

3
Л69



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

А.А. Логунов, Лю И-чень, И.Т. Годоров, Н.А. Черников

P-1043

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ
И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД
В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

*Укр. матем. журн., 1963,
т 15, № 3, с. 250-276.*

А.А. Логунов, Лю И-чень, И.Т. Тодоров, Н.А. Черников

P-1043

ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ
И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД
В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в "Украинский
математический журнал"

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1962 год

А н н о т а ц и я

Исследованы аналитические свойства амплитуд упругого рассеяния π -мезонов и нуклонов в теории возмущений. Выведены дисперсионные соотношения при фиксированном t (или s), а также при фиксированном $\cos \theta$. Из дисперсионных соотношений при фиксированном $\cos \theta$ получены дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд рассеяния нуклона на нуклоне и мезона на мезоне. Исследованы также аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния мезона на нуклоне.

В в е д е н и е

Изучение аналитических свойств отдельных членов разложения S -матрицы по степеням заряда за последние несколько лет стало одним из центральных вопросов квантовой теории поля. Количество исследований в этой области настолько быстро возросло, что в настоящее время уже нелегко ориентироваться среди многочисленных статей, посвященных аналитическим свойствам диаграмм Фейнмана. Поэтому мы сочли целесообразным предпослать изложению наших результатов краткий (не претендующий на полноту) обзор по основным направлениям работ в этой области.

Можно условно разделить работы по изучению аналитических свойств элементов S -матрицы в теории возмущений на две группы.

К первой группе относятся работы, которые используют теорию возмущений, главным образом, как "источник интуиции" для угадывания аналитических свойств "настоящей" амплитуды рассеяния. Определенные успехи в этом направлении достигнуты в работах ^{/1-4/}, где впервые вводится понятие о так называемых "аномальных порогах", выясняется причина появления этих порогов в низшем порядке теории возмущений и обсуждается физический смысл "аномальных" особенностей. Мандельштам подкрепляет свою знаменитую гипотезу о двойном спектральном представлении амплитуды рассеяния ^{/5/} изучением аналитических свойств простейших диаграмм четвертого порядка ^{/6/}. Полное математическое исследование диаграммы четвертого порядка и доказательство представления Мандельштама для этой диаграммы содержится в работах ^{/7,8/}.

Во второй группе работ ^{/9-16, 38,39/}, к которой относится и настоящая работа, изучаются аналитические свойства всех диаграмм данного процесса с целью получения дисперсионных соотношений и спектральных представлений для амплитуды этого процесса.

В работах этого направления создан метод мажорирования диаграмм Фейнмана, который позволяет сравнивать области аналитичности для различных диаграмм при евклидовых внешних импульсах и сводит изучение всех сильно связанных диаграмм некоторого процесса к изучению конечного (причем небольшого) числа диаграмм. Существенно, что при этом квадраты внешних импульсов рассматриваются как независимые переменные (не фиксированных на поверхности масс). Именно это обстоятельство позволяет доказать аналитичность амплитуды в некоторой, достаточно широкой комплексной области изменения независимых скалярных инвариантов и на этой основе получить дисперсионные соотношений (см. ^{/14/} и § 2 и § 3 настоящей работы).^{х)}

х) В силу того, что мы рассматриваем область, в которой квадраты внешних импульсов могут быть больше чем квадраты масс, соответствующих внутренним линиям, в процессе мажорирования диаграмм нельзя снимать внешние узлы. Это делает необходимым нетривиальное топологическое исследование диаграмм, проведенное в ^{/13/}. Это исследование нельзя заменить ссылкой на индуктивное построение диаграмм по методу Боголюбова и Парасюка (см., например, ^{/40/} гл. 1У п.26.4), как это делается в конце работы ^{/16/}, поскольку такое построение предполагает операцию добавления внешнего узла и нарушает сильную связность диаграммы.

Нужно, однако, отметить, что метод мажорирования дает лишь область, в которой антиэрмитова часть амплитуды равна нулю (в этой области вся амплитуда аналитична), и не дает непосредственных указаний об аналитичности антиэрмитовой части в области, где она отлична от нуля. Ясно, что если в некоторой области аналитичен каждый член ряда, представляющий амплитуду, то для доказательства аналитичности самой амплитуды необходимо еще установить равномерную сходимость ряда в этой области^{х)}. Однако вопрос о сходимости ряда теории возмущений является в настоящее время полностью открытым. Поэтому в дальнейшем, говоря об аналитичности амплитуды в некоторой области, мы будем подразумевать лишь аналитичность в любом конечном порядке теории возмущений.

Промежуточное положение между этими двумя направлениями занимают работы^{/17-21/}. В этих работах найдены уравнения поверхности особых точек для произвольной диаграммы^{/17,21/} (в том числе и при комплексных значениях инвариантов - см.^{/20/}), исследованы условия возникновения "аномальных" особенностей для некоторого класса диаграмм^{/18/}. Однако на этой основе до сих пор не проведено общего исследования расположения особенностей для всего класса диаграмм процесса рассеяния, а по существу рассмотрены лишь отдельные примеры.

Попытка группы авторов^{хх)} доказать представление Мандельштама в любом порядке теории возмущений (основанная главным образом на уравнениях Ландау^{/17/}) не увенчалась успехом (см.^{/22,23/}, где указывается на различные пробелы в предложенных "доказательствах"). На наш взгляд, неуспех этой попытки еще раз указывает на то, что при решении вопроса об аналитических свойствах интегралов Фейнмана нужно подходить с общепринятой в математике строгостью и не подменять доказательство разного рода интуитивными соображениями.

Заканчивая на этом краткий обзор, мы перейдем к содержанию настоящей работы.

На основе результатов по мажорированию диаграмм, полученных в наших предыдущих работах^{/12,13/}, здесь доказываются однократные дисперсионные соотношения для упругого рассеяния мезонов и нуклонов как по энергии, так и по передаче импульса, так же как и дисперсионные соотношения при фиксированном $\cos \theta$ (θ - угол в системе центра масс). Отсюда в случае рассеяния нуклона на нуклоне выводятся дисперсионные соотношения для парциальных волн, совпадающие с теми, которые получаются из представления Мандельштама). Эти результаты изложены в § 3. § 1 и § 2 имеют подготовительный характер. В § 1, разлагая вещественные импульсы на евклидову и антиевклидову части, мы показываем в общем случае, как можно мажорировать квадратичную форму диаграммы от вещественных импульсов квадратичной формой от евклидовых импульсов. Тем самым мы получаем возможность расширить применимость результатов по мажорированию диаграмм в евклидовой области. Как частный случай в этой процедуре получаются подстановки, использованные в^{/10,11/}. В случае, когда квадраты внешних импульсов равны между собой, наше рассмотрение по существу эквивалентно приему, использованному в^{/14/}, при этом

х) Согласно известной в теории аналитических функций теореме Витали (см., например,^{/36/} гл. IY § 2 стр. 294), для этого достаточно потребовать равномерную ограниченность ряда внутри области аналитичности его членов G и обыкновенную сходимость ряда на некотором подмножестве $E \subset G$, содержащем по крайней мере одну предельную точку в G .

хх) См.^{/23/}, где имеются ссылки на предыдущие работы этих авторов.

оно имеет то преимущество, что непосредственно переносится на общий случай. В § 2 на основе результатов работ^{/12,13/} находится вещественная область аналитичности для амплитуд различных процессов упругого рассеяния с участием π -мезонов и нуклонов. Следует отметить результат, полученный в этом параграфе для упругого рассеяния нуклона на нуклоне и антинуклона на нуклоне. Показано, что в каждом из этих процессов все сильно связанные диаграммы мажорируются одной единственной диаграммой четвертого порядка. Найдена максимальная вещественная область, в которой мнимая часть амплитуды исчезает. В § 3 при помощи приема, предложенного в^{/14/}, найдена некоторая комплексная область аналитичности и выведены дисперсионные соотношения.

§ 1. Мажорирование квадратичной формы от вещественных импульсов квадратичной формой от евклидовых импульсов

В этом параграфе мы покажем, как можно использовать результаты мажорирования при евклидовых импульсах с произвольными скалярными квадратами для того, чтобы получить некоторую вещественную область аналитичности в пространстве скалярных произведений импульсов, лежащих на поверхности масс.

Если всевозможные скалярные произведения внешних импульсов вещественны, мы будем кратко говорить, что внешние импульсы вещественны, хотя в некотором базисе эти импульсы могут иметь и комплексные составляющие^{x)}.

1. Определение евклидовых импульсов

Совокупность векторов p_1, \dots, p_n с наперед данными скалярными произведениями евклидова, если вещественное пространство, состоящее из произвольных линейных комбинаций этих векторов, евклидово. Другими словами^{/12,13/}, набор векторов p_1, \dots, p_n называется евклидовым, если при любом выборе вещественных чисел a_1, \dots, a_n скалярный квадрат вектора $\sum_{i=1}^n a_i p_i$ неотрицателен

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i p_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j p_i p_j \geq 0 \quad (1.1)$$

и лишь нулевой вектор имеет длину нуль.

При этом считается (по определению), что скалярное произведение симметрично, т.е. что $p_i p_j = p_j p_i$. Тогда из (1.1) следует, в частности, что если векторы p_1, \dots, p_n образуют евклидов набор, то их скалярные произведения вещественны (это было бы не обязательно так, если бы мы потребовали $(p_i p_j) = \overline{(p_j p_i)}$, где черта означает комплексное сопряжение). Условие (1.1) эквивалентно следующей системе неравенств для скалярных произведений векторов p :

$$\begin{vmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 & \dots & p_1 p_j \\ p_1 p_2 & p_2^2 & \dots & p_2 p_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 p_j & p_2 p_j & \dots & p_j^2 \end{vmatrix} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

x) Таким образом, мы называем импульсы вещественными не только тогда, когда они принадлежат вещественному пространству Минковского, но также в случае, когда они евклидовы или принадлежат псевдоевклидовому пространству с любой сигнатурой.

Найдем для примера евклидову область в случае упругого рассеяния частицы с массой m на частице с массой M . Считая для симметрии обозначений все импульсы входящими, мы будем иметь

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0, \quad (1.3)$$

$$p_1^2 = p_3^2 = M^2, \quad p_2^2 = p_4^2 = m^2 \quad (M \geq m > 0). \quad (1.4)$$

Если массы считать фиксированными, то из векторов p_i можно составить два независимых инварианта, которые мы будем выбирать в зависимости от случая среди следующих трех (зависимых) инвариантов^{х)}:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_2 + p_3)^2, \quad (1.5)$$

$$s + t + u = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 2(M^2 + m^2).$$

В силу закона сохранения (1.3) у нас есть только три независимых вектора p_1, p_2, p_3 и, соответственно, три условия положительной определенности метрики (1.2), которые в рассматриваемом случае приобретают вид:

$$p_1^2 = M^2 > 0, \quad p_1^2 p_2^2 > (p_1 p_2)^2, \quad (1.6)$$

$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 + 2(p_1 p_2)(p_2 p_3)(p_1 p_3) > p_1^2(p_2 p_3)^2 + p_2^2(p_1 p_3)^2 + p_3^2(p_1 p_2)^2.$$

Первое из неравенств (1.6) выполнено согласно (1.4). Второе неравенство в силу (1.5) может быть записано в виде:

$$|s - M^2 - m^2| \leq 2Mm$$

или

$$(M - m)^2 \leq s \leq (M + m)^2. \quad (1.7)$$

Последнее неравенство (1.6) при помощи (1.5) может быть преобразовано к виду:

$$t [s u - (M^2 - m^2)^2] \geq 0.$$

Отсюда, пользуясь (1.7) и (1.5), нетрудно заключить, что

$$2(M^2 + m^2) - s - u = t > 0, \quad s u > b^2, \quad (1.8)$$

где

$$b = M - m. \quad (1.9)$$

Второе условие евклидовости - условие, что лишь нулевой вектор имеет скалярный квадрат, равный нулю - приводит к тому, что знак равенства в каком-нибудь из неравенств (1.7) и (1.8) имеет место только тогда, когда векторы p_1, p_2 и p_3 компланарны. Так, из равенства $s = (M \pm m)^2$ следует $M p_2 = \pm m p_1$; если $t = 0$, то $p_1 + p_3 = 0$ и, наконец, если $s u = b^2$, то $b(p_1 + p_2) + s(p_2 + p_3) = 0$.

х) Инварианты s, t и u стали систематически использоваться, начиная с работы Мандельштама⁵⁾.

Итак, область евклидовости описывается неравенствами (1.7) и (1.8). Эта область изображена на рис. 3, см. § 2 п.2). В случае $M = m$ ($b = 0$) гипербола $su = b^2$ переходит в пару прямых $su = 0$, и евклидова область совпадает с треугольником $s \geq 0$, $t \geq 0$, $u \geq 0$ (т.е. $s+t \leq 4m^2$).

Если для любых скалярных произведений векторов условия евклидовости (1.2) выполнены, то в четырехмерном комплексном пространстве всегда можно выбрать такой ортонормированный базис, в котором скалярный квадрат произвольного вектора $p = \sum a_i p_i$ (a_i — вещественные числа) равняется сумме квадратов составляющих вектора

$$p^2 = (p^0)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2,$$

причем, все составляющие вектора P вещественны. Такой базис определяется с точностью до произвольного вещественного ортогонального преобразования. Разумеется, кроме вещественных базисов существует бесконечное множество комплексных ортогональных базисов (полученных из некоторого вещественного базиса при помощи комплексных вращений), в которых составляющие p^a -вектора p комплексны.

В дальнейшем нам не понадобится выбрать какой-либо базис — мы будем всегда работать со скалярными произведениями.

2. Разложение вещественных векторов на евклидову и антиевклидову часть

Пусть скалярные произведения 4-мерных импульсов вещественны, но не удовлетворяют всем неравенствам (1.2). Пусть \mathcal{P} — линейная оболочка векторов P_i с вещественными коэффициентами. Без ограничения общности можно считать, что в пространстве \mathcal{P} нет ненулевого вектора, ортогонального ко всем векторам этого пространства.

Для использования результатов по мажорированию диаграмм, полученных лишь в евклидовой области, нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1

Вещественные векторы P_i могут быть разложены на ортогональную между собой евклидову и антиевклидову^{x)} части:

$$P_i = P_i + Q_i, \quad P_i Q_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (1.10)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} P_1^2 & \dots & P_1 P_i \\ \dots & \dots & \dots \\ P_i P_1 & \dots & P_i^2 \end{array} \right| \geq 0, \quad (-1)^j \left| \begin{array}{ccc} Q_1^2 & \dots & Q_1 Q_j \\ \dots & \dots & \dots \\ Q_j Q_1 & \dots & Q_j^2 \end{array} \right| \geq 0 \quad (1.11)$$

Доказательство

Обозначим через M симметричную вещественную матрицу скалярных произведений векторов P_i :

^{x)} Система векторов Q_1, \dots, Q_n называется антиевклидовой, если система векторов iQ_1, \dots, iQ_n (где $i^2 = -1$) евклидова.

$$M = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 & \dots & p_1 p_n \\ p_1 p_2 & p_2^2 & \dots & p_2 p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1 p_n & p_2 p_n & \dots & p_n^2 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Согласно известной теореме линейной алгебры, существует вещественная ортогональная матрица V , такая, что матрица

$$VMV^T \quad (1.13)$$

диагональна (см., например, /24/ гл. II п.32). Здесь V^T — матрица, транспонированная к матрице V . Условие ортогональности матрицы V имеет вид

$$\sum_{j=1}^n V_{ij} V_{kj} = \delta_{ik} \quad (1.14)$$

или в матричной форме

$$VV^T = I. \quad (1.14a)$$

Так как в четырехмерном пространстве имеется не более четырех линейно независимых векторов, то при $n > 4$ по крайней мере $n - 4$ из диагональных элементов матрицы (1.13) равны нулю.

Пусть

$$q_i = \sum_{j=1}^n V_{ij} p_j, \quad (1.15)$$

тогда матрица (1.13) может быть записана в виде

$$VMV^T = \begin{pmatrix} q_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_n^2 \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Векторы q_i попарно ортогональны. Если ранг матрицы M равен r (всегда $r \leq 4$) и $n > r$ то $n - r$ из диагональных элементов матрицы (1.16) равны нулю. За счет изменения нумерации можно добиться того, чтобы

$$q_{r+1}^2 = \dots = q_n^2 = 0. \quad (1.17)$$

Но тогда в силу предположения, что в пространстве \mathcal{P} нет ненулевого вектора, ортогонального всем векторам этого пространства, мы заключаем, что

$$q_{r+1} = \dots = q_n = 0. \quad (1.18)$$

Из (1.15) с учетом (1.18) получаем

$$p_j = \sum_{i=1}^r V_{ij} q_i. \quad (1.19)$$

Пусть

$$q_1^2 > 0, \dots, q_{l_1}^2 > 0, \quad (1.20)$$

$$q_{l_1+1}^2 < 0, \dots, q_r^2 < 0;$$

тогда векторы P_i и Q_i - в формуле (1.10) определяются равенствами:

$$P_i = \sum_{j=1}^{i-1} V_{ij} q_j, \quad Q_i = \sum_{j=i+1}^n V_{ji} q_j. \quad (1.21)$$

Равенства (1.10) и неравенства (1.11) при этом легко проверяются. Таким образом, теорема 1 доказана.

Если сделать дополнительное предположение, что все главные миноры (1.2) матрицы M отличны от нуля (что возможно лишь при $n \leq 4$ и вовсе не является необходимым для справедливости теоремы 1), мы можем написать явные выражения для векторов q_j через исходные векторы p_j :

$$q_1 = p_1, \quad q_2 = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 \\ p_1 p_2 & p_2 \end{pmatrix} = p_1^2 p_2 - (p_1 p_2) p_1, \dots \quad (1.22)$$

$$q_n = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 & \dots & p_1 p_{n-1} & p_1 \\ p_1 p_2 & p_2^2 & \dots & p_2 p_{n-1} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n p_1 & p_n p_2 & \dots & p_n p_{n-1} & p_n \end{pmatrix}$$

Различным выборам попарно ортогональных векторов соответствуют разные P_i и Q_i в (1.10). Таким образом, это разложение неоднозначно.

Замечание

Основным пунктом в доказательстве теоремы 1 была ортогонализация векторов p_j . Построение ортогональных между собой линейных комбинаций q_j из линейно независимых векторов p_j вполне стандартно (q_j задаются формулами (1.22)), если метрика в пространстве \mathcal{P} евклидова. Однако в общем случае вещественных скалярных произведений (когда некоторые из главных миноров матрицы M могут равняться нулю) формулы (1.22) не годятся. Это можно увидеть на следующем простейшем примере.

Пусть $n = 2$ и скалярные произведения векторов p_1 и p_2 определяются формулами

$$p_1^2 = p_2^2 = 0, \quad p_1 p_2 = 1$$

(можно считать, например, что $p_1 = (1, 0, i, 0)$, $p_2 = (1, i, 0, 0)$, скалярное произведение выражается через координаты по формуле (1.9)). В этом случае формулы (1.22) дают

$$q_1 = p_1, \quad q_2 = -p_1,$$

следовательно, $q_1 + q_2 = 0$, хотя векторы p_1 и p_2 линейно независимы. Вообще нетрудно видеть, что в этом случае нельзя начать построение ортогональной системы q_j с вектором $q_1 = p_1$. Однако пользуясь общей формулой (1.19), мы приходим к системе $q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 + p_2)$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1 - p_2)$, которая обладает нужным свойством: $q_1^2 = 1$, $q_2^2 = -1$, $q_1 q_2 = 0$.

3. Пример: упругое рассеяние двух частиц

Проиллюстрируем теорему 1 на примере упругого рассеяния частицы с массой m на частице с массой M . Этот пример понадобится нам в дальнейшем (§ 2).

Имея в виду приложения в следующем параграфе, здесь удобно задавать систему ортогональных векторов q_i разными формулами в разных областях изменения инвариантов s и u

$$q_1 = p_1 + p_2, \quad q_2 = p_1 + p_3, \quad q_3 = p_2 + p_3 + b/s (p_1 + p_2), \quad (1.23)$$

при $s \geq u$ и при $s < 0$;

$$q_1' = p_1 + p_2 + b/u (p_2 + p_3), \quad q_2' = p_1 + p_3, \quad q_3' = p_2 + p_3, \quad (1.24)$$

при $0 < s < u$, где b задается формулой (1.9) / $b = M^2 - m^2 / \cdot^x$)

Пользуясь определениями (1.4) и (1.5), легко видеть, что

$$\begin{aligned} q_1^2 = s, \quad q_2^2 = t, \quad q_3^2 = u - \frac{b^2}{s}, \\ q_1'^2 = s - \frac{b^2}{u}, \quad q_2'^2 = t, \quad q_3'^2 = u, \\ q_i q_j = q_i' q_j' = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Из (1.23) и (1.24) можно обратно выразить векторы p_i через q_i или через q_i' :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{s}\right) q_1 + \frac{1}{2} (q_2 - q_3), & p_2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{s}\right) q_1 - \frac{1}{2} (q_2 - q_3), \\ p_3 &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{s}\right) q_1 + \frac{1}{2} (q_2 + q_3); & p_1' &= \frac{1}{2} (q_1' + q_2') - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{u}\right) q_3', \\ p_2 &= \frac{1}{2} (q_1' - q_2') + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{u}\right) q_3', & p_3' &= -\frac{1}{2} (q_1' - q_2') + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{u}\right) q_3'. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Очевидно, если $q_i^2 > 0$, $i = 1, 2, 3$, то векторы p_i евклидовы и мы можем выбрать в (1.10) $P_i = p_i$, $Q_i = 0$. Все q_i^2 не могут быть отрицательными, так как в силу (1.25) и (1.5)

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \frac{b^2}{q_1^2} = q_1'^2 + q_2'^2 + q_3'^2 + \frac{b^2}{q_1'^2} = 2(M^2 - m^2) > 0.$$

Рассмотрим нетривиальные случаи, когда квадраты q_i^2 ($q_i'^2$) имеют разные знаки, и определим в этих случаях векторы P_i и Q_i .

Пусть сначала два из квадратов q_i^2 ($q_i'^2$) положительны и один отрицателен. Возможны три таких случая.

а) $s > 0$, $t > 0$, $su < b^2$.

В этом случае, в силу (1.26)

х) В случае, когда $s = u = 0$, выражения (1.23) и (1.24) не имеют непосредственного смысла. В этом исключительном случае можно положить $q_1 = p_1 + 2p_2 + p_3$, $q_2 = p_1 + p_3$, $q_3 = p_1 - p_3$. Рассмотрение этого случая не понадобится нам в дальнейшем. Отметим, что в случае равных масс ($M = m$, $b = 0$) векторы q_i и q_i' совпадают между собой, и формулами (1.23) (с $b = 0$) можно пользоваться всюду.

$$P_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{s}\right) q_1 + \frac{1}{2} q_2, \quad Q_1 = -\frac{1}{2} q_3,$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{s}\right) q_1 - \frac{1}{2} q_2, \quad Q_2 = \frac{1}{2} q_3,$$

$$P_3 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{s}\right) q_1 + \frac{1}{2} q_2, \quad Q_3 = -\frac{1}{2} q_3.$$

если $s \geq u$

$$P_1 = \frac{1}{2} q_2' - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{u}\right) q_3', \quad Q_1 = \frac{1}{2} q_1',$$

$$P_2 = -\frac{1}{2} q_2' + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{u}\right) q_3', \quad Q_2 = \frac{1}{2} q_1',$$

$$P_3 = \frac{1}{2} q_2' + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{u}\right) q_3', \quad Q_3 = -\frac{1}{2} q_1',$$

если $s < u$.

Из этих формул, пользуясь (1.25), находим при $s \geq u$

$$\begin{aligned} P_1^2 = P_3^2 = M^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{s} - u\right), & \quad P_2^2 = P_4^2 = m^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{s} - u\right); \\ S = (P_1 + P_2)^2 = s, & \quad T = (P_1 + P_3)^2 = t, \\ U = (P_2 + P_3)^2 = \frac{b^2}{s}; & \quad Q_1^2 = \frac{1}{4} \left(u - \frac{b^2}{s}\right); \end{aligned} \quad (1.27)$$

при $s < u$:

$$\begin{aligned} P_1^2 = P_3^2 = M^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{u} - s\right), & \quad P_2^2 = P_4^2 = m^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{u} - s\right); \\ S = \frac{b^2}{u}, & \quad T = t, \quad U = u; \quad Q_1^2 = \frac{1}{4} \left(s - \frac{b^2}{u}\right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\text{в) } s > 0, \quad t < 0, \quad su > b^2.$$

В этом случае имеем:

при $s \geq u$:

$$P_1 = -P_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{s}\right) q_1 - \frac{1}{2} q_2, \quad Q_1 = Q_3 = \frac{1}{2} q_2,$$

$$P_2 = -P_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{s}\right) q_1 + \frac{1}{2} q_2, \quad Q_2 = Q_4 = -\frac{1}{2} q_2;$$

при $s < u$:

$$P_1 = -P_3 = \frac{1}{2} q_1' - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{u}\right) q_3', \quad Q_1 = Q_3 = \frac{1}{2} q_2' = \frac{1}{2} q_2,$$

$$P_2 = -P_4 = \frac{1}{2} q_1' + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{u}\right) q_3', \quad Q_2 = Q_4 = -\frac{1}{2} q_2' = -\frac{1}{2} q_2.$$

Так как в этом случае выражения для P_i и Q_i при $s \geq u$ и при $s < u$ совпадают, то для скалярных произведений этих векторов при всех $s > 0$, $su > b^2$ в обоих случаях имеем:

$$\begin{aligned} P_1^2 = P_3^2 = M^2 - \frac{t}{4}, \quad P_2^2 = P_4^2 = m^2 - \frac{t}{4}, \\ Q_1^2 = \frac{1}{4}t, \quad S = s, \quad U = u, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Формулы (1.29) совпадают с подстановками (5.5) в работе /11/, где эти подстановки вводятся в виде некоторого искусственного приема (см. также /10/).

$$c) \quad s < 0, \quad t > 0, \quad u > \frac{b^2}{s}.$$

В этом случае мы условились пользоваться лишь векторами q_i (1.23). Для P_i и Q_i получаем

$$\begin{aligned} P_1 = -P_2 = \frac{1}{2}(q_2 - q_3), \quad P_3 = -P_4 = \frac{1}{2}(q_2 + q_3), \\ Q_1 = -Q_3 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{s}\right)q_1, \quad Q_2 = -Q_4 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{s}\right)q_1. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Для скалярных произведений этих векторов находим:

$$\begin{aligned} P_i^2 = \frac{1}{2}(M^2 + m^2) - \frac{1}{4}\left(s + \frac{b^2}{s}\right), \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ Q_1^2 = Q_3^2 = \frac{1}{4}s(s + b)^2, \quad Q_2^2 = Q_4^2 = \frac{1}{4}s(s - b)^2, \\ S = 0, \quad T = t, \quad U = u - \frac{b^2}{s}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Три случая, в которых два из квадратов q_i^2 отрицательны, а один - положителен, сводятся к рассмотренным случаям а), б) и с), если заменить P_i на Q_i и наоборот.

4. Мажорирование квадратичных форм диаграмм Фейнмана

Для вывода дисперсионных соотношений для некоторой сильно связанной диаграммы D нужно найти область G_D в вещественном пространстве скалярных произведений внешних импульсов, в которой квадратичная форма $Q_D(\alpha, p)$ диаграммы D отрицательна (см. /9-14/):

$$Q_D(\alpha, p) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} P_i P_j - \sum_{\nu=1}^l \alpha_\nu m_\nu^2 < 0, \quad (1.32)$$

при всех неотрицательных значениях параметров Фейнмана α_ν , не обращающихся одновременно в нуль. Матрица A_{ij} положительно определена (см. /12,13/). Отсюда следует, что если векторы P_i образуют евклидову систему, то

$$A(\alpha, p) = \sum_{i,j} A_{ij} P_i P_j \geq 0, \quad (1.33)$$

в то время как, если векторы Q_i - антиевклидовы, то

$$A(\alpha, Q) = \sum_{i,j} A_{ij} Q_i Q_j < 0. \quad (1.34)$$

С другой стороны, согласно теореме 1, любая система вещественных векторов P_i разлагается по формуле (1.10) на попарно ортогональные евклидову и антиевклидову части. При этом

$$P_i P_j = P_i P_j + Q_i Q_j, \quad (1.35)$$

и из (1.32) и (1.34) следует, что

$$Q_D(a, p) < Q_D(a, P) = A(a, P) - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} m_{\nu}^2 \quad (1.36)$$

Из (1.36) видно, что если

$$Q_D(a, P) < 0 \quad \text{при} \quad a_{\nu} > 0, \quad \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu} > 0, \quad (1.37)$$

то и подавно $Q_D(a, p) < 0$. Так как векторы P евклидовы, то в случае диаграмм рассеяния можно воспользоваться результатами работы /13/. Поэтому, если мы найдем область G в вещественной плоскости (s, t) , в которой имеет место (1.37) для диаграмм D , мажорирующих все сильно связанные диаграммы рассеяния, то мы сможем заключить, что в этой области для всех сильно связанных диаграмм выполняется неравенство (1.32). Таким образом, в области G амплитуда рассеяния будет вещественной (эрмитовой в случае спинорных полей) и вклад от любой сильно связанной диаграммы процесса рассеяния будет аналитической функцией в этой области.

§ 2. Вещественная область аналитичности для процессов упругого рассеяния

1. Рассеяние нуклона на нуклоне и антинуклона на нуклоне

Если все квадраты внешних импульсов в процессе рассеяния равны между собой, то исследование аналитических свойств амплитуды несколько упрощается. Это видно уже из формул (1.23-1.31), которые заметно упрощаются, если $b=0$. Поэтому мы начнем изучение аналитических свойств конкретных процессов упругого рассеяния именно с этого случая.

Рассмотрим детально процессы рассеяния нуклона на нуклоне и антинуклона на нуклоне. Соответствующие результаты для амплитуды упругого рассеяния скалярных мезонов получатся отсюда, если положить $M=m$.

В /13/ было показано, что при евклидовых внешних импульсах все сильно связанные диаграммы рассеяния нуклона на нуклоне мажорируются двумя диаграммами, изображенными на рис. 1, с различными нумерациями внешних узлов (обозначенных на рис. 1 кружками).

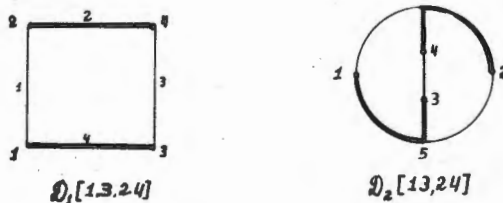


Рис. 1.

При этом к рассеянию нуклона на нуклоне относятся диаграммы^{x)}

$$D_i[13,24], D_i[14,23], D_i[13,42], D_i[14,32], i=1,2,$$

(p_1 и p_2 - импульсы нуклонов в начале, $-p_3$, $-p_4$ импульсы нуклонов в конце процесса).

При изучении процесса рассеяния антинуклона (с импульсом p_2) на нуклоне (с импульсом p_1), в результате которого возникает нуклон с импульсом $-p_3$ и антинуклон с импульсом $-p_4$, мы имеем дело с диаграммами

$$D_i[13,24], D_i[13,42], D_i[12,34], D_i[12,43] \quad i=1,2.$$

Пользуясь обобщением теоремы Симанзика^{/13/}, докажем следующую лемму.

Лемма 1

При евклидовых внешних импульсах диаграмма D_2 мажорируется двумя диаграммами типа D_1 :

$$G(D_2[13,24]) \supseteq G(D_1[13,24]) \cap G(D_1[14,23]). \quad (2.1)$$

(Мы пользуемся обозначениями работ^{/13/}: $G(D)$ -область в пространстве евклидовых импульсов, в которой квадратичная форма $Q_D(a, p)$ диаграммы D отрицательна при всех неотрицательных значениях параметров Фейнмана a_ν , не равных одновременно нулю).

Доказательство

Согласно теореме 4 работы^{/13/}, для доказательства леммы 1 достаточно проверить справедливость неравенства:

$$L_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq \min \{ L_1(x_2, x_3, x_4, x_1), L_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \}, \quad (2.2)$$

где

$$L_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \min_{x_5, x_6} [M (|x_1 - x_5| + |x_3 - x_5| + |x_2 - x_6| + |x_4 - x_6|) + m (|x_5 - x_6| + |x_1 - x_6| + |x_2 - x_5|)] \quad (2.3)$$

$$L_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = M (|x_1 - x_3| + |x_4 - x_2|) + m (|x_1 - x_2| + |x_3 - x_4|)$$

(x_i - 4-мерные евклидовы векторы). Действительно, из (2.3), пользуясь неравенством треугольника, получаем:

$$L_2(x) \geq (M - \frac{m}{2}) (|x_1 - x_5| + |x_2 - x_6|) + m (|x_5 - x_6| + |x_1 - x_6| + \frac{m}{2} (|x_1 - x_6| + |x_2 - x_5|)). \quad (2.4)$$

Неравенство (2.2) следует (в силу (2.4)) из неравенства

$$M (|x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|) + \frac{m}{2} (|x_1 - x_6| + |x_2 - x_5| + |x_1 - x_5| + |x_2 - x_6|) \geq \geq M \min \{ |x_1 - x_3| + |x_2 - x_4|, |x_1 - x_5| + |x_2 - x_6| \}.$$

^{x)} Символ $D_i[1b,cd]$, где $i=1,2$ (b,c,d) - некоторая перестановка чисел (2,3,4), обозначает диаграмму D_i рис.1, в которой нумерация внутренних узлов и линий осталась без изменений, узел 3 заменен на узел "b", узел 2 - на "c" и узел 4 - на "d".

Но это последнее неравенство, как легко видеть, справедливо всегда, если только $m \leq 2M$. Лемма 1 доказана.

Следствие

Все сильно связанные диаграммы рассеяния нуклона (антинуклона) на нуклоне мажорируются четырьмя диаграммами четвертого порядка типа D_1 (рис. 1).

Таким образом, для исследования области регулярности произвольной сильно связанной диаграммы рассеяния нуклона на нуклоне остается найти пересечение четырех областей $G(D_i)$. Все эти области получаются из какой-либо одной при помощи перестановки внешних импульсов. Мы ограничимся важным случаем, когда квадраты (евклидовых) внешних импульсов равны между собой:

$$P_1^2 = P_2^2 = P_3^2 = P_4^2 = P^2 = \frac{1}{4}(S + T + U). \quad (2.5)$$

Тогда области G являются областями в трехмерном вещественном пространстве $S, T, U (S \geq 0, T \geq 0, U \geq 0)$.

Для нахождения искомой области $G(S, T, U)$ найдем норму диаграммы D_1 [13, 24]. Квадрат этой нормы определяется равенством

$$f(S, T, U) = \tilde{L}_{D_1}^2(P) = \sup_{a_i \geq 0} \frac{A(a, P)}{M^2(a)}, \quad (2.6)$$

где $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) A(a, P) = (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1) P^2 + a_1 a_3 T + a_2 a_4 S$,

$$M^2(a) = (a_2 + a_4) M^2 + (a_1 + a_3) m^2, \quad (2.7)$$

(M - масса нуклона, m - масса π -мезона).

Из (2.6) и (2.7) находим^{x)}

$$M^2(1-\rho)^2 f(S, T, U) = (1+\rho) P^2 - \frac{1}{2}(T + \rho S) - \sqrt{U[\rho P^2 - \frac{1}{4}(T + \rho^2 S)]}, \quad (2.8a)$$

если $T < \rho(S + U)$ и $\rho S < T + U$,

$$f(S, T, U) = \frac{1}{4} \max\left(\frac{S}{M^2}, \frac{T}{m^2}\right), \quad (2.8b)$$

если $T \geq \rho(S + U)$ или $\rho S \geq T + U$.

Здесь

$$\rho = \frac{m^2}{M^2}, \quad S + T + U = 4P^2. \quad (2.9)$$

Выражение (2.8a) соответствует случаю, когда максимум (2.6) достигается при положительных a_i . В этом случае мы имеем дело с локальным экстремумом и поэтому производные по a_i от выражения

$$A(a, P) - f(S, T, U) M^2(a) \quad (2.10)$$

^{x)} Формулы (2.8) показывают, что приведенное в [16] (формулы (4.17) и (4.18)) выражение для нормы в импульсном пространстве ошибочно.

должны равняться нулю. В результате дифференцирования получаем систему линейных уравнений, которую нетрудно привести к виду

$$(4m^2 - T) a_1 + 2[(M^2 + m^2)f - P^2] a_2 = 0, \quad (2.11)$$

$$2[(M^2 + m^2)f - P^2] a_1 + (4M^2 f - S) a_2 = 0,$$

$$a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4.$$

Выражение (2.8а) получается из условия обращения в нуль определителя этой системы^{х)}. Неравенства $T - \rho U < \rho S < T + U$ эквивалентны условию положительности решения (a_1, a_2) системы (2.11) или — как нетрудно показать — неравенству

$$(M^2 + m^2)f(S, T, U) < P^2. \quad (2.12)$$

Область $G_{NN}(S, T, U)$, в которой интегралы Фейнмана регулярны и эрмитовы для любой сильно связанной диаграммы процесса рассеяния нуклона на нуклоне, задается следующим образом при помощи функции (2.8)

$$G_{NN}(S, T, U):$$

$$\max\{f(S, T, U), f(S, U, T), f(U, T, S), f(T, U, S)\} < 1, \quad (2.13)$$

$$(S \geq 0, \quad T \geq 0, \quad U \geq 0).$$

В случае рассеяния антинуклона на нуклоне соответствующая область $G_{N\bar{N}}$ также выражается через квадрат нормы (2.8):

$$G_{N\bar{N}}\{S, T, U\}:$$

$$\max\{f(S, T, U), f(U, T, S), f(T, S, U), f(U, S, T)\} < 1. \quad (2.14)$$

Полученные результаты позволяют рассмотреть аналитические свойства диаграмм NN и $N\bar{N}$ рассеяния при всех вещественных импульсах P_i , лежащих на поверхности масс:

$$p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = p_4^2 = M^2. \quad (2.15)$$

В этом случае, пользуясь связью между векторами P_i и евклидовыми векторами P_i (§ 1, п.3), явным видом нормы (2.8) и уравнениями для областей G_{NN} и $G_{N\bar{N}}$ (2.13) и (2.14) нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 2

Вклад в амплитуду рассеяния нуклона на нуклоне от произвольной сильно связанной диаграммы этого процесса выражается через вещественные аналитические функции от s и t (умноженные на полиномиально зависящие от импульсов эрмитовы матрицы), регулярные в (треугольной) области

$$G_{NN}\{s, t\}: \quad s < 4M^2, \quad t < 4m^2, \quad u < 4m^2, \quad (2.16)$$

на плоскости

х) Уравнение для нормы получается из уравнения поверхности особых точек диаграммы /3,17,21/ заменой импульсов P_i на $\frac{P_i}{\sqrt{f}}$.

$$s + t + u = 4M^2. \quad (2.17)$$

Другими словами, в области (2.16) квадратичные формы для всех сильно связанных диаграмм отрицательны.

Аналогично для процесса рассеяния антинуклона на нуклоне область регулярности G_{NN} на плоскости (2.17) имеет вид $G_{NN} \{s, t\}$:

$$s < 4m^2, \quad t < 4m^2, \quad u < 4M^2. \quad (2.18)$$

Области (2.16) и (2.18) являются максимальными областями на плоскости (2.17) с указанными свойствами.

Легко видеть, что области G_{NN} и G_{NN} не имеют ни одной общей точки, если $M^2 > 3m^2$.

2. Рассеяние скалярного мезона на нуклоне

Как было показано в [13], все сильно связанные диаграммы рассеяния скалярного мезона на нуклоне мажорируются четырьмя диаграммами (рис. 4) с различными нумерациями внешних мезонных и нуклонных узлов.

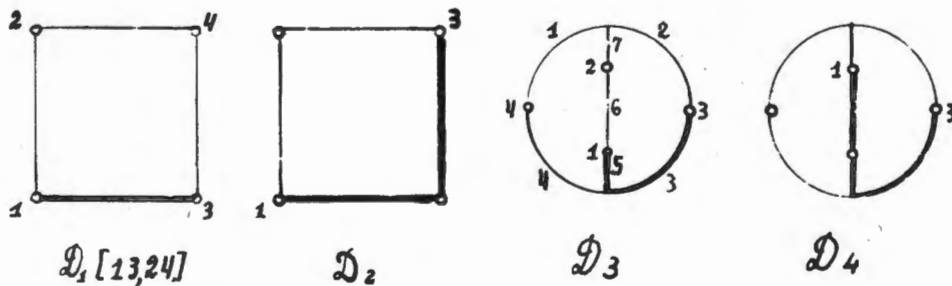


Рис. 2.

Применим этот результат к исследованию амплитуды рассеяния, когда скалярные произведения внешних импульсов вещественны и их квадраты равны квадратам соответствующих масс:

$$p_1^2 = p_3^2 = M^2, \quad p_2^2 = p_4^2 = m^2 \quad (2.19)$$

Рассмотрим сначала две диаграммы типа D_1 : $D_1 [13,24]$ и $D_1 [13,42]$. Мажорируя квадратичные формы этих диаграмм квадратичными формами от евклидовых импульсов P_i (§ 1, п3), мы получаем область аналитичности диаграмм, мажорируемых диаграммами типа D_1 :

$$G(D_1): \quad s < (M + m)^2, \quad u < (M + m)^2, \\ -4m^2 + \max\{\Phi(s), \Phi(u)\} < t < 4m^2, \quad (2.20)$$

где

$$\Phi(s) = -\frac{4m}{\sqrt{s}} \sqrt{[(M+m)^2 - s][s - (M-m)^2]}; \quad (2.21)$$

переменные s , t и u связаны, согласно (1.5), соотношением

$$s + t + u = 2(M^2 + m^2).$$

(2.22)

Наметим доказательство этого утверждения.

Прямолинейные участки границы области (2.20) соответствуют так называемым нормальным порогам (см. /2,3/; по терминологии работ /17, 21/ - это особенности для низших диаграмм, полученных из диаграмм типа D_1 стягиванием двух противоположных линий в точку).

Труднее получить криволинейную часть границы области $G(D_1)$:

$$t + 4m^2 = \begin{cases} \Phi(s) & s \geq u \\ \Phi(u) & s < u \end{cases} \quad (2.23)$$

Для этого необходимо рассмотреть область $t < -4m^2$. В этой области скалярные произведения евклидовых векторов P_i представляются формулой (1.29), и мы имеем дело с собственными особенностями^{x)} диаграммы D_1 . При $s \geq u$ приравняв единице норму диаграммы D_1 [3,24], получаем уравнение

$$s \left[\frac{t^2}{4} + 2m^2 t - 4m^2 (2M^2 + m^2) \right] + 4m^2 [(M^2 - m^2)^2 + s^2] = 0. \quad (2.24)$$

Меньший корень t этого уравнения совпадает с (2.23), (2.21). При $s \leq u$ мы должны вместо диаграммы D_1 [13,24] взять диаграмму D_1 [13,42].

Оказывается, что квадратичные формы диаграмм D_2, D_3 и D_4 от евклидовых импульсов P_i , заданных формулами (1.27-29), тоже отрицательны в области $G(D_1)$. Проверка этого утверждения хотя и весьма громоздка (в особенности в отношении диаграмм D_3 и D_4) но в принципе элементарна (см. приложение).

Полученные результаты могут быть резюмированы в следующей теореме.

Теорема 3.

Вклад в амплитуду рассеяния мезона на нуклоне от произвольной сильно связанной диаграммы этого процесса является линейной комбинацией вещественных аналитических функций от s и t (с эрмитовыми операторными коэффициентами, полиномиально зависящими от внешних импульсов), регулярных в области (2.20):

$$G_{\pi N} \{ s, t \} = G(D_1). \quad (2.25)$$

Эта область изображена на рис. 3.

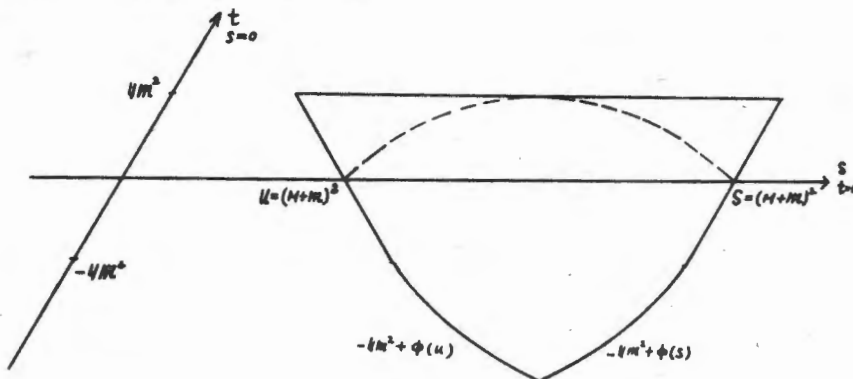


Рис. 3.

X) Мы пользуемся терминологией статей /17, 21/

(Область $G_{\pi N}$ (2.25) ограничена сплошной линией (триа отрезками прямых и кривой (2.23)), Осью s и гиперболой $su = (M^2 - m^2)^2$ (пунктирной линией) ограничена область евклидовости (см. § 1 п. 1 (1.7) и (1.8))).

Отметим, что в отличие от теоремы 2, которая дает максимальную вещественную область аналитичности G_{NN} , теорема 3 дает лишь достаточное условие аналитичности амплитуды рассеяния скалярного мезона на нуклоне при вещественных s и t . Действительно, кривая (2.23), ограничивающая снизу область $G_{\pi N} \{s, t\}$, получена лишь из-за применения метода мажорирования при евклидовых импульсах. До сих пор нет примера, опровергающего гипотезу, что на самом деле вещественная область аналитичности всех сильно связанных диаграмм рассматриваемого процесса шире и совпадает с треугольником

$$s < (M+m)^2, \quad u < (M+m)^2, \quad t < 4m^2, \quad s+t+u = 2(M^2+m^2). \quad (2.26)$$

Вопрос о справедливости этой гипотезы (которая без труда проверяется для простейших диаграмм) в настоящее время является открытым.

§ 3. Доказательство однократных дисперсионных соотношений для процессов упругого рассеяния. Дисперсионные соотношения для парциальных волн

1. Аналитические свойства диаграмм при комплексных s и t

Вклад в амплитуду рассеяния от произвольной диаграммы D с квадратичной формой $\mathcal{Q}_D(a, p)$ может быть записан в виде

$$T_D(p) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{F_D(a, p) \delta(1 - \sum_{\nu=1}^{\ell} a_{\nu})}{[\mathcal{Q}_D(a, p) + i0]^c} \prod_{\nu=1}^{\ell} da_{\nu}, \quad (3.1)$$

где $F_D(a, p)$ - полином от p , $c > 0$. Например, если каждой внутренней линии диаграммы соответствует скалярный пропагатор $(k_{\nu}^2 - m_{\nu}^2 + i0)^{-1}$ и диаграмма D не содержит расходимостей, то функция $F_D(a, p)$ не зависит от p , а $c = 2n - \ell - 2$ (см. /21/); здесь ℓ - число внутренних линий, n - число узлов диаграммы.

В случае рассеяния двух частиц, когда внешние импульсы лежат на поверхности масс, функцию $\mathcal{Q}_D(a, p)$ (см. (1.32)) можно записать в виде:

$$\mathcal{Q}_D(a, p) = A(a) s + B(a) t + C(a), \quad (3.2)$$

где функции A , B и C зависят лишь от масс и от a (инварианты s и t определены формулой (1.5)).

В предыдущем параграфе для каждого из процессов упругого рассеяния с участием π -мезонов и нуклонов была найдена вещественная область аналитичности $G\{s, t\}$. В работе /14/ показано, как, исходя из области $G\{s, t\}$, найти некоторую область $\tilde{G}(s, t)$ в пространстве двух комплексных переменных s и t , в которой функция $T_D(s, t)$ также аналитична. Для того, чтобы функция $T_D(s, t)$ имела особенность в комплексной точке

$$s = s' + is'', \quad t = t' + it'', \quad (3.3)$$

необходимо, чтобы знаменатель в правой части (3.1) обращался в нуль в этой точке. Условие обращения в нуль функции Q_D в точке (3.3), в силу (3.2) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} A(a) s' + B(a) t' + C(a) &= 0, \\ A(a) s'' + B(a) t'' &= 0 \quad ; \end{aligned} \quad (3.4)$$

(условия (3.4) должны выполняться хотя бы при одном a из области интегрирования в (3.1)). Из однородности второго равенства (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} \text{если} \quad A(a) s + B(a) t + C(a) &= 0, \\ \text{то и} \quad A(a) s_\lambda + B(a) t_\lambda + C(a) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{где} \quad s_\lambda = s' + \lambda s'' \quad , \quad t_\lambda = t' + \lambda t'' \quad , \quad (3.6)$$

λ - произвольное вещественное число.

Наоборот, если существует вещественное λ такое, что точка (s_λ, t_λ) принадлежит множеству $G \{s, t\}$ (где $Q_D < 0$), то комплексная точка (3.3) является точкой регулярности функции $T_D(s, t)$. Область $\tilde{G} \{s, t\}$ в пространстве двух комплексных переменных s и t определяется как множество точек вида (3.3), для которых существует такое вещественное λ , что точка (3.6) принадлежит вещественной области $G \{s, t\}$.

Нетрудно убедиться (ср. /14/), что область \tilde{G} является областью голоморфности, т.е. она не может быть расширена при помощи общих методов теории функций нескольких комплексных переменных. С другой стороны, \tilde{G} заведомо не содержит всех комплексных точек аналитичности функции $T_D(s, t)$.

В следующих пунктах этого параграфа мы докажем дисперсионные соотношения по s при фиксированном t и по t - при фиксированном s . Мы получим также дисперсионные соотношения по квадрату импульса ν в системе центра масс при фиксированном угле рассеяния θ . Это позволит нам доказать дисперсионные соотношения для парциальных волн в случае рассеяния мезона на мезоне и нуклона на нуклоне^{x)}. Отметим, что в то время как дисперсионные соотношения при фиксированном t или s устанавливаются одинаково просто во всех случаях, вывод дисперсионных соотношения при фиксированном θ в случае рассеяния частиц с разными массами сложнее из-за нелинейной связи между переменными s и ν .

2. Дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния нуклона на нуклоне и мезона на мезоне

Дисперсионные соотношения для $T_D(s, t)$ по одной из переменных s или t при фиксированной второй переменной следуют из установленной аналитичности функции T_D

^{x)} Этот вывод принципиально проще, чем вывод такого же результата в /25,26/, основанный на использовании весьма нетривиального интегрального представления, полученного в /15/. Для $\pi\pi$ -рассеяния в /41,42/ дан вывод по существу эквивалентный нашему.

в области $\tilde{G}\{s, t\}$. Рассмотрим в качестве примера рассеяние нуклона на нуклоне. Дисперсионные соотношения по s справедливы при произвольном фиксированном t из интервала

$$-4m^2 < t < 4M^2. \quad (3.7)$$

Действительно, точка $(s = s' + i s'', t)$, где $s'' \neq 0$, а t - из интервала (3.7), принадлежит области аналитичности $\tilde{G}_{NN}\{s, t\}$, так как всегда можно выбрать вещественное λ таким образом, чтобы

$$4(M^2 - m^2) - t < s_\lambda = s' + \lambda s'' < 4M^2. \quad (3.8)$$

Очевидно, вещественная точка (s_λ, t) принадлежит G_{NN} и, следовательно, точка (s, t) принадлежит области \tilde{G}_{NN} . При вещественных s функция $T_D(s, t)$ аналитична в интервале $(4(M^2 - m^2) - t, 4M^2)$ и, вообще говоря, имеет точки ветвления на концах этого интервала. В силу теоремы Коши отсюда следуют дисперсионные соотношения для рассеяния нуклона на нуклоне следующего типа (мы не учитываем операторной - спиновой и изотопической - структуры амплитуды рассеяния нуклона на нуклоне и предполагаем, что она убывает при $|s| \rightarrow \infty$):

$$\operatorname{Re} T_D(s, t) = \frac{1}{\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^{4(M^2 - m^2) - t} + \int_{4M^2}^{\infty} \right\} \frac{\operatorname{Im} T_D(s', t)}{s' - s} ds' \quad (3.9)$$

(здесь P - знак главного значения интеграла в смысле Коши).

Аналогично, если s фиксировано в интервале

$$4(M^2 - 2m^2) < s < 4M^2, \quad (3.10)$$

функция $T_D(s, t)$ аналитична при любом комплексном t и при вещественных t из интервала

$$4(M^2 - m^2) - s < t < 4m^2. \quad (3.11)$$

Амплитуда $T(s, t)$ удовлетворяет дисперсионным соотношениям с неоднородными (полюсными) членами:

$$\operatorname{Re} T(s, t) = \frac{g^2}{m^2 - t} + \frac{g^2}{s + t - 4M^2 + m^2} + \frac{1}{\pi} P \left\{ \int_{4m^2}^{\infty} + \int_{-\infty}^{4b-s} \right\} \frac{\operatorname{Im} T(s', t')}{t' - t} dt' \quad (3.12)$$

(g - константа мезонно-нуклонного взаимодействия).

Если в полученных формулах (3.7) - (3.12) положить $M = m$, то мы получим как частный случай область аналитичности амплитуды рассеяния (скалярного) мезона на мезоне и дисперсионные соотношения для этой амплитуды.

Нетрудно записать дисперсионные соотношения при фиксированном t и в переменных системы Брайта (т.е. в системе, в которой $\vec{p}_1 = \vec{p}_3$), в которых обычно записывались дисперсионные соотношения, полученные из общих постулатов теории поля^{127/}. Для этого достаточно заметить, что квадрат инвариантной передачи импульса равен $\Delta^2 (= \vec{p}_1^2) = -\frac{t}{4}$, в то время как энергия второй частицы в системе Брайта выражается через инварианты s и t следующим образом

$$E (= p_{20}) = \frac{s - \frac{1}{2}t - 2M^2}{2\sqrt{M^2 - \frac{1}{4}t}}$$

(M - масса нуклона или мезона, в зависимости от того, какой процесс рассматривается),

Перейдем теперь к получению дисперсионных соотношений по s (или по квадрату импульса в системе центра масс) при фиксированном $z = \cos \theta$, где θ - угол рассеяния в системе центра масс. Как и выше, проведем рассуждение лишь для рассеяния нуклона на нуклоне. Дисперсионные соотношения при фиксированном z в случае рассеяния скалярных мезонов получатся как следствие при $M = m$.

Инвариантная переменная t выражается посредством s и z следующей формулой:

$$t = \frac{1}{2} (4M^2 - s)(1 - z). \quad (3.13)$$

При $z = 1$ (рассеяние вперед) $t = 0$ и дисперсионные соотношения по s являются частным случаем из полученных выше дисперсионных соотношений при фиксированном t (из интервала (3.7)). Покажем, что дисперсионные соотношения по s справедливы при любом вещественном z (в том числе и при всех физических углах, когда $-1 < z < 1$).

Найдем сначала вещественные точки аналитичности по s функции $T_D(s, t)$ при фиксированном z . Для того, чтобы точка (s, z) принадлежала области G_{NN} (2.27) необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$0 < \frac{1}{2} (4M^2 - s)(1 + |z|) < 4m^2. \quad (3.14)$$

При комплексных $s = s' + i s''$, ($s'' \neq 0$) функция T_D аналитична, так как в этом случае можно подобрать вещественное λ таким образом, чтобы $s_\lambda = s' + \lambda s''$ удовлетворяло (3.14). Неравенство (3.14) упрощается, если вместо переменной s ввести переменную ν (квадрат импульса в системе центра масс): $s = 4(M^2 + \nu)$. В плоскости ν интервал (3.14) записывается в виде

$$-\frac{2m^2}{1 + |z|} < \nu < 0. \quad (3.15)$$

Из доказанной аналитичности $T(s, t)$ следуют не только дисперсионные соотношения по s (или по ν) при фиксированном z , но и дисперсионные соотношения для парциальной амплитуды. Действительно, парциальная амплитуда (для данной диаграммы) равна

$$f_\rho(\nu) = \int_{-1}^1 T_D(s, t) P_\rho(z) dz, \quad (3.16)$$

где $T(s, t)$ задана выражением (3.1) - (3.2),

$$s = 4(M^2 + \nu), \quad t = -2\nu(1 - z). \quad (3.17)$$

Если $\text{Im } \nu \neq 0$ или если $\text{Im } \nu = 0$, но

$$-m^2 < \nu < 0, \quad (3.18)$$

то интеграл по z (3.1) сходится равномерно относительно z в интервале $-1 < z < 1$ и, следовательно, в (3.16) можно менять порядок интегрирования по z и по ν . Отсюда следует, что парциальная амплитуда $f_\rho(\nu)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$\text{Re } f_\rho(\nu) = \frac{1}{\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^{-m^2} + \int_0^{\infty} \right\} \frac{\text{Im } f_\rho(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu'. \quad (3.19)$$

В точности такое же дисперсионное соотношение справедливо для парциальных амплитуд $\pi - \pi$ -рассеяния.

Отметим, что аналогичный результат не имеет места для амплитуды \overline{NN} рассеяния. Действительно, при вещественном s , согласно (2.18) эта амплитуда аналитична в области

$$s < 4m^2, \quad t = \frac{1}{2}(4M^2 - s)(1 - z) < 4m^2, \quad (3.20)$$

$$G_{\overline{NN}}^{-1} \quad u = \frac{1}{2}(4M^2 - s)(1 + z).$$

Первые два неравенства совместны при $z = -1$ лишь при условии $M^2 < 2m^2$ (на самом деле, $M = 6,7 m$). Из (3.20) видно, что дисперсионные соотношения по s (или v) при фиксированном z справедливы лишь при

$$\frac{1}{2}(1 - z) < \frac{m^2}{M^2 - m^2} \quad (3.21)$$

3. Дисперсионные соотношения для упругого рассеяния мезона на нуклоне

Дисперсионные соотношения по s при фиксированном t и по t при фиксированном s устанавливаются так же, как и в случае рассеяния нуклона на нуклоне (см. п.2). Согласно результатам п.2 предыдущего параграфа (2.25) дисперсионные соотношения при фиксированном t имеют вид:

$$\operatorname{Re} T(s, t) = \frac{g^2}{M^2 - s} + \frac{g^2}{s + t - M^2 - 2m^2} + \frac{1}{\pi} P \left\{ \int_{-\infty}^{s_-(t)} + \int_{s_+(t)}^{\infty} \right\} \frac{\operatorname{Im} T(s', t) ds'}{s' - s}, \quad (3.22)$$

где

$$s_+(t) = \begin{cases} (M + m)^2, & \text{при } -4m^2 < t < 4m^2, \\ M^2 + m - \frac{1}{2m^2} (m^2 + \frac{1}{4}t)^2 + \sqrt{\phi(t)}, & \text{при } t < -4m^2; \end{cases}$$

$$s_-(t) = \begin{cases} (M - m)^2 - t, & \text{при } -4m^2 < t < 4m^2, \\ M^2 + m + \frac{1}{2m^2} (m^2 + \frac{1}{4}t)^2 - t - \sqrt{\phi(t)}, & \text{при } t < -4m^2; \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\phi(t) = \left[2m^2 - \frac{1}{2m^2} (m^2 + t/4)^2 \right] \left[2M^2 - \frac{1}{2m^2} (m^2 + t/4)^2 \right].$$

Они справедливы при t из интервала

$$-4m^2 - \sqrt{(M^2 + 3m^2)^2 + 16m^2(M^2 - m^2)} + M^2 + 3m^2 < t < 4m^2. \quad (3.24)$$

При $t \geq -4m^2$ дисперсионные соотношения имеют обычный вид (см., например, /5/), в то время как при $t < -4m^2$ "щель" между пределами интегрирования s_+ и s_- меньше той, которая получается из общих постулатов /27/.

Отметим, однако, что не исключено равенство $\operatorname{Im} T(s, t) = 0$ в интервалах $[(M - m)^2 - t, s_-]$ и $[s_+, (M + m)^2]$.

При реальном соотношении между нуклонной и π -мезонной массой $M \approx 6,7 m$ наименьшее значение t , при котором удается доказать дисперсионные соотношения по s , согласно (3.24), равно

$$t = -4\Delta^2 = -11m^2 \quad (3.25)$$

(здесь Δ^2 -инвариантная передача импульса).

Дисперсионные соотношения по t при фиксированном s имеют вид

$$\operatorname{Re} T(s, t) = 1/\pi P \left\{ \int_{4m^2}^{\infty} + \int_{-\infty}^{t(s)} \right\} \frac{\operatorname{Im} T(s, t')}{t' - t} dt', \quad (3.26)$$

где

$$t(s) = (M - m)^2 - s \quad \text{при } (M - 3m)(M + m) < s < (M - m)^2 + 4m^2,$$

$$t(s) = -4m^2 - \frac{4m}{\sqrt{u}} \sqrt{[(M + m)^2 - u][u - (M - m)^2]}$$

$$\text{при } (M - m)^2 + 4m^2 < s < s_0 = \frac{1}{2} [M^2 + 3m^2 + \sqrt{(M^2 + 3m^2)^2 + 16m^2(M^2 - m^2)}] \quad (3.27)$$

$$t(s) = -4m^2 - \frac{4m}{\sqrt{s}} \sqrt{[(M + m)^2 - s][s - (M - m)^2]}$$

$$\text{при } s_0 < s < (M + m)^2,$$

(u выражается через s и t формулой (1.5)).

При $(M - 3m)(M + m) < s < (M - m)^2 + 4m^2$ дисперсионные соотношения (3.26) имеют такой же вид, как и полученные из представления Мандельштама. Они совпадут и при $(M - m)^2 + 4m^2 < s < (M + m)^2$, если окажется, что $\operatorname{Im} T(s, t) = 0$ в области:

$$(M - m)^2 - s < t < 4m^2, \quad (M - m)^2 + 4m^2 < s < (M + m)^2.$$

Перейдем теперь к вопросу о получении дисперсионных соотношений по s при фиксированном $z = \cos \theta$. В этом случае трудность возникает из-за того, что при заданном z t зависит нелинейно от s (в отличие от (3.13))

$$t = -\frac{1}{2s} [s^2 - 2(M^2 + m^2)s + (M^2 - m^2)^2] (1 - z). \quad (3.28)$$

Пусть $s = s' + is''$; тогда

$$t' = \operatorname{Re} t = \frac{1-z}{2} [2(M^2 + m^2) - s' - \frac{b^2}{|s|^2} s'], \quad (3.29a)$$

$$t'' = \operatorname{Im} t = \frac{1-z}{2} \left(\frac{b^2}{|s|^2} - 1 \right) s'', \quad (3.29b)$$

где $|s|^2 = s'^2 + s''^2$, $b = M^2 - m^2$.

Условия, чтобы точка (s_λ, t_λ) (3.6) лежала в области аналитичности $G_{\pi N}(s, t)$, могут быть записаны в виде:

$$s' + \lambda s'' < (M + m)^2, \quad (3.30)$$

$$(b^2 - |s|^2)\lambda s'' < 2(2m^2a^2 - M^2 - m^2)|s|^2 + (|s|^2 + b^2)s', \quad (3.31)$$

$$[b^2 + (a^2 - 1)|s|^2]\lambda s'' > [a^2(M - m)^2 - 2(M^2 + m^2)]|s|^2 + [b^2 - (a^2 - 1)|s|^2]s', \quad (3.32)$$

где

$$a^2 = \frac{2}{1-z} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \geq 1. \quad (3.33)$$

Отметим, что из неравенств (3.30) и (3.32) следует, что при $-1 \leq z \leq 1$, $t_\lambda = t' + \lambda t'' \geq 0$, а следовательно, при исследовании аналитических свойств по s при фиксированном z достаточно рассмотреть неотрицательные значения t и нет надобности учитывать часть кривой (2.23) (рис. 3).

Условия (3.30) и (3.32) совместны, т.е., если $a \geq 1$ и $s'' \neq 0$, то можно подобрать λ такое, чтобы одновременно имели место эти неравенства. Ограничения на область аналитичности получаются из требования совместности неравенства (3.31) с этими двумя неравенствами.

Рассмотрим два случая: а) $|s| > b$ и б) $|s| < b$.

а) При $|s|^2 > b^2$ непротиворечивость неравенств (3.31) и (3.32) очевидна, и остается найти условие совместности неравенств (3.30) и (3.31). Это условие может быть записано в виде

$$b^2(M + m)^2 < [4m^2a^2 - (M - m)^2]|s|^2 + 2b^2s'. \quad (3.34)$$

Область (3.34) представляет собой внешность некоторого круга в комплексной плоскости s , если

$$2ma > M - m \quad (3.35a)$$

и внутренность некоторого круга, если

$$2ma < M - m. \quad (3.35б)$$

В граничном случае

$$2ma = M - m \quad (3.35в)$$

область (3.34) представляет собой правую полуплоскость

$$s' > \frac{1}{2}(M + m)^2. \quad (3.36)$$

Нетрудно видеть (см., например, [28]), что для исследования сингулярностей парциальных амплитуд (по переменной s) необходимо и достаточно определить особенности амплитуды $T(s, z)$ при $z = -1$, т.е. при $a = 1$. Из неравенств (3.34) и $|s| > b$ при условии $s'' \neq 0$ мы получаем в зависимости от соотношений между массами m и M следующие области аналитичности (заштрихованные на рис. 4-6) для парциальных амплитуд:

1. $m < M < 3m$

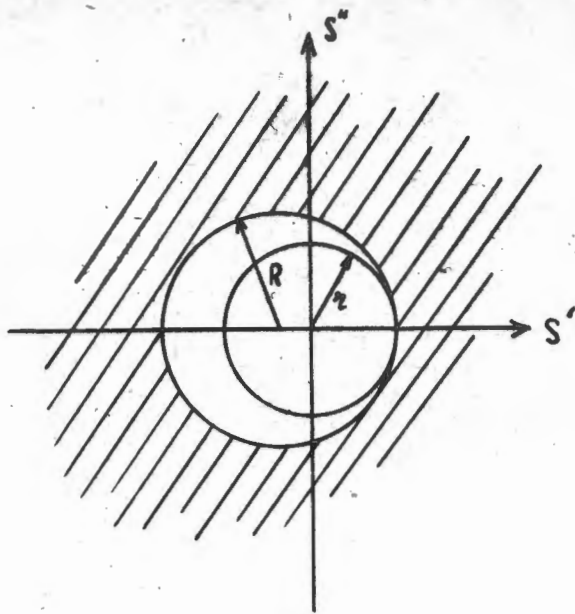


Рис. 4.

$$(r = b, R = \frac{2m}{|3m - M|} b)$$

2.

$$M = 3m$$

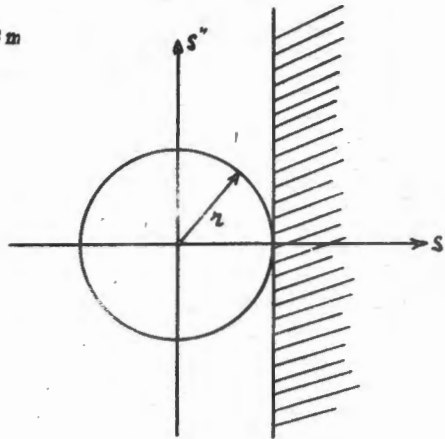


Рис. 5.

3.

$$M > 3m$$

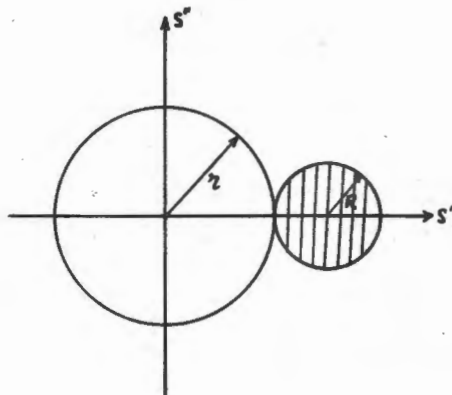


Рис. 6.

В данном случае область аналитичности определяется неравенством:

$$\left(\frac{s'}{b} - \frac{M-m}{M-3\pi}\right)^2 + \left(\frac{s''}{b}\right)^2 < \left(\frac{2\pi}{M-3m}\right)^2. \quad (3.34)$$

При $a = \frac{M}{\pi}$ (так же, как и при $a > \frac{M}{\pi}$) имеет место случай (3.35а) (поскольку $M > m$), и область (3.34) имеет вид внешности круга

$$\left(\frac{s'}{b} + \frac{M-m}{3M-\pi}\right)^2 + \left(\frac{s''}{b}\right)^2 > \left(\frac{2M-\pi}{3M-\pi}\right)^2. \quad (3.33)$$

Окружность, которая получается, если знак неравенства в (3.33) заменить равенством, всегда касается изнутри окружности $|s| = b$ в точке $s = -b$. Поэтому при любом фиксированном значении a (т.е. z), удовлетворяющем неравенству $a \geq \frac{M}{\pi}$, амплитуда $f(s, z)$ аналитична по s всюду в области $|s| > b$, если $s'' \neq 0$.

в) При $|s| < b$, $s'' \neq 0$, (3.39)

неравенства (3.30) и (3.31) ограничивают $\lambda s''$ лишь сверху и поэтому могут быть выполнены одновременно, в то время как условие совместности неравенств (3.31) и (3.32) имеет вид:

$$[4(a^2 - 1)\pi^2 - (M + m)^2] |s|^2 + 2b^2 s' > b^2 (M - 3m)(M + m). \quad (3.40)$$

Область (3.40) представляет собой внутренность круга на комплексной плоскости, если $4m^2(a^2 - 1) < (M + \pi)^2$ и внешность некоторого круга, если имеет место обратное неравенство.

При $a = 1$ ($z = -1$) (3.40) задает внутренность круга

$$[s' - (M - \pi)]^2 + s''^2 < 4m^2(M - \pi)^2. \quad (3.41)$$

Окружность, ограничивающая круг (3.41), касается изнутри окружности $|s| = b$ в точке $s = b$. Ввиду (3.39) и (3.41) парциальные амплитуды являются аналитическими функциями в области, изображенной на рис. 7 (заштрихованная область).

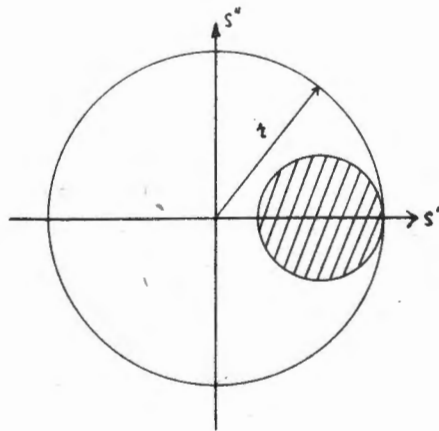


Рис. 7.

При $a \geq \frac{M}{\pi}$ область (3.40) является областью, лежащей вне круга

$$\left(\frac{s'}{b} + \frac{M-\pi}{3M-5\pi}\right)^2 + \left(\frac{s''}{b}\right)^2 > \left(\frac{2M-2\pi}{3M-5\pi}\right)^2, \quad (3.42)$$

который, как легко видеть, касается окружности $|s| = b$ в точке $s = -b$.

Учитывая (3.42), а также неравенство $|s| < b$, мы видим, что амплитуда $f(s, z)$ является аналитической функцией s в области, изображенной на рис. 8 (заштрихованная область).

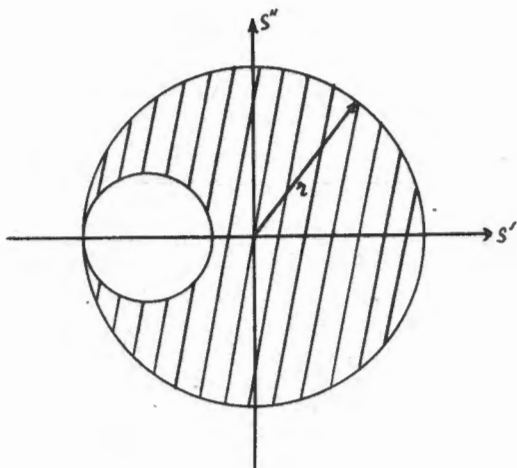


Рис. 8.

При $M \leq 2m$ окружность, определенная (3.42), лежит целиком вне круга (3.39) и поэтому амплитуда аналитична всюду в области $|s| < b$, $s'' \neq 0$.

На окружности $|s| = b$, при $1 < a \leq \frac{M}{m}$, амплитуда аналитична, если

$$s' > M^2 + m^2 - 2m^2 a^2. \quad (3.43)$$

До сих пор мы рассматривали лишь комплексные значения s . Если s вещественно ($s''=0$), то нетрудно убедиться, что при любом $z > -1$ амплитуда аналитична в интервале

$$(M - m)^2 < s < (M + m)^2. \quad (3.44)$$

При $z = -1$ из этого интервала необходимо исключить точку $s = b$.

Сравним полученные результаты с результатами, вытекающими из представления Мандельстама ^{/29-31/}.

Начало разреза в третьей реакции ($NN \rightarrow \pi\pi$) $t = 4m^2$ при $1 \leq a \leq \frac{M}{m}$, как следствие из представления Мандельстама ^{/5/} дает особенности по s в комплексных точках

$$s = M^2 + m^2 - 2a^2 m^2 + 2mi \sqrt{(M^2 - a^2 m^2)(a^2 - 1)}, \quad (3.45)$$

лежащих на окружности $|s| = b$. Если $a > 1$, то лишь часть точек этой окружности, определяемая неравенством (3.43), являются особыми.

Из представления Мандельстама следует, что амплитуда имеет разрезы на вещественной оси s в интервалах $s \geq (M + m)^2$ и $s \leq (M - m)^2$. Таким образом, вещественные особенности амплитуды, полученные здесь на основе мажорации диаграмм, так же, как и особенности на окружности

$$|s| = b \quad (3.46)$$

совпадают с особенностями, которые вытекают из представления Манделъстама. Однако на основе нашего метода мы пока не в состоянии доказать отсутствие комплексных особенностей в области между окружностями (3.46) и (3.34), так же как и во внутренности круга, определяемого неравенством, обратным к (3.42) при $M > 2m$, хотя такие особенности не должны возникать, если справедливо представление Манделъстама. Важно отметить, что при $a \geq \frac{M}{m}$, т.е. при

$$1 - 2\left(\frac{m}{M}\right)^2 < z < 1, \quad (3.47)$$

не возникает никаких "лишних" особенностей вне круга (3.46). Перейдем от переменной s к переменной ν по формулам

$$s = (\sqrt{M^2 + \nu} + \sqrt{m^2 + \nu})^2, \quad (3.48)$$

$$\nu = \frac{1}{4s} [s^2 - 2(M^2 + m^2)s + (M^2 - m^2)^2], \quad /s \geq b/.$$

Мы выбираем ту ветвь корня в первой формуле (3.48) в комплексной плоскости ν с разрезом на вещественном интервале $-M^2 \leq \nu \leq -m^2$, которая принимает положительные значения при $\nu > -m^2$, и, следовательно, отрицательна при $\nu < -M^2$.

При преобразовании (3.48) комплексная плоскость отображается на внешность круга (3.46) (сама окружность (3.46) при этом преобразуется в отрезок $-M^2 \leq \nu \leq -m^2$). Из доказанного нами при изучении аналитических свойств амплитуды по s при фиксированном z следует, что при фиксированном значении z из интервала (3.47) справедливы следующие спектральные представления по ν :

$$T(\nu, z) = \frac{g^2}{M^2 - s} + \frac{g^2}{M^2 - u} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-m^2} \frac{A_2(\nu', z)}{\nu' - \nu - i0} d\nu' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_1(\nu', z)}{\nu' - \nu - i0} d\nu', \quad (3.49)$$

где $s = s(\nu)$ задается первой формулой (3.48), а

$$u = u(\nu, z) = M^2 + m^2 - 2\nu z - 2\sqrt{(M^2 + \nu)(m^2 + \nu)}. \quad (3.50)$$

Если симметризовать функцию $T(\nu, z)$ по переменной $\sqrt{(M^2 + \nu)(m^2 + \nu)}$ (см. /31/), то начало левого разреза можно сдвинуть.

4. Сравнение с результатами общего подхода

Как отмечалось в введении, метод мажорирования диаграмм не использует всей информации, заложенной в формулах для отдельных членов теории возмущений. Этим объясняется тот факт, что мы получили меньше сведений об аналитических свойствах антиэрмитовой части амплитуды (в области, где она не исчезает), чем те, которые следуют из общих постулатов причинности, ковариантности и спектральности /27, 32-35/ x). С другой стороны,

x) Условие унитарности не было бы до сих пор в полной мере использовано для получения аналитических свойств (см. /37/).

результаты, изложенные в настоящей работе, в ряде пунктов далеко превосходят, то, что удается получить в аксиоматическом подходе.

Действительно, мы получили дисперсионные соотношения для рассеяния нуклона на нуклоне, дисперсионные соотношения при фиксированной энергии s и при фиксированном $z = \cos\theta$, доказали дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд рассеяния нуклона на нуклоне и мезона на мезоне (п.2) - все эти результаты не получаются из общих постулатов. С другой стороны, метод мажорирования не дает возможности доказать аналитичность амплитуды рассеяния мезона на мезоне (или мезона на нуклоне) относительно инвариантной передачи импульса t при комплексных t и $s > 4m^2$ (или, соответственно, при $s > (M+m)^2$) несмотря на то, что Леману^{/32/}, исходя из общих постулатов, удалось доказать аналитичность амплитуды в некотором эллипсе на комплексной плоскости t . Сравним также максимальные передачи импульса, при которых доказаны дисперсионные соотношения по энергии аксиоматическим методом и методом мажорирования.

1. Рассеяние скалярного мезона на мезоне:

метод мажорирования дает $\Delta_{max}^2 (= (-\frac{t}{4})_{max}) = m^2$,

общий подход дает $\Delta_{max}^2 = 2m^2$

2. Рассеяние скалярного мезона на нуклоне (при $M \approx 6.7m$):

метод мажорирования:

$$(-t)_{max} = 4\Delta_{max}^2 = 4m^2 + \sqrt{(M^2 + 3m^2)^2 + 16m^2b - M^2 - 3m^2} \approx 11m^2,$$

общий подход:

$$4\Delta_{max}^2 = 3m^2 \left(2 + \frac{m}{M}\right) \approx 6.45m^2.$$

Отметим, что в случае рассеяния псевдоскалярного π -мезона на нуклоне оценка максимальной передачи импульса, полученная из аксиоматического подхода, улучшается:

$$\Delta_{max}^2 = \frac{8}{3} \frac{2M+m}{2M-m} m^2 \approx 3.1m^2.$$

3. Рассеяние нуклона на нуклоне и антинуклона на нуклоне: общий аксиоматический подход не позволяет доказать дисперсионные соотношения даже при $\Delta^2 = 0$, если $m < (\sqrt{2}-1)M$ (что имеет место для наблюдаемых значений масс π -мезона и нуклона);

метод мажорирования дает $\Delta_{max}^2 = m^2$.

В заключение выражаем глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову и участникам семинара Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы наметим доказательство утверждения, что квадратичные формы диаграмм D_2 , D_3 и D_4 (рис. 2) при евклидовых импульсах P , заданных формулами (1.27-29), отрицательны в области (2.20) (§ 2, п.2).

Сформулированное утверждение легко доказывается для той части области $G_{\pi N} \{s, t\}$, в которой отсутствуют аномальные пороги, т.е. при $t \geq -4m^2$. При $t < -4m^2$ (когда скаляр-

ные произведения импульсов P_i заданы формулами (1.29), нетрудно проверить, что область $G(D_2)$ ограничена снизу той же кривой (2.23), что и $G(D_1)$. Наибольшая трудность представляет проверка того, что квадратичные формы Q_3 и Q_4 диаграмм D_3 и D_4 отрицательны при $t < -4m^2$ в области (2.20). Для примера приведем эту проверку для диаграммы D_3 .

Пользуясь неравенствами, эквивалентными (2.20) при $-12m^2 < t < -4m^2$,

$$s < (\sqrt{M^2 - \lambda^2} + \sqrt{m^2 - \lambda^2})^2 \quad (1)$$

$$u < (\sqrt{M^2 - \lambda^2} + \sqrt{\pi^2 - \lambda^2})^2,$$

где

$$0 < \lambda = -\frac{4m^2 + t}{8m} < m, \quad (2)$$

получаем следующую оценку для квадратичной формы Q_3 :

$$\begin{aligned} & [(a_1 + a_4)(a_2 + a_3) + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_5 + a_6 + a_7)] Q_3(a, P) \leq \\ & \leq - (a_2 + a_3) [a_3 \sqrt{M^2 - \lambda^2} - (a_1 + a_7) \sqrt{m^2 - \lambda^2}]^2 - (a_1 + a_4) [(a_3 + a_5) \sqrt{M^2 - \lambda^2} - a_7 \sqrt{m^2 - \lambda^2}]^2 - \\ & - (a_5 + a_6 + a_7) (a_3 \sqrt{M^2 - \lambda^2} - a_1 \sqrt{m^2 - \lambda^2})^2 - a_3 \{ (a_1 \lambda - a_4 m)^2 + [(a_5 + a_7) \lambda - a_6 m]^2 \} - \\ & - a_1 \{ (a_3 \lambda - a_2 m)^2 + [(a_5 + a_7) \lambda - a_6 m]^2 \} - \\ & - \frac{1}{2} a_2 \{ (a_1 \lambda - a_2 m)^2 + [(a_5 + a_7) \lambda - a_6 m]^2 + [(a_1 + a_5 + a_7) \lambda - (a_4 + a_6) m]^2 \} - \\ & - \frac{1}{2} a_4 \{ (a_3 \lambda - a_2 m)^2 + [(a_5 + a_7) \lambda - a_6 m]^2 + [(a_3 + a_5 + a_7) \lambda - (a_2 + a_6) m]^2 \} - \\ & - \frac{1}{2} (a_5 + a_6 + a_7) \{ (a_3 \lambda - a_2 m)^2 + (a_1 \lambda - a_4 m)^2 + [(a_1 + a_3) \lambda - (a_2 + a_4) m]^2 \} - \\ & - (a_5 + a_7) (a_1 a_2 + a_3 a_4) m \lambda \leq 0 \end{aligned}$$

Проверка неравенства $Q_4 < 0$ в области (1) еще более громоздка.

Л и т е р а т у р а

1. Y.Nambu, Nuovo Cimento, 9 (1958) 610.
2. R.Karplus, Ch.Sommerfield and E.Wichman, Phys. Rev., 111 (1958) 1187.
3. R.Karplus, Ch.Sommerfield and E.Wichman, Phys. Rev., 114 (1959) 376.
4. R.Oehme, Nuovo Cimento, 13 (1959) 778.

5. S.Mandelstam, Phys. Rev., 112 (1958) 1344.
6. S.Mandelstam, Phys. Rev., 115 (1959) 1741.
7. J.Tarski, J. Math. Phys., 1 (1960) 149.
8. В.С.Владимиров. Украинский математический журнал, 12 (1960) 132.
9. Y.Nambu, Nuovo Cimento, 6 (1957) 1064.
10. K.Symanzik, Prog. Theor. Phys., 20 (1958) 690.
11. N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 21 (1959) 135.
12. А.А. Логунов, А.Н. Тавхелидзе, И.Т. Тодоров и Н.А. Черников. ДАН СССР, 135 (1960) 801.
13. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров и Н.А. Черников. Вопросы теории мажорирования диаграмм Фейнмана, препринт ОИЯИ, Д-578 (1960).
Обобщение теоремы Симанзика о мажорировании диаграмм Фейнмана. ЖЭТФ, 42 (1962) 1285.
14. T.T.Wu, Phys. Rev., 123 (1961) 678.
15. N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 26 (1961) 337; 26 (1961) 927.
16. W.Garczynski, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. sci. math. astr. et phys., 9 (1961) 819.
17. Л.Д. Ландау. ЖЭТФ, 37 (1959) 62.
18. N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 22 (1959) 128; 23 (1960) 284.
19. R.E.Cutkosky, J. Math. Phys., 1 (1960) 429.
20. J.C.Polkinghome and G.R.Screaton, Nuovo Cimento, 15 (1960) 289; 15 (1960) 925.
21. А.А. Логунов, И.Т. Тодоров и Н.А. Черников. Поверхность особых точек диаграммы Фейнмана. Препринт ОИЯИ, Р-889 (1962). Год. Соф. Унив. физ. мат. фак. (в печати).
22. N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 24 (1960) 1275. N.Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 25 (1961) 155.
23. R.J.Eden, P.V.Landshoff, J.C.Polkinghome and J.C.Taylor, J. Math. Phys., 2 (1961) 656.
24. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III, ч. 1, М-Л (1951).
25. K.Yamamoto, Prog. Theor. Phys., 26 (1961) 1014.
26. N.Nakanishi, Proof of Partial-Wave Dispersion Relations in Perturbation Theory, Princeton (1961) (Preprint).
27. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений, Москва, 1958.
28. J.C.Taylor and A.E.Warburton, Phys. Rev., 120 (1960) 1506.
29. S.W.MacDowell, Phys. Rev., 116 (1959) 774.
30. S.C.Frautschi and J.D.Walecka, Phys. Rev., 120 (1960) 1486.
31. А.В. Ефремов, В.А. Мещеряков, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 39, (1960) 438; 39 (1960) 1099. 438;
32. H.Lehmann, Nuovo Cimento, 10 (1958) 579.
33. В.С.Владимиров и А.А. Логунов. Известия АН СССР, серия математическая; 23 (1959) 661.
34. Д.В. Ширков. Теоретические исследования по дисперсионным соотношениям, доклад на IX Международной конференции по физике высоких энергий, Киев (1959).
35. I.T.Todorov, Nuclear Physics, 18 (1960) 521.
36. А.И. Маркушевич. Теория аналитических функций, М-Л (1959).
37. S.Mandelstam, Nuovo Cimento, 15 (1960) 658.
38. Ю.М. Малюта. ЖЭТФ, 40 (1961) 1128.
39. И.А. Дрabbкин и Ю.А. Яппа. Вестник Ленинградского Университета, № 4 (1962) 28.
40. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Москва, 1957г.
41. J.G.Taylor, Nuovo Cimento, 22, (1961) 92.
42. Д.Я. Петрина. ДАН СССР, 144 (1962) 755