Н.А. Черников

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Н.А. Черников

Р-1028

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ГАЗ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Дубна 1962 год

К101

Н.А. Черников

Р-1028

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ГАЗ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Дубна 1962 год

§ 1. Введение

Кинетическая теория разреженного газа Максвелла–Больцмана допускает полный релятивистский аналог. В данной статье излагаются основные положения кинетической теории релятивистского газа с учетом гравитации. В разреженном газе особым образом разыгрываются два явления: столкновение двух частиц и движение одной частицы во внешнем поле в промежутках между столкновениями. Ими объясняются все явления, протекающие в разреженном газе, что и обеспечило успех в построении релятивистского аналога кинетической теории Максвелла–Больцмана.

Чтобы пояснить последнюю мысль, заметим, что всякая физическая теория так или иначе опирается на понятие пространства скоростей материальной точки[/1–3/]. Это пространство трехмерно. Во всяком случае оно несет абсолютную геометрию. Так принято называть учение о пространстве, не зависящее от постулата о параллельных. Постулат о параллельных в пространстве скоростей разделяет нерелятивистскую и релятивистскую физику. В нерелятивистском случае пространство скоростей евклидово, тогда как в релятивистском случае оно является пространством Лобачевского, и его радиус кривизны k равен скорости света c. Свойства, присущие как нерелятивистской теории, так и аналогичной релятивистской теории, могут быть связаны только с теми свойствами пространства скоростей, которые составляют предмет абсолютной геометрии. В этом смысле во всякой физической теории можно выделить абсолютное содержание. Последнее относится к явлениям, не связанным с фактом независимости скорости света от скорости источника. Опираясь на эту идею, восходящую к Лобачевскому и Бойяи (Bolyai), при построении релятивистского аналога нерелятивистской физической теории в первую очередь следует выделить в ней абсолютную часть, которая переносится на релятивистский случай без изменения.

Без особого труда удается это сделать в механике одной частицы во внешнем поле. Однако теория двух и более частиц встретила непреодоленные до сих пор трудности. Единственным завершенным результатом рассмотрения нескольких частиц является так называемая кинематика распада частицы или соединения частиц. С точки зрения кинематики к последним двум явлениям сводятся и произвольные их комбинации, как, например, столкновение частиц. Кинематика этих явлений с позиций абсолютной механики рассмотрена в работе[/4/]. Успех в области кинематики тесно связан с тем, что она рассматривает лишь импульсно-скоростные характеристики частиц, участвующих в реакции, и не затрагивает вопроса о координатах частиц в процессе реакции.

Для выделения абсолютного содержания кинетической теории Максвелла–Больцмана потребовался специальный метод, предложенный и развитый в работах[/5–7/].

В этих работах получено релятивистское кинетическое уравнение Больцмана в предположении, что пространственно-временное многообразие галилеево. Учтены любые внешние силы, кроме сил тяготения. В дальнейшей работе[/8/] релятивистский интеграл столкновений, полученный в[/6–7/], представлен в виде пятикратного интеграла Больцмана. Во всех этих работах проводилась абсолютная точка зрения.

Развитый метод[5-7] позволил учесть и гравитационные явления Эйнштейна. В работе[9] выведено кинетическое уравнение Больцмана для релятивистского газа в статическом сферически-симметричном гравитационном поле и найдено решение этого уравнения, соответствующее равновесному состоянию газа. В работе[10] выведено кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле Эйнштейна. На основе этого уравнения в работе[11] исследованы вектор потока и тензор массы релятивистского газа в гравитационном поле. Там же поставлена задача о гравитирующем релятивистском газе. В работе[12] установлена тесная связь релятивистского распределения Максвелла-Больцмана с интегральной формой законов сохранения.

В данной статье эти результаты систематизированы и пополнены рядом новых результатов, из которых назовем уравнение переноса для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле и – применительно к этому случаю – H – теорему и принцип детального баланса.

В излагаемой здесь теории релятивистского газа в двух пунктах мы отходим от абсолютной точки зрения. Во-первых, рассматриваются частицы с нулевой массой покоя, чего, конечно, нет в нерелятивистской теории Максвелла-Больцмана. Во-вторых, учитываются эйнштейновские эффекты гравитации, между тем как в нерелятивистском случае еще не построено теории "кривого" пространства-времени. С последовательной абсолютной точки зрения здесь следовало бы восполнить соответстсвующий пробел в нерелятивистской теории.

Из методических соображений мы ограничиваемся случаем, когда внешние силы (негравитационного характера) отсутствуют, хотя учет таких сил в кинетическом уравнении не представляет особых затруднений. По тем же причинам мы ограничиваемся рассмотрением лишь упругих столкновений частиц в газе.

§ 2. Пространство состояний частицы

Состоянием частицы будем называть совокупность (x, p) ее пространственно-временного положения x и импульса p. Масса покоя m частицы фиксирована, так что размерность пространства состояний $\mathcal{F}$ частицы равна семи. В качестве координат в пространстве состояний можно выбрать семь величин x^0, x^1, x^2, x^3, p^1, p^2, p^3. Компонента p^0 находится из условий

$$(p, p) = g_{\alpha\beta}(x) p^\alpha p^\beta = m^2 c^2, \quad p_0 > 0, \tag{2.1}$$

Следовательно,

$$p^0 = \frac{p_0 - g_{0k} p^k}{g_{00}}, \tag{2.2}$$

где

$$p_0 = \sqrt{g_{00} m^2 c^2 + (g_{0i} g_{0k} - g_{00} g_{ik}) p^i p^k}. \tag{2.3}$$

Координаты p^k изменяются в бесконечных пределах. При $m=0$ выкидывается точка $p^1=p^2=p^3=0$, в виду того, что нулевой импульс характеризует вакуум, а не частицу.

Если бы мы отказались от рассмотрения частиц с нулевой массой покоя, то вместо импульса было бы удобнее пользоваться скоростью частицы.

Если бы мы не рассматривали гравитационных явлений Эйнштейна, то мы могли бы ограничиться выбором галилеевых координат t, x, y, z в пространстве событий.

Элемент объема в пространстве состояний $\mathcal{F}$ выберем равным

$$d\mathcal{F} = -\frac{g(x)}{p_0}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3\, dp^1 dp^2 dp^3, \tag{2.4}$$

где $g(x)=|g_{\alpha\beta}|$ - определитель матрицы $(g_{\alpha\beta})$.

Совокупность возможных импульсов частицы в заданном пространственно-временном положении x назовем пространством импульсов $P(x)$ частицы. Таким образом, пространство состояний $\mathcal{F}$ является пучком $P(X)$ импульсов, приложенных ко всевозможным точкам пространства событий X:

$$\mathcal{F} = P(X) = \bigcup_{x\in X} P(x). \tag{2.5}$$

Этот пучок - косое произведение[13] над базой X со слоем типа $P(x)$ и с группой движений трехмерного пространства Лобачевского в качестве структурной группы. Эта группа изоморфна ортохронной группе Лоренца. Элемент объема в $P(x)$ выберем равным

$$dP = \frac{\sqrt{-g}}{p_0}\, dp^1 dp^2 dp^3, \tag{2.6}$$

так что

$$d\mathcal{F} = dX\, dP, \tag{2.7}$$

где dX - элемент объема в пространстве событий X:

$$dX = \sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{2.8}$$

В сущности, элемент объема $d\mathcal{F}$ является косой 7-линейной формой[14]

$$d\mathcal{F} = \varepsilon(x,p;\, d_0, d_1, \dots, d_6), \tag{2.9}$$

принимающей значение (2.4) на векторах элементарных смещений по координатным линиям x^ν, p^k. Покажем, почему удобен такой выбор элемента объема. Перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned} x^{\nu\prime} &= \varphi^\nu(x^0,x^1,x^2,x^3), \quad \nu=0,1,2,3, \\ p^{k\prime} &= \sum_{\alpha=0}^{3} p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi^k(x^0,x^1,x^2,x^3), \quad k=1,2,3. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$J = \frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, p^{1'}, p^{2'}, p^{3'})}{\partial(x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3}, p^{1}, p^{2}, p^{3})} = \tag{2.11}$$

$$= \frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^{0}, x^{1}, x^{2}, x^{3})} \cdot \frac{\partial(p^{1'}, p^{2'}, p^{3'})}{\partial(p^{1}, p^{2}, p^{3})} .$$

Но так как

$$\frac{\partial p^{k'}}{\partial p^{i}} = \frac{\partial \varphi^{k}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial \varphi^{k}}{\partial x^{0}} \frac{p_i}{p_0} , \tag{2.12}$$

то

$$\frac{\partial(p^{1'}, p^{2'}, p^{3'})}{\partial(p^{1}, p^{2}, p^{3})} = \frac{1}{p_0} \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^0} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^0} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^0} & \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \varphi^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} . \tag{2.13}$$

Учитывая, что

$$p_\nu = p'_\alpha \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\nu} , \tag{2.14}$$

получаем

$$\frac{\partial(p^{1'}, p^{2'}, p^{3'})}{\partial(p^{1}, p^{2}, p^{3})} = \frac{p'_0}{p_0} \left| \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \tag{2.15}$$

Следовательно

$$J = \frac{p_0'}{p_0}\left[\frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right]^2 = \frac{p_0' g}{p_0 g'} . \qquad (2.16)$$

Таким образом, элемент dF (см. (2.4)) имеет инвариантный вид относительно преобразований координат (2.10).

Так как якобиан (2.16) положителен, то пространство состояний F ориентируемо, независимо от того, возможно или невозможно ориентировать пространство событий X. Действительно, предположим, что метрический тензор непрерывен во всем пространстве событий X. Тогда в пространстве X существует непрерывное поле $\omega(x)$ ненулевых векторов, направленных во внутрь изотропного (светового) конуса /15/. На координаты x^0, x^1, x^2, x^3 наложим условие, чтобы вектор смещения по координатной линии x^0 в сторону положительных значений x^0 был направлен в каждой точке x во внутрь той же половины изотропного конуса, что и вектор $\omega(x)$. Если области, покрываемые некоторой парой систем координат, перекрываются, то в пересечении этих областей якобиан (2.16) положителен. Отсюда следует, что пространство состояний ориентируемо.

В промежутках между столкновениями частица газа движется по закону

$$\frac{dx^\nu}{d\tau} = p^\nu , \qquad \frac{dp^\kappa}{d\tau} = -\Gamma^\kappa_{\alpha\beta}(x)p^\alpha p^\beta , \qquad (2.17)$$

где τ - собственное время частицы, связанное с обычным собственным временем τ_0 простым соотношением $\tau_0 = m\tau$. Собственное время τ определено и для частиц с нулевой массой покоя. $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}$ - скобки Кристоффеля:

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\right). \qquad (2.18)$$

Запишем решение системы уравнений (2.17) в виде

$$x = x(x^*, p^*; \tau) , \qquad p = p(x^*, p^*; \tau),$$
$$x(x^*, p^*; 0) = x^* , \qquad p(x^*, p^*; 0) = p^* . \qquad (2.19)$$

Первое из равенств (2.19) определяет мировую траекторию частицы, а второе - получающееся из первого дифференцированием по τ - изменение импульса вдоль мировой траектории. Существование и единственность решения обеспечены, если $\Gamma^\nu_{\alpha\beta}(x)$ непрерывны вместе с первыми производными по x^γ.

Система уравнений (2.17) задает в пространстве состояний F векторное поле $f(x,p)$. В координатах x^ν, p^κ это поле имеет следующие компоненты:

$$f^{\nu}=p^{\nu}, \qquad f^{3+k}=-\Gamma^{\kappa}_{\alpha\beta}(x)p^{\alpha}p^{\beta}, \quad \nu=0,1,2,3, \quad \kappa=1,2,3. \tag{2.20}$$

Оно нигде не обращается в нуль, так как если $f=0$, то и $p=0$, а импульс частицы не равен нулю. Решение (2.19) определяет в пространстве состояний векторную линию поля $f(x,p)$, проходящую через точку (x^*,p^*) и закон изменения состояния вдоль этой линии в зависимости от собственного времени τ.

Векторное поле $f(x,p)$ определяет площадь на любой гиперповерхности S в пространстве состояний $\mathcal{F}$. Элемент площади равняется

$$dS=\varepsilon(x,p;f(x,p),d_1,\ldots,d_6)=\sigma(x,p;d_1,\ldots,d_6), \tag{2.21}$$

где $d_1,\ldots,d_6$ - векторы элементарных смещений по S, ε - 7 - линейная форма, определенная выше (см. (2.9)). В подробной записи

$$dS=-\frac{g(x)}{p_0}\begin{vmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 & -\Gamma^1_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} & -\Gamma^2_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} & -\Gamma^3_{\alpha\beta}p^{\alpha}p^{\beta} \\ d_1x^0 & d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 & d_1p^1 & d_1p^2 & d_1p^3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_6x^0 & d_6x^1 & d_6x^2 & d_6x^3 & d_6p^1 & d_6p^2 & d_6p^3 \end{vmatrix}. \tag{2.22}$$

В частности, на гиперповерхности

$$S=P(U)=\bigcup_{x\in U}P(x), \tag{2.23}$$

представляющей собой пучок импульсов, приложенных к гиперповерхности $U\subset X$ пространства событий, элемент площади dS равен

$$dS=\sqrt{-g}\begin{vmatrix} p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ d_1x^0 & d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^0 & d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^0 & d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix} dP. \tag{2.24}$$

Внешняя производная $\sigma'(x,p;d_0,d_1,\dots,d_6)$ 6-линейной косой формы (2.21) равна нулю. Это утверждение аналогично теореме Лиувилля. В координатной форме равенство $\sigma'=0$ означает

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(-\frac{g p^\nu}{p_0}\right)+\frac{\partial}{\partial p^k}\left(\frac{g}{p_0}\Gamma^k_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta\right)=0. \tag{2.25}$$

Указанное выше векторное поле $\omega(x)$ в пространстве событий X позволяет определить понятия будущего и прошедшего в каждой точке $x\in X$. Будушим для частицы в произвольной точке x назовем ту половину касательного изотропного конуса с центром в точке x, во внутрь которой направлен вектор $\omega(x)$. Условие $p_0>0$ означает, что импульс частицы представляется вектором, направленным в будущее. Без этого условия импульс представлялся бы парой противоположных векторов. Если $d\tau>0$, то и вектор $dx=p\,d\tau$ направлен в будущее, т.е. положительному течению собственного времени соответствует движение частицы в сторону будущего. До сих пор мы еще не исключили случая, когда решение (2.19) представляет замкнутую кривую в пространстве событий. При этом частица, двигаясь в сторону будущего, возвращалась бы из прошедшего. Исключая это, мы будем предполагать, что множество кривых (2.19) образует шестимерное многообразие S, так что пространство состояний $\mathcal{F}$ оказывается косым произведением над S, типовым слоем которого является евклидова прямая T, а структурной группой - группа параллельных переносов прямой T.

§ 3. Система кинетических уравнений

Рассмотрим смесь N газов. Обозначим $A_i(x,p)$ функцию распределения i-той компоненты этой смеси. $A_i(x,p)$ является скалярной функцией в пространстве состояний $\mathcal{F}_i$ частицы сорта i. Пусть гиперповерхность $S\subset\mathcal{F}_i$ такова, что частица, двигаясь по любой из траекторий в пространстве состояний $\mathcal{F}_i$, заданных уравнениями (2.19), встречается с S не более одного раза. Число частиц газа сорта i, пересекающих такую гиперповерхность, равно

$$n_i(S)=\int\limits_S A_i(x,p)\,dS=\int\limits_S A_i(x,p)\,\sigma(x,p;d_1,\dots,d_6). \tag{3.1}$$

Частица сорта i, отправляясь из состояния $(x,p)\in\mathcal{F}_i$, за промежуток собственного времени $d\tau$ с некоторой вероятностью сталкивается с частицей сорта j и перестает с ней взаимодействовать, находясь в элементе объема $d\mathcal{F}'$ пространства состояний $\mathcal{F}_i$ с центром с в точке (x',p'). Подсчитаем эту вероятность, пренебрегая изменением функции $A_j(y,q)$, $(y,q)\in\mathcal{F}_j$, при изменении аргумента y в окрестности точки x, где происходит столкновение, и полагая, что столкновение мгновенно. В этом приближении искомая вероятность равна

$$\delta(x'-x)\,W_{ij}(x,p,p')\,dX'dP'd\tau, \tag{3.2}$$

где величина $W_{ij}\, dP' d\tau$ равна числу частиц сорта j, пересекающих шестимерную полоску ΔS в пространстве состояний $\mathcal{F}_j$, образованную трехмерным слоем $P_j(x)$, из каждой точки которого восстановлен трехмерный параллелепипед, натянутый на векторы

$(p^\nu, \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} q^\alpha p^\beta) d\tau$, $(d^\nu, \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} q^\alpha d^\beta)$, $(\delta^\nu, \Gamma^\kappa_{\alpha\beta} q^\alpha \delta^\beta)$.

Векторы d и δ пространства событий X приложены к точке x и образуют площадку, ортогональную к p и q, мера которой равна дифференциальному сечению

$$d\sigma = H_{ij}(p, q, p')\, dP' \tag{3.3}$$

рассеяния частицы сорта i с импульсом p на частице сорта j с импульсом q. Элемент площади полоски ΔS, согласно (2.22), равен

$$dS = -\frac{g(x)}{q_0} \begin{vmatrix} q^0 & q^1 & q^2 & q^3 \\ p^0 & p^1 & p^2 & p^3 \\ d^0 & d^1 & d^2 & d^3 \\ \delta^0 & \delta^1 & \delta^2 & \delta^3 \end{vmatrix} dq^1 dq^2 dq^3 d\tau. \tag{3.4}$$

Определитель в этом выражении равен

$$\mathcal{D} = \frac{\langle p, q\rangle\, d\sigma}{\sqrt{-g}}, \tag{3.5}$$

где множитель

$$\langle p, q\rangle = \sqrt{(p,q)^2 - (p,p)(q,q)} \tag{3.6}$$

характеризует относительное движение частиц. Следовательно,

$$W_{ij}(x, p, p') = \int\limits_{P_j(x)} A_j(x,q) \langle p, q\rangle H_{ij}(p, q, p')\, dQ, \tag{3.7}$$

где dQ - элемент объема в пространстве импульсов $P_j(x)$.

Частица сорта i может столкнуться с частицей сорта j, находясь в элементе $d\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_i$, и перестать с ней взаимодействовать, находясь в элементе $d\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}_i$. Число таких столкновений равно

$$A_i(x,p)\, \delta(x'-x)\, W_{ij}(x, p, p')\, d\mathcal{F}\, d\mathcal{F}'. \tag{3.8}$$

Действительно, рассмотрим элементарную площадку в $\mathcal{F}_i$, натянутую на векторы $d_1, \dots, d_6$ и элементарную область, натянутую на векторы $d_0, d_1, \dots, d_6$, где $d_0 = f(x,p) d\tau$. Указанное число, очевидно, равно

$$A_i(x,p)\,\varepsilon(x,p;f(x,p),d_1,\dots,d_6)\,\delta(x'-x)\,w_{ij}(x,p,p')\,dX'dP'd\tau, \quad (3.9)$$

а, следовательно, оно равно и (3.8), так как

$$\varepsilon(x,p;f(x,p),d_1,\dots,d_6)\,d\tau = \varepsilon(x,p;d_0,d_1,\dots,d_6) = d\mathcal{F}. \quad (3.10)$$

Рассмотрим, далее, область $\mathcal{D}$ в пространстве состояний $\mathcal{F}_i$. Числа $R^{(1)}_{ij}(\mathcal{D})$ и $R^{(2)}_{ij}(\mathcal{D})$ частиц сорта i , прибывающих в эту область и выбывающих из нее за счет столкновений с частицами сорта j , как нетрудно видеть из (3.8) и (3.7), равны

$$R^{(1,2)}_{ij}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}}\!\!\dots\!\int I^{(1,2)}_{ij}(x,p)\,d\mathcal{F}, \quad (3.11)$$

где

$$I^{(1)}_{ij}(x,p) = \int\limits_{P_i(x)}\int\limits_{P_j(x)} A_i(x,p')\,A_j(x,q')\,\langle p',q'\rangle\,H_{ij}(p',q',p)\,dP'dQ', \quad (3.12а)$$

$$I^{(2)}_{ij}(x,p) = \int\limits_{P_i(x)}\int\limits_{P_j(x)} A_i(x,p)\,A_j(x,q)\,\langle p,q\rangle\,H_{ij}(p,q,p')\,dP'dQ. \quad (3.12б)$$

Пусть граница Γ области $\mathcal{D}$ составлена из двух гиперповерхностей S_2 и S_1 , для которых справедливо (3.1), причем S_2 расположена в будущем по отношению к S_1 . Очевидно,

$$n_i(S_2) - n_i(S_1) = \sum_{j=1}^{N}\left[R^{(1)}_{ij}(\mathcal{D}) - R^{(2)}_{ij}(\mathcal{D})\right]. \quad (3.13)$$

Если на границе Γ выбрать внешнюю ориентацию, то

$$n_i(S_2) - n_i(S_1) = \int_{\Gamma}\!\!\dots\!\int A_i(x,p)\,\sigma(x,p;d_1,\dots,d_6) = \iint_{\mathcal{D}}\!\!\dots\!\int \hat{f}(x,p)\,A_i(x,p)\,d\mathcal{F}, \quad (3.14)$$

где $\hat{f}(x,p)$ – дифференциальный оператор

$$\hat{f}(x,p) = p^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\kappa}_{\alpha\beta}(x)\,p^{\alpha}p^{\beta}\frac{\partial}{\partial p^{\kappa}}. \quad (3.15)$$

В равенстве (3.14) мы преобразовали интеграл по границе Γ в интеграл по области $\mathfrak{D}$ и учли при этом (2.25). Так как область $\mathfrak{D}$ произвольна, то из (3.13) и (3.14) следует

$$\hat{f}(x,p)\,A_i(x,p) = I_i(x,p), \qquad i=1,2,\dots,N, \tag{3.16}$$

где

$$I_i(x,p) = \sum_{j=1}^{N} I_{ij}(x,p), \tag{3.17}$$

$$I_{ij}(x,p) = I_{ij}^{(1)}(x,p) - I_{ij}^{(2)}(x,p). \tag{3.18}$$

Система интегро-дифференциальных уравнений (3.16) называется системой кинетических уравнений для смеси N газов.

При более тщательном учете диагональные элементы I_{ii} следует заменить на $\frac{N_i-1}{N_i} I_{ii}$, где N_i – число частиц сорта i. Практически эта замена несущественна, так как обычно числа N_i велики. Кроме того, множитель $\frac{N_i-1}{N_i}$ можно включить в H_{ii}.

§ 4. Уравнение переноса

Пусть некоторая характеристика i-той компоненты газа представляется скалярной функцией $\varphi_i(x,p)$. Среднее значение $\bar{\varphi}_i$ этой характеристики, переносимой частицами сорта i через гиперповерхность $S \subset \mathcal{F}_i$, равно

$$\bar{\varphi}_i = \int_S \varphi_i(x,p)\,A_i(x,p)\,dS. \tag{4.1}$$

Пусть, далее, гиперповерхность S представляет собой пучок $P_i(U)$ импульсов, приложенных к гиперповерхности U в пространстве событий. Ввиду (2.24), среднее значение $\bar{\varphi}_i$ равно

$$\int_S \varphi_i(x,p)\,A_i(x,p)\,dS = \int_U \sqrt{-g} \begin{vmatrix} \varphi_i^0(x) & \varphi_i^1(x) & \varphi_i^2(x) & \varphi_i^3(x) \\ d_1x^0 & d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^0 & d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^0 & d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}, \tag{4.2}$$

где

$$\psi_i^\nu(x) = \int\limits_{P_i(x)} p^\nu \psi_i(x,p) A_i(x,p)\, dP. \tag{4.3}$$

Вектор $\psi_i^\nu(x)$ представляет собой вектор потока величины $\psi_i(x,p)$ в точке $x \in X$. Точнее говоря, он в c раз меньше вектора потока; это связано с тем, что мы представили элемент объема пространства состояний в виде $d\mathcal{F} = dX\, dP$, а не в виде $d\mathcal{F} = (c^{-1} dX)(c\, dP)$.

Найдем расходимость вектора $\psi_i^\nu(x)$. Для этого рассмотрим пучок $S^* = P_i(U^*)$ импульсов, приложенных к замкнутой гиперповерхности U^* в пространстве событий. Пусть $\mathcal{D}$ – область пространства состояний $\mathcal{F}_i$, ограниченная гиперповерхностью S^*, а R – область пространства событий, ограниченная гиперповерхностью U^*. Прежде всего, мы имеем равенство, аналогичное равенству (4.2) (с заменой S на S^* и U на U^*). Согласно интегральной теореме, связывающей интеграл по замкнутой гиперповехности с интегралом по области, ограниченной этой гиперповерхностью, указанное равенство можно записать в виде

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \hat{f}(x,p)[\psi_i(x,p) A_i(x,p)]\, d\mathcal{F} = \int\limits_{R} \nabla_\alpha \psi_i^\alpha(x)\, dX, \tag{4.4}$$

где

$$\nabla_\alpha \psi_i^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sqrt{-g}\, \psi_i^\alpha\right) = \frac{\partial \psi_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} \psi_i^\beta. \tag{4.5}$$

При выводе левой части равенства (2.4) учтено тождество (2.25). Так как область R произвольна, то в силу кинетического уравнения (3.16) из (4.4) следует

$$\nabla_\alpha \psi_i^\alpha(x) = \int\limits_{P_i(x)} I_i(x,p)\, \psi_i(x,p)\, dP + \int\limits_{P_i(x)} A_i(x,p) \hat{f}(x,p) \psi_i(x,p)\, dP. \tag{4.6}$$

Полученное равенство (4.6) является релятивистским аналогом уравнения переноса Максвелла-Энскога. Для суммы

$$\psi^\alpha(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i^\alpha(x) \tag{4.7}$$

имеем

$$\nabla_\alpha \psi^\alpha(x) = \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{P_i(x)} I_i(x,p) \psi_i(x,p)\, dP + \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{P_i(x)} A_i(x,p) \hat{f}(x,p) \psi_i(x,p)\, dP. \tag{4.8}$$

Полагая $\psi_i(x,p)=1$, получаем вектор потока частиц сорта i (см. (4.3)):

$$n_i^\alpha(x) = \int\limits_{P_i(x)} p^\alpha A_i(x,p)\, dP. \tag{4.9}$$

Его ковариантная дивергенция равна (см. (4.6))

$$\nabla_\alpha n_i^\alpha = \int\limits_{P_i(x)} I_i(x,p)\, dP. \tag{4.10}$$

Полагая $\psi_i(x,p)$ равным скалярному произведению $(\xi(x),p)$, где $\xi(x)$ – некоторое векторное поле в пространстве событий, мы приходим к тензору массы (тензору энергии-импульса) частиц сорта i:

$$T_i^{\alpha\beta}(x) = \int\limits_{P_i(x)} p^\alpha p^\beta A_i(x,p)\, dP. \tag{4.11}$$

Его след равен

$$T_i(x) = T_{i,\alpha}^{\alpha}(x) = m_i^2 c^2 \int\limits_{P_i(x)} A_i(x,p)\, dP. \tag{4.12}$$

Ковариантная дивергенция тензора массы равна

$$\nabla_\alpha T_i^{\alpha\beta} = \int\limits_{P_i(x)} p^\beta I_i(x,p)\, dP. \tag{4.13}$$

При выводе (4.13) учтены уравнение переноса (4.6) и тождество

$$\hat{\xi}(x,p)\,(\xi(x),p) = \frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha\right) p^\alpha p^\beta. \tag{4.14}$$

Наконец, мы приходим к энтропии и к вектору потока энтропии i-той компоненты газа, полагая в формулах (4.1), (4.2) и (4.3) $\psi_i(x,p)$ равным $-\ln A_i(x,p)$:

$$S_i^\alpha(x) = -\int\limits_{P_i(x)} p^\alpha A_i(x,p) \ln A_i(x,p)\, dP. \tag{4.15}$$

Ввиду (4.6) ковариантная дивергенция этого вектора равна

$$\nabla_\alpha S_i^\alpha(x) = -\int\limits_{P_i(x)} I_i(x,p)\left[\ln A_i(x,p)+1\right] dP. \tag{4.16}$$

В следующем параграфе мы докажем, что правая часть формулы (4.10) равна нулю, что правая часть формулы (4.13), просуммированная по i от 1 до N, равна нулю и что правая часть формулы (4.16), просуммированная по i от 1 до N, неотрицательна.

§ 5. Некоторые свойства интеграла столкновений

Уточним вид функции (3.3). Предполагается, что рассеяние упругое. Поэтому, если дифференциальное сечение рассеяния в системе центра инерции равно

$$\Delta\sigma = h_{ij}\,(\langle p,q\rangle, \cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \tag{5.1}$$

то

$$H_{ij}(p,q,p') = \frac{(p+q,p+q)}{\langle p,q\rangle}\, h_{ij}\left(\langle p,q\rangle, 1 + \frac{(p+q,p+q)(p,p-p')}{\langle p,q\rangle^2}\right)\times \tag{5.2}$$

$$\times\,\delta((p-p',p+q)).$$

Наличие δ -функции в (5.2) позволяет заменить интегралы (3.12) пятикратными интегралами.

Все величины, которые мы будем рассматривать в этом параграфе, относятся к одной и той же точке x пространства событий. Поэтому аргумент x мы будем опускать.

Докажем, что для любой функции $\psi(p',q',p)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{P_j} \psi(p',q',p)\,\delta((p'-p,p'+q'))\,dQ' = \tag{5.3}$$

$$= \int\limits_{P_j} \psi(p',p+q-p',p)\,\delta((p-p',p+q))\,dQ.$$

В левой части равенства (5.3) введем импульс $q\in P_j$ такой, чтобы выполнялось равенство

$$p+q = \lambda\,(p'+q'), \tag{5.4}$$

и заменим переменную интегрирования q' на q. Из (5.4) следует, что

$$\lambda = \frac{(p,u') + \sqrt{m_j^2c^2 - m_i^2c^2 + (p,u')^2}}{\sqrt{(p'+q',p'+q')}}, \tag{5.5}$$

где

$$u' = \frac{p'+q'}{\sqrt{(p'+q', p'+q')}} \quad . \tag{5.6}$$

При выводе (5.5) учтено, что $(q,q)=m_j^2c^2$, $(p,p)=m_i^2c^2$ и что скалярное произведение (q,u') неотрицательно. Запишем q в виде

$$q = -p + u'\left\{(p,u') + \sqrt{m_j^2c^2 - m_i^2c^2 + (p,u')^2}\right\}. \tag{5.7}$$

Нетрудно подсчитать якобианы

$$\left|\frac{\partial q^i}{\partial u'^k}\right| = \frac{q_0}{u_0'} \frac{(p+q, u')^3}{(q,u')}, \tag{5.8}$$

$$\left|\frac{\partial u'^k}{\partial q'^l}\right| = \frac{u_0'}{q_0'} \frac{(q', p'+q')}{(p'+q', p'+q')^2} .$$

Следовательно,

$$dQ = \frac{(q', p+q)}{(q, p+q)} \left[\frac{(p+q, p+q)}{(p'+q', p+q)}\right]^3 dQ'. \tag{5.9}$$

Далее,

$$\delta((p'-p, p'+q')) = \lambda\, \delta((p-p', p+q)). \tag{5.10}$$

Если $(p-p', p+q)=0$, то $\lambda=1$, $q'=p+q-p'$, $(q', p+q)=(q, p+q)$. Учитывая, что все множители при δ-функции надо рассматривать только тогда, когда ее аргумент равен нулю, получаем (5.3).

Рассмотрим, далее, интеграл

$$\int_{P_i} \varphi(p,q,p',q')\,\delta((p-p', p+q))\,dP', \tag{5.11}$$

где $q'=p+q-p'$.

Введем в рассмотрение векторы

$$u = \frac{p+q}{\sqrt{(p+q, p+q)}}, \quad \zeta = \frac{(u,q)p - (u,p)q}{\langle p,q \rangle} \tag{5.12}$$

и два других вектора ξ и η, удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} (\xi,\eta)=0, \quad (\xi,\zeta)=0, \quad (\eta,\zeta)=0, \\ (\xi,u)=(\eta,u)=(\zeta,u)=0, \\ (\xi,\xi)=(\eta,\eta)=(\zeta,\zeta)=-(u,u)=-1. \end{gathered} \tag{5.13}$$

От переменных интегрирования p'^{k} в интеграле (5.11) перейдем к переменным r, ϑ, φ, по формуле

$$p' = u\sqrt{m_i^2c^2+r^2} + \xi r\sin\vartheta\cos\varphi + \eta r\sin\vartheta\sin\varphi + \zeta r\cos\vartheta. \tag{5.14}$$

Нетрудно видеть, что

$$dP' = \frac{r^2\sin\vartheta}{\sqrt{m_i^2c^2+r^2}}\, dr\, d\vartheta\, d\varphi \tag{5.15}$$

и что

$$\delta((p-p', p+q)) = \frac{1}{\sqrt{(p+q,p+q)}}\,\delta\left(\sqrt{m_i^2c^2+r^2} - \frac{(p,p+q)}{\sqrt{(p+q,p+q)}}\right). \tag{5.16}$$

Выполняя интегрирование по r, получаем, что интеграл (5.11) равен

$$\int_{P_i} \psi(p,q,p',q')\,\delta((p-p',p+q))\,dP' = \tag{5.17}$$

$$= \frac{\langle p,q\rangle}{(p+q,p+q)} \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \psi(p,q,p',q')\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

где

$$p' = \frac{(p,p+q)}{(p+q,p+q)}(p+q) + \frac{\langle p,q\rangle}{\sqrt{(p+q,p+q)}}\left\{\xi\sin\vartheta\cos\varphi + \eta\sin\vartheta\sin\varphi + \zeta\cos\vartheta\right\}, \tag{5.18a}$$

$$q' = \frac{(q,p+q)}{(p+q,p+q)}(p+q) - \frac{\langle p,q\rangle}{\sqrt{(p+q,p+q)}}\left\{\xi\sin\vartheta\cos\varphi + \eta\sin\vartheta\sin\varphi + \zeta\cos\vartheta\right\}. \tag{5.18б}$$

Применив равенство (5.3) к интегралу (3.12а), приведем интеграл столкновений (3.18) к виду

$$I_{ij}(p) = \iint_{P_i P_j} \{A_i(p')A_j(q') - A_i(p)A_j(q)\}\langle p,q\rangle H_{ij}(p,q,p')\,dP'dQ, \tag{5.19}$$

где $q' = p+q-p'$. Применив к (5.19) равенство (5.17), получим

$$I_{ij}(p) = \int_{P_j} dQ \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \{A_i(p')A_j(q') - A_i(p)A_j(q)\}\langle p,q\rangle h_{ij}(\langle p,q\rangle, \cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \tag{5.20}$$

где p' и q' определяются по формулам (5.18).

Рассмотрим интеграл

$$I_{ij}[\psi]=\int_{P_i}\psi_i(p)\,I_{ij}(p)\,dP=I^{(1)}_{ij}[\psi]-I^{(2)}_{ij}[\psi], \tag{5.21}$$

где в соответствии с (3.18) и (3.12)

$$I^{(1)}_{ij}[\psi]=\iiint\limits_{P_iP_iP_j}\psi_i(p)\,A_i(p')\,A_j(q')\langle p',q'\rangle H_{ij}(p',q',p)\,dP\,dP'\,dQ', \tag{5.22а}$$

$$I^{(2)}_{ij}[\psi]=\iiint\limits_{P_iP_iP_j}\psi_i(p)\,A_i(p)\,A_j(q)\langle p,q\rangle H_{ij}(p,q,p')\,dP\,dP'\,dQ\,. \tag{5.22б}$$

Этот интеграл входит в правую часть равенства (4.6).

Заменив в интеграле (5.22а) обозначения $p\rightleftarrows p'$, $q'\to q$, приведем интеграл (5.21) к виду

$$I_{ij}[\psi]=\iiint\limits_{P_iP_iP_j}[\psi_i(p')-\psi_i(p)]A_i(p)\,A_j(q)\langle p,q\rangle H_{ij}(p,q,p')\,dP\,dP'\,dQ\,. \tag{5.23}$$

Отсюда следует, что дивергенция (4.10) вектора потока частиц каждого сорта в отдельности равна нулю:

$$\nabla_\alpha n^\alpha_i=0. \tag{5.24}$$

Это равенство получилось вследствие того, что мы рассматривали стабильные частицы и предполагали, что столкновения частиц упругие.

Применив к (5.23) равенство (5.17), получим

$$I_{ij}[\psi]=\iint\limits_{P_iP_j}A_i(p)\,A_j(q)\langle p,q\rangle\,\psi_{ij}(p,q)\,dP\,dQ, \tag{5.25}$$

где

$$\psi_{ij}(p,q)=\int_0^\pi\!\!\int_0^{2\pi}[\psi_i(p')-\psi_i(p)]\,h_{ij}(\langle p,q\rangle,\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi, \tag{5.26}$$

импульс p' определен формулой (5.18а). Формула (5.18б) определяет импульс q' в выражении

$$\psi_{ji}(q,p)=\int_0^\pi\!\!\int_0^{2\pi}[\psi_j(q')-\psi_j(q)]\,h_{ji}(\langle q,p\rangle,\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi. \tag{5.27}$$

Так как функция $\langle p,q\rangle$ симметрична относительно аргументов p, q, а функция h_{ij} симметрична относительно индексов i, j, то

$$I_{ij}[\psi] + I_{ji}[\psi] = \iint\limits_{P_i P_j} A_i(p) A_j(q) \langle p,q\rangle [\psi_{ij}(p,q) + \psi_{ji}(q,p)] dP dQ, \tag{5.28}$$

$$\psi_{ij}(p,q) + \psi_{ji}(q,p) = \tag{5.29}$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [\psi_i(p') + \psi_j(q') - \psi_i(p) - \psi_j(q)] h_{ij}(\langle p,q\rangle, \cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Отсюда следует, что дивергенция тензора массы

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum_{i=1}^{N} T_i^{\alpha\beta}(x) \tag{5.30}$$

(см. (4.13)) всего газа равна нулю:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \sum_{i,j=1}^{N} \int\limits_{P_i} p^\beta I_{ij}(p) dP = 0. \tag{5.31}$$

Получим еще одно важное выражение для интеграла (5.21), которое позволит доказать H -теорему.

Подставляя в (5.21) выражение (5.19) для интеграла столкновений, находим

$$I_{ij}[\psi] = \iiint\limits_{P_i P_i P_j} \{A_i(p')A_j(q') - A_i(p)A_j(q)\} \psi_i(p) \langle p,q\rangle H_{ij}(p,q,p') dP dP' dQ \tag{5.32}$$

Заменяя в (5.32) обозначения $p \rightleftarrows p'$; $q \rightleftarrows q'$ и учитывая равенство (5.3), получаем

$$I_{ij}[\psi] = \iiint\limits_{P_i P_i P_j} \{A_i(p)A_j(q) - A_i(p')A_j(q')\} \psi_i(p') \langle p,q\rangle H_{ij}(p,q,p') dP dP' dQ \tag{5.33}$$

Складывая (5.32) и (5.33), получаем

$$I_{ij}[\psi]=\frac{1}{2}\iiint\limits_{P_iP_iP_j}\{A_i(p)A_j(q)-A_i(p')A_j(q')\}[\psi_i(p')-\psi_i(p)]<p,q>H_{ij}(p,q,p')\,dP\,dP'\,dQ \tag{5.34}$$

Отсюда вследствие равенства (5.17) находим

$$I_{ij}[\psi]=\frac{1}{2}\iint\limits_{P_iP_j}<p,q>dP\,dQ\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{A_i(p)A_j(q)-A_i(p')A_j(q')\}\times \tag{5.35}$$

$$\times[\psi_i(p')-\psi_i(p)]\,h_{ij}(<p,q>,\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Следовательно,

$$I_{ij}[\psi]+I_{ji}[\psi]=\frac{1}{2}\iint\limits_{P_iP_j}<p,q>dP\,dQ\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{A_i(p)A_j(q)-A_i(p')A_j(q')\}\times$$

$$\times[\psi_i(p')+\psi_j(q')-\psi_i(p)-\psi_j(q)]\,h_{ij}(<p,q>,\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \tag{5.36}$$

Согласно (5.36) дивергенция вектора потока энтропии всего газа

$$s^{\alpha}(x)=\sum_{i=1}^{N}s_i^{\alpha}(x) \tag{5.37}$$

(см. (4.16)) равна

$$\nabla_{\alpha}s^{\alpha}=\frac{1}{4}\sum_{ij=1}^{N}\iint\limits_{P_iP_j}<p,q>dP\,dQ\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\{A_i(p')A_j(q')-A_i(p)A_j(q)\}\times$$

$$\times\ln\frac{A_i(p')A_j(q')}{A_i(p)A_j(q)}\cdot h_{ij}(<p,q>,\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \tag{5.38}$$

Так как величина $(x-y)\ln\frac{x}{y}$ неотрицательна при любых положительных x и y, то

$$\nabla_{\alpha}s^{\alpha}(x)\geqslant 0. \tag{5.39}$$

Это и есть H -теорема в релятивистском случае при наличии гравитационного поля.

Если в некоторой точке x пространства событий $\nabla_\alpha s^\alpha = 0$, то ввиду положительной определенности подинтегрального выражения в (5.38) при любых i, j и любых p, q выполняется равенство

$$h_{ij}(\langle p,q\rangle, \cos\vartheta)\{A_i(p')A_j(q') - A_i(p)A_j(q)\} = 0 . \tag{5.40}$$

При этом согласно (5.20) интеграл столкновений в точке x равен нулю при всех значениях импульса p, согласно (4.16) - дивергенция вектора потока энтропии каждой компоненты газа равна нулю, согласно (4.13) - дивергенция тензора массы каждой компоненты газа равна нулю. Вообще, в этом случае (4.6) принимает вид

$$\nabla_\alpha \psi_i^\alpha(x) = \int\limits_{P_i(x)} A_i(x,p)\hat{f}(x,p)\psi_i(x,p)\,dP . \tag{5.41}$$

Равенство (5.40) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &A_i(x,p')A_j(x,q')\langle p',q'\rangle h_{ij}(\langle p',q'\rangle, -(e',e))\,dP'dQ'de'dX = \\ &= A_i(x,p)A_j(x,q)\langle p,q\rangle h_{ij}(\langle p,q\rangle, -(e,e'))\,dP\,dQ\,de\,dX, \end{aligned} \tag{5.42}$$

где e - вектор в точке $x \in X$, удовлетворяющий условиям

$$(e, p+q) = 0 , \qquad (e,e) = -1, \tag{5.43}$$

de - элемент площади на двумерной сфере (5.43) в пространстве, касательном к пространству событий. Величины p', q', e' следующим образом выражаются через величины p, q, e :

$$\begin{aligned} p' &= \frac{(p,p+q)}{(p+q,p+q)}(p+q) + \frac{\langle p,q\rangle}{\sqrt{(p+q,p+q)}}\,e \\ q' &= \frac{(q,p+q)}{(p+q,p+q)}(p+q) - \frac{\langle p,q\rangle}{\sqrt{(p+q,p+q)}}\,e \\ e' &= \frac{(p+q,q)p - (p+q,p)q}{\langle p,q\rangle\sqrt{(p+q,p+q)}} . \end{aligned} \tag{5.44}$$

Это преобразование инволютивно, т.е. нештрихованные величины выражаются через штрихованные величины так же, как штрихованные - через нештрихованные. Преобразование (5.44) сохраняет элемент объема (сравн. [16])

$$dP\,dQ\,de = dP'\,dQ'\,de'. \tag{5.45}$$

Чтобы доказать это, перейдем от переменных p, q к переменным u, v

$$u = \frac{p+q}{\sqrt{(p+q,p+q)}}, \quad v = \frac{(p+q,q)p - (p+q,p)q}{(p+q,p+q)}. \tag{5.46}$$

Якобиан этого преобразования равен

$$\frac{\partial(u^1,u^2,u^3,v^1,v^2,v^3)}{\partial(p^1,p^2,p^3,q^1,q^2,q^3)} = -\frac{u_0^2\,(p,u)(q,u)}{p_0 q_0\,(p+q,p+q)^{3/2}}. \tag{5.47}$$

Так как $u'=u$, $(p+q,p+q)=(p'+q',p'+q')$ то из (5.47) следует, что равенство (5.45) эквивалентно равенству

$$dv^1 dv^2 dv^3 de = dv'^1 dv'^2 dv'^3 de'. \tag{5.48}$$

Последнее очевидно, так как

$$v' = \sqrt{-(v,v)}\,e, \quad e' = \frac{v}{\sqrt{-(v,v)}}. \tag{5.49}$$

В соответствии с (3.8) и (3.7) слева и справа в равенстве (5.42) записаны числа столкновений частиц сорта i с частицами сорта j в элементарной области dX пространства событий. Справа импульсы частиц до столкновения p, q, а после столкновения p', q', тогда как слева, наоборот, импульсы до столкновения p', q', а после столкновения p, q. Таким образом, равенство (5.42) или (5.40) является частным случаем общего принципа детального баланса в равновесном состоянии.

Литература

1. А.П.Котельников. Принцип относительности и геометрии Лобачевского. –Сборник In memoriam N.I.Lobatshevscku. т.2, стр. 37–66. Казань, 1927г.
2. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ. М. 1955 г.
3. Н.А.Черников. Препринт ОИЯИ. Р–723. Дубна. 1961 г.
4. Н.А.Черников. Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки, № 2 (158), 1958.
5. Н.А.Черников. ДАН СССР, 112, № 6 (1030), 1957.

6. Н.А.Черников. ДАН СССР, 114, № 3 (530) 1957.

7. Н.А.Черников. Научные доклады высшей школы, физ.-мат. науки № 1 (168) 1959.

8. Н.А.Черников. ДАН СССР, 133, № 1 (84) 1960 .

9. Н.А.Черников. ДАН СССР, 133, № 2 (333) 1960.

10. Н.А.Черников. ДАН СССР, 144, № 1, (89) 1962.

11. Н.А.Черников. ДАН СССР, 144, № 2 (314) 1962.

12. Н.А.Черников ДАН СССР, 144, № 3 (544) 1962.

13. Н.Стинрод. Топология косых произведений. ИЛ, М. 1953.

14. П.К.Рашевский. Геометрическая теория уравнений с частными производными. ГИТТЛ. М-Л, 1947.

15. А.Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономий. ИЛ. М. 1960.

16. Т.Карлеман. Математические задачи кинетической теории газов. Гл. 1, § 3. ИЛ. М.1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 июня 1962 года.