6. *T.T.Wu. Phys. Rev. 123, 678 (1961).*
7. А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Н.А.Черников. Поверхность особых точек диаграммы Фейнмана. Препринт ОИЯИ Р-889, Дубна, 1962 г.
8. А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Н.А.Черников. ЖЭТФ, 42, 1285 (1962).
9. *N.Nakanishi. Prog. Theor. Phys. 26, 337 (1961).*

---

x) Впервые представление такого типа было получено (другим путем) Наканиши [9].

xx) Возможность такого разбиения области интегрирования отмечалась Д.Я.Петрина (частное сообщение).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1962 года.