ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.Г. Кадышевский

Р-1018

МОДЕЛЬ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

ДАН СССР, 1962, т147, № 6, с1336-1339

Дубна 1962 год

В.Г. Кадышевский

Р-1018

МОДЕЛЬ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КВАНТОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Направлено в ДАН

Дубна 1962 год

V.G.Kadyshevsky

A Model of the Scalar Field Theory in the Quantired Space Time.

1

В настоящей работе на примере простой скалярной модели изучаются некоторые обобщения аппарата квантовой теории поля, возможные в формализме квантованного пространства-времени[1-5]. Поскольку в новой схеме координаты x^n становятся некоммутирующими операторами, все построения производятся в p -пространстве, являющемся в данном случае пространством постоянной кривизны. Учитывая аргументацию §2 работы[5][x/], мы определим 4-импульс p_m $(m = 0,1,2,3)$ посредством соотношения (Y 5) при условии, что $\epsilon = 1$. В этих координатах преобразование сдвига в кривом p -пространстве, операторы x^n, элемент объема $d\Omega_p$ задаются, соответственно, выражениями[xx/] (Y 9), (Y 13) и (Y 15).

2

Пусть $\psi(p)$ и $\phi(k)$ -данные скалярные поля, описывающие частицы с массами m и μ, причем поле $\psi(p)$ является комплексным, а $\phi(k)$ -действительным. Последнее означает (см. например,[6]), что при комплексном сопряжении $\psi(p)$ переходит в $\psi^*(-p)$, а $\phi(k)$ - в $\phi(-k)$. Будем считать, что обычный формализм свободных полей переносится в новую схему с изменением лишь в одном пункте: вместо функции $\delta(p-q)$, фигурирующей в релятивистски ковариантной записи перестановочных соотношений, "нормальных" и "хронологических" спариваний, необходимо использовать, в соответствии с новым характером интегрирования в p -пространстве, функцию $\delta(p(-)q)$, определенную соотношением (V 19).

Предположим далее, что лагранжиан взаимодействия рассматриваемой модели в x -представлении обычной теории имеет вид: $L(x) = g\psi^+(x)\psi(x)\phi(x)$ ("крест" означает эрмитовское сопряжение). Для построения S -матрицы в кривом p -пространстве мы должны обобщить величину[xxx/]

$$\tilde{\tilde{L}}(q) = \int e^{-iqx} L(x)\,dx = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\,\psi^+(q) * \psi(q) * \phi(q), \qquad (1)$$

поскольку $\int L(x)\,dx = \tilde{\tilde{L}}(0)$. Оказывается, что несмотря на неассоциативность новой операции свертки (V 17), это обобщение при учете требования $\tilde{\tilde{L}}^+(q) = \tilde{\tilde{L}}(-q)$ производится однозначно[xxxx/]:

$$\tilde{\tilde{L}}(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\,[\psi^+(q) * \psi(q)] * \phi(q), \qquad (2)$$

---

x/ Формулы из [5] будут приводиться с римской цифрой Y.

xx/ Во всех этих выражениях необходимо положить $\epsilon = 1$.

xxx/ Для записи $\tilde{\tilde{L}}(q)$ используется символ свертки; фурье-образы полей $\psi(x)$ и $\phi(x)$ определяются по[6].

xxxx/ Для самодействующих скалярных полей, например, поля Харста-Тирринга[7], обобщение $\tilde{\tilde{L}}(q)$ особенно просто:

$$\tilde{\tilde{L}}(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}}\,\phi(q) * \phi(q) * \phi(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(-(p(-)q))\,\phi(k)\,\phi(-(k(-)p))\,d\Omega_p\,d\Omega_k$$

(здесь символом $*$ обозначена свертка (V 17)), откуда

$$\tilde{L}(0) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^{+}(p)\,\psi(-(p(+)k))\,\phi(k)\,d\Omega_p\,d\Omega_k\,. \qquad (3)$$

Если операторы полей заданы в представлении взаимодействия, то S -матрица данной модели с учетом (3) может быть записана следующим образом:

$$S = T\exp\{ i \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^{+}(p)\,\psi(-(p(+)k))\,\phi(x)\,d\Omega_p\,d\Omega_k\}\,, \qquad (4)$$

где символ T означает, что функционал (4) приводится к нормальной форме согласно теореме Вика для T -произведений, т.е. с использованием "хронологических" спариваний x/. Применяя правила функционального дифференцирования (V 21-22), можно сразу представить S -матрицу (4) в виде N -упорядоченного оператора [8]:

$$S = N e^{\Delta+\Sigma} \exp\{\frac{ig}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^{+}(p)\psi(-(p(+)k))\phi(k)\,d\Omega_p\,d\Omega_k\}, \qquad (5)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{4\pi i} \int \Delta^{c}(k)\,d\Omega_k \frac{\delta^2}{\delta\phi(k)\,\delta\phi(-k)}\,, \quad \Sigma = \frac{1}{2\pi i} \int d\Omega_p \frac{\delta}{\delta\psi(p)}\, D^{c}(p)\, \frac{\delta}{\delta\psi^{+}(-p)}$$

$$\left(\Delta^{c}(k) = \frac{1}{\mu^2 - k^2 - i\epsilon}\,, \quad D^{c}(p) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon}\right).$$

При разложении (4) по степеням g мы получаем совокупность диаграмм Фейнмана с видоизмененным законом сложения 4-импульсов в вершинах xx/, новым элементом объема и новой областью интегрирования. Оставляя пока в стороне вопросы сходимости xxx/, приведем для примера несколько простейших диаграмм (рис. 1) и отвечающих им выражений (прямая линия на рис. 1 соответствует заряженным частицам, волнистая - нейтральным):

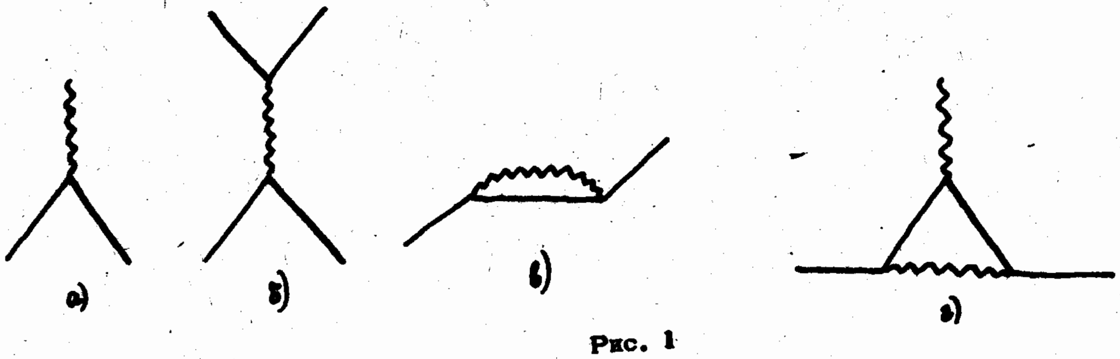

Рис. 1

x/ Как в обычной теории, мы предполагаем, что выражение $\tilde{L}(0)$ уже имеет нормальный вид.

xx/ При этом порядок суммируемых 4-импульсов из-за однозначности выражения (3) для $\tilde{L}(0)$ и свойства $\delta(p(-)q) = \delta(q(-)p)$ функции $\delta(p(-)q)$, входящей в "хронологические" спаривания, является совершенно определенным и находится в соответствии с правилом данным в [3].

xxx/ Мы обсуждаем их в § 4.

а/ $\frac{ig}{\sqrt{2\pi}} N[\psi^+(-p)\psi(p(-)k)\phi(k)]$,

б/ $\frac{ig^2}{8\pi^2}\Delta^c(k) N[\psi^+(-p)\psi(p(-)k)\psi^+(-p')\psi(p'(+)k)]$,

(6)

в/ $\frac{g^2}{16\pi^3} N[\psi^+(-p)\psi(p)]\int D^c(p(-)k)\Delta^c(k)\,d\Omega_k$,

г/ $\frac{g^3}{6(2\pi)^{9/2}}\int d\Omega_k N[\psi^+(-(p(-)k(+)k'(+)k))\cdot\phi(k')\psi(p)]\,D^c(p(-)k)\Delta^c(k)\,D^c(p(-)k(+)k')$

(N -символ нормального произведения).

3

S -матрица в форме (4) не является унитарным оператором, даже если в ее разложении по теории возмущений ограничиться членами порядка g^2. Оказывается, однако, что в рассматриваемом формализме с помощью рецепта, указанного в [9], можно построить матрицу рассеяния, имеющую явно унитарный вид:

$$S' = \tilde{T}_\lambda \exp\{2\pi i \int_0^\lambda d\lambda\, A\}\ , \qquad (\lambda = g/(2\pi)^{3/2})\ . \qquad (7)$$

где символ $\tilde{T}_\lambda$ означает "антихронологическое" упорядочение по λ, и

$$A = \tilde{L}(0)/g = \int\psi^+(p)\phi(k)\psi(-(p(+)k))\,d\Omega_p\,d\Omega_k$$

эрмитовский оператор, сконструированный из гайзенберговских полей ψ, ψ^+, и ϕ, удовлетворяющих следующим уравнениям движения (перенормировка для простоты опущена):

$$(m^2-p^2)\psi(p) = \lambda\int\phi(k)\psi(-(p(-)k))\,d\Omega_k\ ;$$

$$(m^2-p^2)\psi^+(p) = \lambda\int\psi^+(-(p(-)k))\phi(k)\,d\Omega_k \qquad (8)$$

$$(\mu^2-k^2)\phi(k) = \lambda\int\psi^+(p)\psi(-(p(-)k))\,d\Omega_p\ .$$

Полагая в (8) $\phi(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\phi_n(k)$, $\psi(p)=\sum\lambda^n\psi_n(p)$, $\psi^+(p)=\sum\lambda^n\psi_n^+(p)$, находим, как обычно, рекуррентные соотношения между ϕ_n, ψ_n и ψ_n^+, решая которые с помощью "запаздывающих" функций Грина $\Delta^{ret}=\frac{1}{\mu^2-k^2-i\epsilon k_0}$ и $D^{ret}=\frac{1}{m^2-p^2-i\epsilon p_0}$ (это продиктовано соображениями соответствия при $\ell\to 0$), получаем выражения для ϕ_n, ψ_n, ψ_n^+ в виде функционалов от <u>свободных полей</u> ϕ_0, ψ_0 и ψ_0^+. В (7) можно произвести необходимые интеграции по λ, если учесть, что

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A_n=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\Big[\int d\Omega_p\,d\Omega_k\sum_{m=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-m}\psi_\ell^+(p)\phi_m(k)\psi_{n-m-\ell}(-(p(+)k))\Big]\ . \qquad (9)$$

В результате S' –матрица (7) представляется в виде

$$S' = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n , \tag{10}$$

где

$$\sigma_1 = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} A_n \; ; \quad \sigma_2 = (2\pi i)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+2}}{n+2} \sum_{m=0}^{n} \frac{A_m A_{n-m}}{m+1}$$

$$\sigma_3 = (2\pi i)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+3}}{n+3} \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m+2} \sum_{\ell=0}^{m} \frac{A_\ell A_{m-\ell} A_{n-m}}{\ell+1} \qquad \text{и т.п.}$$

Считая в то же время, что $S' = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S'_n$, выделим из (10) члены порядка λ^2 :

$$S'_2 = i\pi A_1 - 2\pi^2 A_0^2 . \tag{11}$$

Согласно сказанному выше, S'_2 является функционалом от полей ϕ_0 , ψ_0 и ψ_0^+. Приводя этот функционал к нормальному виду, мы получаем возможность изображать его с помощью диаграмм Фейнмана. При этом оказывается, что члены из S'_2, отвечающие несвязным и слабо связным диаграммам, совпадают с соответствующими членами 2-го порядка S –матрицы (4), тогда как для сильно связных диаграмм такого совпадения нет[x/]. Например, диаграмме в) теперь сопоставляется выражение (ср с в) из (6)):

$$\frac{\lambda^2}{2} N[\psi_0^+(-p)\,\psi_0(p)] \int_\Omega [D^c(p(-)k)\,\Delta^c(k) - D^{ret}(p(-)k)\Delta^{ret}(k)]\, d\Omega_k , \tag{12}$$

где, в отличие от обычной теории, $\int_\Omega D^{ret}(p(-)k)\Delta^{ret}(k)\, d\Omega_k \neq 0$.

4

Исследование сходимости интегралов, содержащих в разложениях матриц (4) и (7), мы начнем с рассмотрения диаграммы в), которой в обычной теории соответствует логарифмически расходящийся интеграл

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i} \int D^c(p-k)\Delta^c(k)\, d^4k . \tag{13}$$

Как известно, (13) можно также представить в виде:

$$\Sigma_2(p^2) = \lim_{L\to\infty} \int_0^1 da \int_{k_\nu^2 \le L^2} \frac{dk_4\, d\vec{k}}{(M + k_4^2 - i\epsilon)^2} \qquad (\nu = 1, 2, 3, 4,), \tag{14}$$

---

x/ Разложение S' –матрицы (7) отличается от разложения S –матрицы (4) и в высших порядках теории возмущений.

где $M = (1-a)\mu^2 + am^2 - a(1-a)p^2 + \vec{k}^2 > 0$ при $p^2 < (m+\mu)^2$, а внутреннее интегрирование производится по евклидову 4-пространству. В S -матрице (4), согласно (6), вместо (13) будем иметь:

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i} \int_\Omega D^c(p(-)k)\,\Delta^c(k)\,d\Omega_k \tag{15}$$

и, соответственно, в (7) -

$$\Sigma'_2(p^2) = \frac{1}{i} \int [D^c(p(-)k)\,\Delta^c(k) - D^{ret}(p(-)k)\,\Delta^{ret}(k)]\,d\Omega_k \tag{16}$$

Интеграл (16) тесно связан с (15); например, на массовой поверхности $p^2 = m^2$ x/

$$\Sigma'_2(p^2) = Im \int D^c(p(-)k)\,\Delta^c(k)\,d\Omega_k$$

Поэтому ниже мы исследуем лишь (15). С учетом (V 10) и (V 15) в явном виде этот интеграл записывается следующим образом:

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i} \int_{k^2 \geq -1} \frac{d^4k}{\sqrt{1+k^2}\,[1+m^2-(\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+k^2}-pk)^2-i\epsilon](\mu^2-k^2-i\epsilon)}$$

Для (17) можно найти параметрическое представление, аналогичное (14) xx/,

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{da}{1+4a(1-a)p^2} \int_\Omega \frac{dk_0\,d\vec{k}}{\sqrt{1+\vec{k}^2}(M-k_0^2-i\epsilon)^2} \tag{18}$$

где

$$M = \frac{(1-a)\mu^2 + am^2}{\sqrt{1+4a(1-a)p^2}} + \frac{(1+\vec{k}^2)-(1-\vec{k}^2)\sqrt{1+4a(1-a)p^2}}{2\sqrt{1+4a(1-a)p^2}} > 0 \quad \text{при} \quad -1 < p^2 \leq (m(+)\mu)^2 = \tag{19}$$

$$= (m\sqrt{1+\mu^2} + \mu\sqrt{1+m^2})^2$$

Однако, в представлении (18), в отличие от (14), вид области Ω и аналитические свойства подынтегральной функции не позволяют совершить поворот на $\pi/2$ пути интегрирования в плоскости k_0 и перейти таким образом к интегрированию по кривому p -пространству с положительно определенной метрикой (в дальнейшем E_4), являющемуся аналогом

---

x/ Автор благодарен Д.А. Киржницу, указавшему на это обстоятельство.

xx/ (18) является релятивистски инвариантным представлением $\Sigma_2(p^2)$, так как 4-вектор p_m входит в подынтегральное выражение лишь в виде p^2. Очевидно, при $\ell \to 0$ (18) переходит в фейнмановское представление (14).

евклидова 4-пространства в (14). По этой причине интеграл (17)-(18), несмотря на "радиальную" сходимость, оказывается расходящимся по гиперболическим угловым переменным (ср. § 28 из [8], где обсуждается аналогичная ситуация с расходимостью по обычным углам).

Если бы переход к интегрированию по пространству E_4 был возможен, то мы имели бы для рассматриваемого интеграла явно сходящееся выражение

$$\Sigma_2''(p^2) = \int_0^1 \frac{da}{1+4a(1-a)p^2} \int_{k_\nu^2 \le 1} \frac{dk_4\, d\vec{k}}{\sqrt{1-k_\nu^2}\,(M+k_4^2-i\epsilon)^2} \qquad (\nu = 1,2,3,4), \qquad (20)$$

которое является вещественной величиной при значениях p^2 ниже "порога" $(m(+)\mu)^2$ (см. (19)). Интеграл (20), очевидно, полностью аналогичен (14). Мы можем записать эти выражения в еще более сходной форме, если совершим в каждом из них аналитическое продолжение по переменной p_0 от ее действительных значений к чисто мнимым значениям[x] ip_4 и произведем интеграции по a. В результате будем иметь:

$$\Sigma_2(-p_\nu^2) = \lim_{L\to\infty} \int_{k_\nu^2 \le L^2} \frac{dk}{[m^2+(p-k)_\nu^2](\mu^2+k_\nu^2)} \quad ; (dk = dk_4 d\vec{k}) \qquad (21)$$

$$\Sigma_2''(-p_\nu^2) = \int_{k_\nu^2 \le 1} \frac{d\Omega_k}{[m^2+(p(-)k)_\nu^2](\mu^2+k_\nu^2)}, \qquad (22)$$

где $(p(-)k)_\nu^2 = 1-(\sqrt{1-p_\nu^2}\sqrt{1-k_\nu^2}+p_\nu k_\nu)^2$ есть квадрат вектора, преобразованного с помощью операции сдвига в E_4, а $d\Omega_k = \dfrac{dk}{\sqrt{1-k_\nu^2}}$ - элемент объема этого пространства.

5

Анализ показывает, что расходимости по гиперболическим углам возникают и в высших порядках теории возмущений. Поэтому данный в § 4 способ построения конечного интеграла Σ_2'' (см. (20) и (22)) целесообразно распространить на случай произвольной диаграммы. То есть мы приходим к выводу, что матрица рассеяния в рассматриваемой схеме должна быть обобщением такой формы обычной S -матрицы, в которой все внутренние интегрирования производятся по евклидову 4-пространству. При таком подходе роль новой S -матрицы может играть функционал[xx] (ср. с (5))

---

x/ Возможность такого аналитического продолжения для (14) очевидна, а для (20) может быть строго доказана.

xx/ Аналогичный функционал рассматривался Гольфандом[10].

$$S'' = e^{\Delta+\Sigma} \exp\left[\frac{ig}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^{+}(p)\,\psi(-(p(+)k))\,\phi(k)\, d\Omega_p\, d\Omega_k\right],$$

где

$$\Delta = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\Omega_k}{\mu^2 + k_\nu^2} \frac{\delta^2}{\delta\phi(k)\,\delta\phi(-k)}, \quad \Sigma = \frac{1}{2\pi} \int d\Omega_p \frac{\delta}{\delta\psi(p)} \frac{1}{m^2+p_\nu^2} \frac{\delta}{\delta\psi^{+}_{(-p)}} \tag{23}$$

причем все интегрирования производятся по пространству E_4, а функциональные производные понимаются в смысле (V 21-22). "Истинные" матричные элементы получаются путем варьирования S'' по аргументам ψ, ψ^+, ϕ, с последующим приравниванием этих аргументов нулю (ср. с § 47 из [6]) и аналитическим продолжением типа $p_4 \to -ip_0$ полученных выражений в физическую область значений 4-х компонент внешних импульсов[x/].

Например, для рассмотренной выше массовой диаграммы 2-го порядка имеем:

$$\left.\frac{\delta\, S_2''}{\delta\psi^{+}(-p)\,\delta\psi(p')}\right|_{\psi,\,\psi^+,\,\phi=0} = -\frac{g^2}{16\pi^3}\,\delta(p(-)p')\,\Sigma_2''(-p_\nu^2); \quad \Sigma_2''(p_0^2-\vec{p}^{\,2}) = \text{анал. продолж}\left.\Sigma_2''(-p_\nu^2)\right|_{p_4\to -ip_0}$$

где S_2'' члены второго порядка в (23).

Характерной особенностью получаемых таким образом интегралов является отсутствие расходимостей. Выполнение условия унитарности для первых двух порядков по g является очевидным, а для высших приближений требуется специальное исследование.

Автор выражает благодарность Н.Н. Боголюбову, Ю.А. Гольфанду, В.И. Григорьеву, А.А. Логунову, М.А. Маркову, И.Е. Тамму, И.Т. Тодорову, Н.А. Черникову и Ю.М. Широкову за многочисленные плодотворные дискуссии.

Литература

1. H.Shyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947)
2. В.Л. Авербах, Б.В. Медведев. ДАН СССР, 54, 41 (1949).
3. Ю.А. Гольфанд. ЖЭТФ, 37, 504 (1959).
4. В.Г. Кадышевский. ЖЭТФ, 41, 1885 (1961).
5. В.Г. Кадышевский. Препринт ОИЯИ. Р-1017
6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, (1957).
7. C.A.Hurst, Proc. Camdr. Phil. Soc. 18, (1052); W.Thirring Helf. Phys. Acta 26, 33 (1953).
8. S.Hori, Progr. Theor. Phys., 7, (1952); Nucl. Phys. 30, 644 (1962).
9. Д.А. Киржниц. ЖЭТФ, 41, 557 (1961).
10. Ю.А. Гольфанд, ЖЭТФ, (в печати).

Рукопись поступила
в Издательский отдел 21 июня 1962 г.

---

x/ При этом для правильного обхода особенностей, возникающих в физической области, необходимо добавить к массам $-i\epsilon$. Элементы обычной матрицы рассеяния, очевидно, могут быть получены аналогичным способом. Возможность аналитического продолжения $p_4 \to -ip_0$ в этом случае доказывается в общем виде [6].