

6
К 14



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория ядерных проблем
Лаборатория теоретической физики

Ю.М. Казаринов, Ф. Легар, И.Н. Силин

P-1046

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ
ДЛЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО
НАБЛЮДАЕМЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
В НЕФИЗИЧЕСКУЮ ОБЛАСТЬ

*ЖЭТФ, 1963, т 44, в. 4, с 311-315.
СЭРМ, 1962, Abstr. ~ 181.*

Ю.М. Казаринов, Ф. Легар, И.Н. Силин

P-1046

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ
ДЛЯ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО
НАБЛЮДАЕМЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ
В НЕФИЗИЧЕСКУЮ ОБЛАСТЬ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1962 год

1691/4

А н н о т а ц и я

Использовано конформное отображение при решении задачи определения константы связи и спектральных функций амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния.

Abstract

The conformal representation has been used for solving the problem of determining the coupling constant and the spectral functions of the nucleon-nucleon scattering amplitude.

Определение константы связи π -мезон-нуклонного взаимодействия, так же как и некоторые другие задачи, требует аналитического продолжения измеренных зависимостей в нефизическую область. Из результатов ряда работ видно, что надежная экстраполяция в нефизическую область требует весьма большой точности экспериментальных данных. Сравнительно недавно в работе^{1/} было показано, что использование конформного отображения(1) в рассматриваемом случае заметно облегчает задачу

$$W = \frac{1 - \sqrt{\frac{a}{b} \left(\frac{a-x}{b+x} \right)}}{1 + \sqrt{\frac{a}{b} \left(\frac{a-x}{b+x} \right)}}, \quad (1)$$

где $x = \cos \theta$, a и b - границы области, отображаемой внутрь единичного круга, на вещественной оси.

Ниже приводятся результаты применения указанного конформного отображения для определения перенормированной константы связи π -мезон-нуклонного взаимодействия f^2 и спектральных функций амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния.

Определение перенормированной константы связи

В настоящее время можно, по-видимому, считать, что экспериментальные данные по рассеянию нуклонов нуклонами не противоречат значению константы связи $f^2 = 0,08^{1/8}$. Благодаря этому решение задачи определения f^2 дает возможность достаточно ярко продемонстрировать преимущества, связанные с переходом из плоскости $x = \cos \theta$ в плоскость W , и установить практическую область применимости предлагаемого метода.

Для определения константы связи обрабатывались дифференциальные сечения упругого ($n-p$)-рассеяния при энергиях 90, 200, 380-400 и 630 Мэв и упругого ($p-p$)-рассеяния при энергиях 147 и 380 Мэв^{x)}, приведенные в обзорах^{2,3,4/}.

Сечение ($n-p$)-рассеяния записывалось в виде:

$$\sigma = a_1 f^4 \left[\frac{1}{(x_0 - x)^2} + \frac{4}{(x_0 + x)^2} \right] + \frac{a_2}{x_0 - x} + \frac{a_3}{x_0 + x} + \sum_{\mu} A_{\mu} W^{\mu}. \quad (2)$$

Была сделана проверка порядка полюса в амплитуде нуклон-нуклонного рассеяния в плоскости $x = \cos \theta$ при $x = \pm x_0 = \pm \left(1 + \frac{\mu^2}{mT} \right)$ (m и μ - массы нуклона и π -мезона, соответственно, T - кинетическая энергия нуклона л.с.) и найдена константа f^2 с учетом и без учета точки ветвления при $x = \pm a_0 = \pm \left(1 + \frac{4\mu^2}{mT} \right)$. Для этого на основании выражения (2) в точку $\pm x_0$ экстраполировались зависимости:

$$\sigma(x) (x_0^2 - x^2)^3 \quad (3)$$

^{x)} Обработывалась только ядерная часть.

$$\sigma(x) (x_0^2 - x^2)^2 (a_0^2 - x^2) \quad (4)$$

$$\sigma(x) (x_0^2 - x^2)^2 \quad (5)$$

соответственно. Экстраполяция проводилась в плоскости W . С помощью метода наименьших квадратов зависимости (3), (4), (5) аппроксимировались либо степенным рядом $f(W) = \sum a_n W^n$, либо рядом по полиномам Лежандра $f(W) = \sum b_n P_n(W)$.

Результаты проверки порядка полюса в амплитуде рассеяния приведены в таблице 1, в таблице 2 даны найденные значения константы связи. Из таблицы 1 видно, что в большинстве случаев обработанные экспериментальные данные при энергиях 200–630 Мэв не противостоят существованию полюса первого порядка в амплитуде нуклон-нуклонного рассеяния при $x = \pm x_0$, т.е. экстраполяция зависимости (3) в точки $x = \pm x_0$ дает в пределах ошибки нуль. При энергии 90 Мэв установить порядок особенности не удается. Возможно, что это связано с удалением полюса от края физической области при понижении энергии.

Прямой способ определения порядка полюса при энергии 630 Мэв не дает ответа. В этом случае зависимость (3) имеет весьма сложный характер и плохо описывается степенным рядом. Однако, если экстраполировать логарифм выражения (3), получается вполне удовлетворительный результат (таблица 1). Следует заметить, правда, что на этой энергии переход в плоскость W , по-видимому, несколько теряет свои преимущества в связи с тем, что расстояние от границы физической области до полюса в W плоскости больше, чем в плоскости $x = \cos \theta$ (рис. 1).

Константа f^2 близка к значению 0,5–0,8 с ошибкой 10–15% (таблица 2). Сравнение результатов, полученных при экстраполяции в плоскостях x и W показывает, что, по-видимому, в связи с более быстрой сходимостью аппроксимирующих рядов результаты в плоскости W при энергиях больше 400 Мэв получаются с несколько меньшей ошибкой.

Определение спектральных функций

В работе^{/5/} показано, что конформное отображение (1), при котором вся плоскость $x = \cos \theta$ отображается внутрь круга единичного радиуса, оказывается весьма полезным для экстраполяции амплитуды рассеяния в область спектральных функций. Эффективный скачок на разрезе при этом определяется суммой четной части ряда Фурье, в который переходит степенной ряд, аппроксимирующий экстраполируемую зависимость $M(W) \sqrt{a_0^2 - x^2}$, где $M(W)$ – амплитуда рассеяния на окружности $|W| = 1$. Определение эффективной спектральной функции было сделано для элементов M_{pp} , M_{11} , M_{00} , M_{01} и M_{10} матрицы перехода (p - p) и (p - p)-рассеяний при энергиях 147, и 210 и 310 Мэв. Для этого рассчитанные по фазовым сдвигам^{/6/} мнимые части матричных элементов M умножались на $\sqrt{a_0^2 - x^2}$ и представлялись в виде ряда

$$\text{Im } M \sqrt{a_0^2 - x^2} = \sum_0^N c_n W^n \quad (6)$$

Затем вычислялась сумма ряда $\frac{1}{2i} \sum_0^N c_n \cos n \phi$ для $0 < \phi < 2\pi$ (эффективный скачок на разрезе).

Т а б л и ц а 1

Энергия Мэв	Плоскость	Результаты экстраполяции выражения (2) в %% от (4)		
		A	B	C
90 (n-p)	W	нет	65%	-
	X	-	0	-
147 (p-p)	W	0	-	0
	X	нет	-	0
200 (n-p)	W	0	0	-
	X	-	-	30%
380 (p-p)	W	Не сходится	-	Не сходится
	X	0	-	0
400 (n-p)	W	Плохо сходится	0	-
	W*	0	-	-
	X	-	0	0
630 (n-p)	W*	0	-	-
	X	-	-	-

* Разложена функция $\log f(W) = \sum a_n W^n$

A-Разложение вокруг точки $x = -x_0$. Вся кривая $\sigma(x)$

B-Разложение вокруг точки $x = -x_0$. Половина кривой $\sigma(x)$

C-Разложение вокруг точки $x = 0$. Вся кривая $\sigma(x)$

При этом было найдено, что во всех случаях $\text{Im } M$ хорошо описывается рядом $\frac{\sum c_n W^n}{\sqrt{a_0^2 - x^2}}$ при сравнительно небольшом числе членов (2-5). Коэффициенты аппроксимирующего ряда определяются достаточно устойчиво. Увеличение числа членов слабо сказывается на величине первых коэффициентов (таблицы 3 и 4). Коэффициенты слабо зависят от энергии.

Таким образом существующие экспериментальные данные в области энергий 147-310 Мэв удовлетворительно описываются с помощью 20-25 параметров. Следует заметить, что подобное описание достигается с помощью фазовых сдвигов и константы связи при семнадцати параметрах. Следовательно, представление матричных элементов $M_{ee}, M_{II}, M_{00}, M_{0I}, M_{I0}$ в виде рядов по степеням W едва ли имеет преимущества с точки зрения описания эксперимента минимальным числом параметров.

Т а б л и ц а 2

Энергия Мэв	Плоскость	А		В		С	
		f^2		f^2		f^2	
		(3)	(4)	(3)	(4)	(3)	(4)
90 (n-p)	W	$0,079 \pm \pm 0,01$	$0,06 \pm \pm 0,01$	$0,074 \pm \pm 0,02$	$\dagger 0,06 \pm \pm 0,015$	-	$0,06 \pm \pm 0,01$
	X	-	-	-	$\dagger 0,086 \pm \pm 0,002$	-	-
147 (p-p)	W	$0,18 \pm \pm 0,02$	$0,124 \pm \pm 0,018$	-	-	$0,051 \pm \pm 0,051$	$0,108 \pm \pm 0,009$
	X	$0,097 \pm \pm 0,018$	$0,056 \pm \pm 0,02$	-	-	-	$0,071 \pm \pm 0,014$
200 (n-p)	W	$0,105 \pm \pm 0,004$	$0,077 \pm \pm 0,006$	-	$0,086 \pm \pm 0,005$	-	$0,083 \pm \pm 0,007$
	X	-	-	-	-	-	$0,061 \pm \pm 0,005$
380 (p-p)	W	Плохо сходится		-	-	$0,206 \pm \pm 0,046$	$0,063 \pm \pm 0,063$
	X	$0,109 \pm \pm 0,018$	$0,062 \pm \pm 0,020$	-	-	$0,0835 \pm \pm 0,023$	$0,068 \pm \pm 0,015$
400 (n-p)	W	$0,175 \pm \pm 0,015$	$0,064 \pm \pm 0,004$	$0,127 \pm \pm 0,006$	$0,71 \pm \pm 0,006$	$0,081 \pm \pm 0,007$	$0,090 \pm \pm 0,006$
	W*	$0,041 \pm \pm 0,003$	$0,041 \pm \pm 0,003$	-	-	-	-
	X	-	-	-	$0,058 \pm \pm 0,0065$	-	$0,048 \pm \pm 0,006$
630 (n-p)	W*	$0,035 \pm \pm 0,007$	$0,035 \pm \pm 0,007$	-	-	-	-

ПРИМЕЧАНИЕ: + При пяти членах в аппроксимирующем выражении $\chi^2/\chi^2 = 4,65$
для - X - плоскости и $\chi^2/\chi^2 = 0,988$ для W - плоскости

* Экстраполировалась функция $\log f(W) = \sum a_n W^n$

(3) - Результат экстраполяции выражения (3).

(4) - Результат экстраполяции выражения (4).

Число коэфф.	Энергия Мэв	c_1	c_3	c_5	c_7
2	147	$5,42 \pm 0,034$	$-8,89 \pm 0,48$		
	210	$4,63 \pm 0,02$	$-6,86 \pm 0,16$		
	310	$4,499 \pm 0,061$	$-7,76 \pm 0,034$		
3	147	$5,41 \pm 0,046$	$-8,41 \pm 1,96$	$-3,75 \pm 14,75$	
	210	$4,59 \pm 0,03$	$-5,80 \pm 0,69$	$-5,36 \pm 3,42$	
	310	$4,54 \pm 0,087$	$-8,82 \pm 1,50$	$+3,96 \pm 5,46$	
4	147	$5,41 \pm 0,057$	$-8,03 \pm 4,57$	$-11,62 \pm 87,25$	$40,86 \pm 446,4$
	210	$4,58 \pm 0,037$	$-4,97 \pm 1,78$	$-16,49 \pm 22,17$	$39,0 \pm 76,85$
	310	$4,54 \pm 0,109$	$-8,41 \pm 3,88$	$+0,12 \pm 35,7$	$10,6 \pm 91,71$

Спектральная функция имеет ярко выраженные осцилляции (рис. 2), однако, детали ее при данной точности экспериментальных данных определить не удастся (поддается определению недостаточно большое число членов ряда). В пределах ошибок нельзя сказать сходится или нет ряд Фурье на окружность $|W|=1$, так как найденные коэффициенты ряда увеличиваются с ростом их номера.

Авторы благодарны Я.А.Сморозинскому, С.Чулли, С.Н.Соколову за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. W.R.Frazer. *Phys. Rev.* 123, 2180 (1961).
2. W.H.Xess. *Rev. Mod. Phys.* 30, 368 (1958).
3. С.Б. Нурушев, Я.А.Сморозинский. Препринт ОИЯИ, Р-473, 1960.
4. J.R.Xoch, J.C.Kluyver, J.A.Moore. *Proc. Phys. Soc.* 71, 713 (1958).
5. И.Чулли, С.Чулли, Я.Фишер. Препринт ОИЯИ, Д-832, Дубна, 1961. *Nuovo Cimento XXIII*, 1129 (1962).
6. Ю.М.Казаринов, И.Н.Силин. Препринт ОИЯИ, Р-970, Дубна, 1962. Материалы конференции 1962 года.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1962 года.

Т а б л и ц а 4

Коэффициенты аппроксимирующего ряда для $M^{np} (a_0^2 - x^2)^{1/2}$

Число коэфф.	Энергия МэВ	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
3	I47	-	-	-	-	-	-
	2I0	$-0,18 \pm 0,02$	$1,99 \pm 0,03$	$8,07 \pm 0,20$	-	-	-
	3I0	$0,228 \pm 0,027$	$1,54 \pm 0,04$	$3,56 \pm 0,177$			
4	I47	$0,19 \pm 0,04$	$2,81 \pm 0,24$	$14,1 \pm 0,53$	$-5,46 \pm 2,50$	-	-
	2I0	$-0,18 \pm 0,018$	$2,34 \pm 0,073$	$8,09 \pm 0,20$	$-3,60 \pm 0,68$	-	-
	3I0	$0,217 \pm 0,028$	$2,28 \pm 0,131$	$3,63 \pm 0,177$	$-4,05 \pm 0,69$	-	-
5	I47	$0,005 \pm 0,06$	$2,72 \pm 0,24$	$22,48 \pm 1,99$	$-4,51 \pm 2,51$	$-62,9 \pm 14,37$	
	2I0	$-0,43 \pm 0,03$	$2,34 \pm 0,07$	$14,8 \pm 0,71$	$-3,55 \pm 0,69$	$-36,3 \pm 3,66$	
	3I0	$0,052 \pm 0,04$	$2,24 \pm 0,131$	$8,29 \pm 0,74$	$-3,82 \pm 0,69$	$-18,72 \pm 2,86$	
6	I47	-	-	-	-	-	-
	2I0	$-0,43 \pm 0,03$	$2,34 \pm 0,19$	$14,8 \pm 0,71$	$-3,68 \pm 3,90$	$-36,3 \pm 3,66$	$0,56 \pm 17,39$
	3I0	$0,51 \pm 0,04$	$2,29 \pm 0,26$	$8,30 \pm 0,74$	$-4,67 \pm 3,65$	$-18,7 \pm 2,87$	$2,7 \pm 11,7$

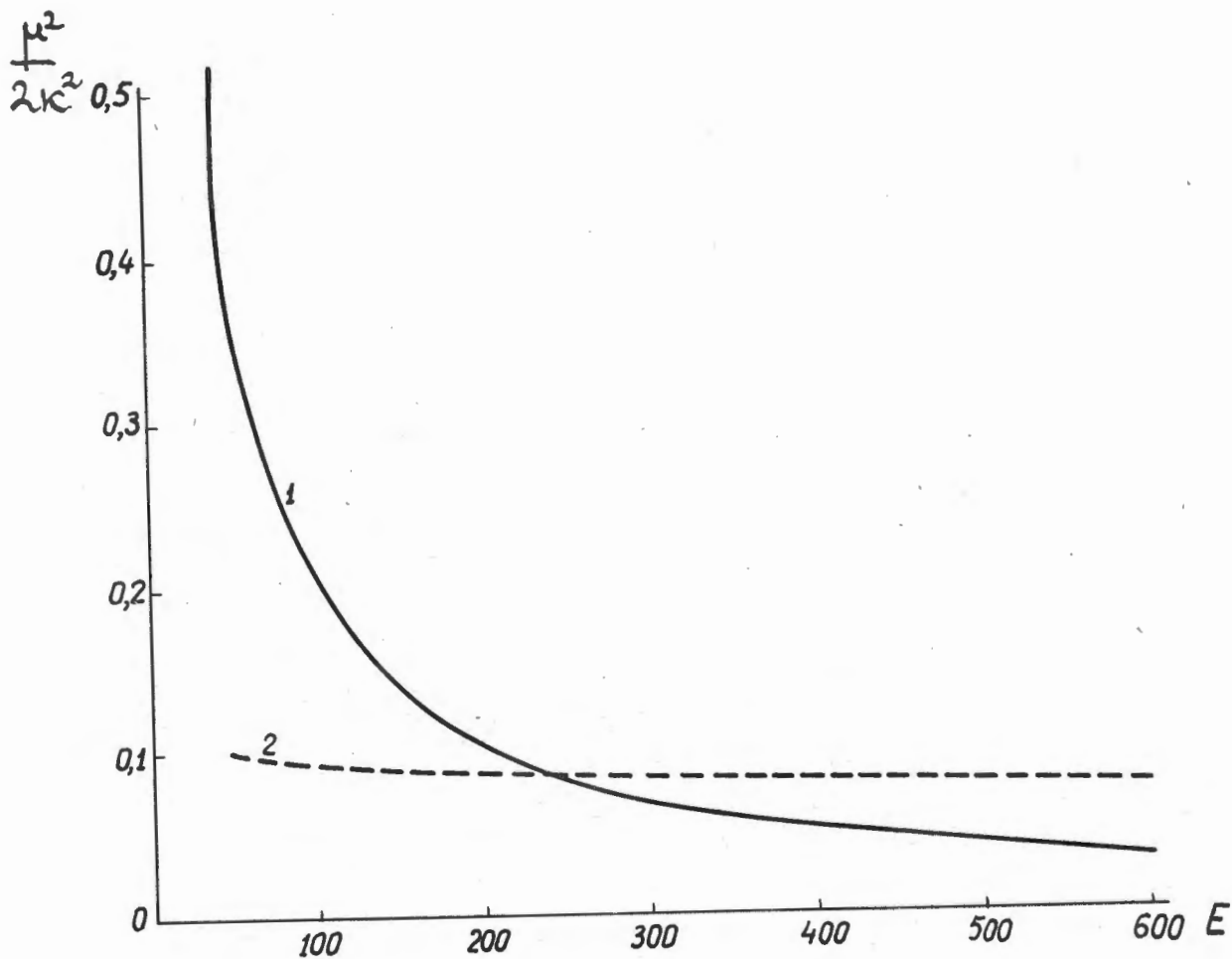


Рис. 1. Зависимость расстояния одномерного полюса от края физической области $\frac{\mu^2}{2k^2}$ от энергии нуклонов. 1 - X-плоскость, 2 - W-плоскость

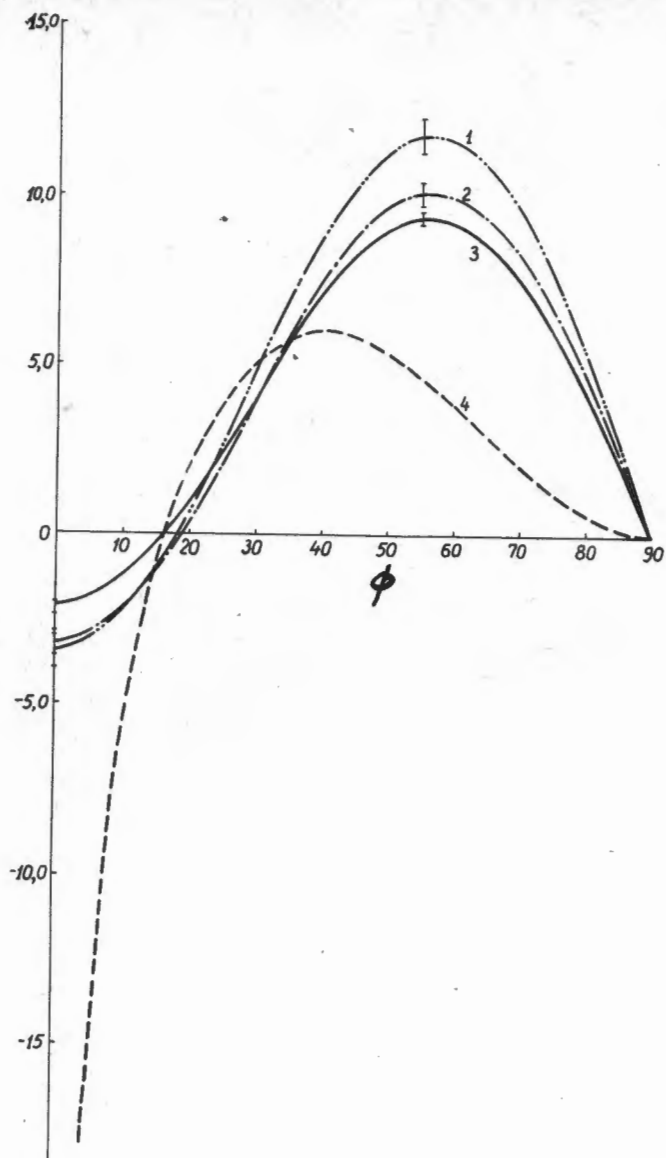


Рис. 2. Эффективный скачок на разрезе для M_{II}^{PP} в зависимости от расстояния вдоль разреза. Расстояние вдоль разреза измеряется в плоскости W полярным углом ϕ : 1,2,3-скачок, найденный для $M_{II}^{PP} (a_0^2 - x^2)^{+1/2}$ при энергии 147, 310, 210 Мэв, соответственно. 4- скачок для M_{II}^{PP} при энергии 210 Мэв.

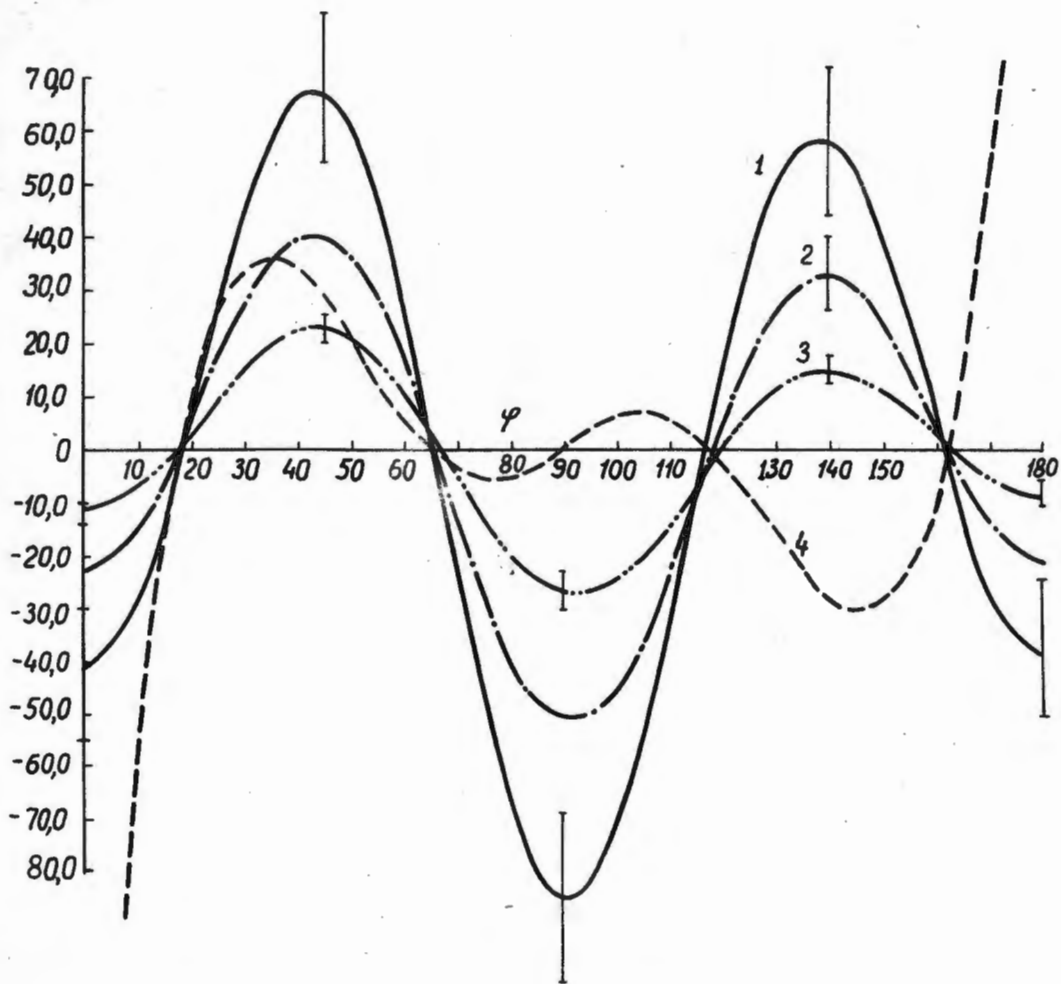


Рис. 3. Эффективный скачок для M_{II}^{PP} 1, 2, 3-скачок, найденный для $M_{II}^{PP} (a_0^2 - x^2)^{+1/2}$ при энергиях 147, 210, 310 Мэв, соответственно. 4-скачок для M_{II}^{PP} при энергии 210 Мэв.