1017

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.Г. Кадышевский

Р-1017

О РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯХ В ТЕОРИИ КВАНТОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

ДАН СССР, 1962, т147, № 3, с588-591.

Дубна 1962 г.

В.Г. Кадышевский

Р-1017

О РАЗЛИЧНЫХ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯХ В ТЕОРИИ КВАНТОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Направлено в ДАН

Дубна 1962 г.

В данной работе, являющейся продолжением [1/x/], обсуждаются вопросы, связанные с неоднозначностью в определении вектора 4-импульса в теории типа Снайдера [2,3,4]. Эта неоднозначность обусловлена тем фактом, что на пятимерной гиперсфере

$$\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \epsilon\eta_4^2 = -\epsilon \tag{1}$$

(ср. с формулой (I.2.5)), моделирующей p -пространство в теории, можно ввести бесконечное множество релятивистски ковариантных систем координат (p_0 , p_1 , p_2 , p_3), каждая из которых при переходе к обычному псевдоевклидову [xx/] p -пространству становится его декартовой системой (см. также [3]). В работах [2,3,4,1] роль 4-импульса $p_m (m = 0, 1, 2, 3)$ играют координаты проекций точек гиперсферы (1) на касательную плоскость $\eta_4 = 1$ (центр проекции совпадает с центром гиперсферы) [xxx/]. С помощью (1) легко установить, что

$$\eta_m = \frac{p_m}{\sqrt{1 - \epsilon p^2}}, \quad \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon p^2}} \qquad (p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}), \tag{2}$$

откуда (см. (I2.4))

$$p_m = \eta_m / \eta_4 . \tag{3}$$

Из (2) также следует, что поверхность (1) отображается не на всю плоскость $\eta_4 = 1$, а лишь в области $p^2 \leq 1$ при $\epsilon = 1$ и $p^2 \geq -1$ при $\epsilon = -1$.

Перемещая плоскость проекции параллельно самой себе и сдвигая центр проекции вдоль оси η_4, мы можем найти все релятивистски ковариантные параметризации гиперсферы (1). При этом, в частности, получается параметризация, отвечающая известной стереографической проекции (проектирование из полюса (0,0,0,0,1) на касательную плоскость

---

x/ Формулы из [1] будут приводиться с римской цифрой I. Везде в дальнейшем используется такая система единиц, в которой $\hbar = c = \ell = 1$. При этом, очевидно, для перехода к обычной теории достаточно считать все величины размерности энергии-импульса много меньшими единицы.

xx/ Псевдоевклидовость p -пространства, возникающего при $\ell \to 0$, обеспечивается тождественностью знаков перед ϵ в правой и левой частях (1).

xxx/ В геометрии такая параметризация сферы называется геодезической.

$\eta_4 = -1$), а также ортогональная параметризация (проектирование из точки $(0,0,0,0,\infty)$ на экваториальную плоскость $\eta_4 = 0$). В первом случае имеем:

$$\eta_m = \frac{p_m}{\epsilon p^2/4 - 1} , \qquad \eta = \frac{\epsilon p^2/4 + 1}{\epsilon p^2/4 - 1} . \tag{4}$$

Соответственно, во втором случае:

$$\eta_m = P_m , \qquad \eta_4 = \sqrt{1 + \epsilon p^2} . \tag{5}$$

Геодезическая, стереографическая и ортогональная проекции явным образом выделяются среди всех способов отображения сферы на плоскость, причем другие проекции являются в некотором смысле промежуточными между этими тремя. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением только указанных проекций, т.е. считаем, что 4-импульс p_m определяется либо соотношением (2), либо (4), либо (5).

Легко видеть, что в случае (4) поверхность (1) отображается на всю плоскость $\eta_4 = -1$. Если же диаметрально противоположные точки гиперсферы отождествлены /1/, то тогда точки p_m и q_m плоскости проекции, связанные преобразованием инверсии $p_m = 4\epsilon q_m/q^2$, тоже должны считаться тождественными. В результате область проекции принимает вид: $-4 \le p^2 \le 4$. В случае (5) гиперсфера (1) проектируется в область $p^2 \ge -1$ при $\epsilon = 1$ или в область $p^2 \le 1$ при $\epsilon = -1$. При отождествлении диаметрально противоположных точек (1) эти области становятся топологически эквивалентными четырехмерным листам Мебиуса, поскольку их границы принадлежат (1) (ср. с §2 из /1/).

Имея соотношения (2), (4), (5), мы можем легко перенести все выводы и формулы из /2,4,1/ в стереографическую и ортогональную параметризации. Так, например, преобразование сдвига (I 2.9) в координатах (4) записывается следующим образом:

$$p_n(+)k_n = \frac{(p_n + k_n)(1 - \epsilon k^2/4) + k_n \frac{\epsilon(p+k)^2}{4}}{(1 - \epsilon p^2/4)(1 - \epsilon k^2/4) + \epsilon \frac{(p+k)^2}{4}} \equiv q_n , \tag{6}$$

если $q^2 \ge -4$ при $\epsilon = 1$ или $q^2 \le 4$ при $\epsilon = -1$, и

$$p_n(+)k_n = 4\epsilon q_n / q^2 \tag{7}$$

для остальных q^2 (предполагается, что $-4 \le p^2 \le 4$ и $-4 \le k^2 \le 4$). С помощью (6) находим соотношение:

$$q^2 = \frac{(p+k)^2}{(1 - \epsilon p^2/4)(1 - \epsilon k^2/4) + \frac{\epsilon}{4}(p+k)^2} . \tag{8}$$

Из (6), (7) и (8) вытекает, что $-4 \leq (p(+)k)^2 \leq 4$. Соответственно, в координатах (5) будем иметь:

$$p_n(+)k_n = \sigma[p_n + k_n(\sqrt{1+\epsilon p^2} + \frac{\epsilon(pk)}{1+\sqrt{1+\epsilon k^2}})] \cdot (pk = p_0 k_0 - \vec{p}\vec{k}), \tag{9}$$

где $\sigma = sign[\sqrt{1+\epsilon p^2}\sqrt{1+\epsilon k^2} + \epsilon(pk)]$.

Из (9) следует, что

$$1 + \epsilon(p(+)k)^2 = (\sqrt{1+\epsilon p^2}\sqrt{1+\epsilon k^2} + \epsilon(pk))^2 \geq 0. \tag{10}$$

Таким образом, преобразование (9) не выводит вектор p_m за пределы области проекции.

Операторы координат x^n мы по-прежнему определяем как инфинитезимальные операторы сдвига в кривом p -пространстве, т.е. предполагается, что

$$\phi(p(+)k) = (1 - ik_n x^n)\phi(p) \tag{11}$$

при малых k_n. С помощью (6) и (9) можно найти явный вид x^n в соответствующих параметризациях (функции $\phi(p)$ считаются скалярными)x/:

$$x^n = i[\delta_m^n(1 + \frac{\epsilon p^2}{4}) - \epsilon/2\, p_m p^n]\frac{\partial}{\partial p_m} \qquad \text{(координаты (4))} \tag{12}$$

$$x^n = i\sqrt{1+\epsilon p^2}\,\frac{\partial}{\partial p_n} \qquad \text{(координаты (5))}. \tag{13}$$

Зная метрику гиперсферы (1) и пользуясь соотношениями (4) и (5), легко вычислить элемент объема кривого p -пространства в рассматриваемых случаях (ср. с (I 6.2)):

$$d\Omega_p = \sqrt{-g}\,d^4p = \frac{d^4p}{(1-\epsilon p^2)^4} \qquad \text{(координаты (4))} \tag{14}$$

$$d\Omega_p = \sqrt{-g}\,d^4p = \frac{d^4p}{\sqrt{1+\epsilon p^2}} \qquad \text{(координаты (5))}, \tag{15}$$

где g -детерминант метрического тензора p -пространства в координатах (4) и (5).

Ясно, что во всех параметризациях имеет место равенство:

$$d\Omega_{p(+)k} = d\Omega_p. \tag{16}$$

В то же время $d\Omega_{k(+)p} \neq d\Omega_p$, так как $k(+)p$ не является преобразованием вектора p при движениях пространства постоянной кривизны.

---

x/ Матричный член, возникающий в операторах x^n в том случае, когда волновая функция является спинором, для всех параметризаций одинаков и совпадает с (I 4.9).

Свойство "правоинвариантности" $d\Omega_p$ при сдвигах может быть положено в основу определения свертки функций $f_1(p)$ и $f_2(p)$ в кривом p -пространстве:

$$f_1^{(p)} * f_2(p) = \int_\Omega f_1(q)\, f_2(-(q(-)p))\, d\Omega_p \,, \tag{17}$$

где Ω -область, в которую проектируется гиперсфера (1) при выбранной параметризации. Производя в (17) замену переменных $q(-)p = -q'$, что равнозначно $q = -(q'(-)p)$, легко убедиться в коммутативности новой операции свертки:

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1 . \tag{18}$$

Однако обычным свойством ассоциативности (17) не обладает.

Полагая в (17) $f_1(p) = \delta(p)$, $f_2(p) = f(p)$, будем иметь при учете (18):

$$\delta(p) * f(p) = \sqrt{-g(0)}\; f(-(0(-)p)) = f(p) = \int \delta(q(-)p) f(q)\, d\Omega_q . \tag{19}$$

С другой стороны, $\delta(q(-)p) = \delta(p(-)q)$, так как, если $q(-)p = 0$, то $p(-)q = 0$, а для остальных p и q всегда $\delta(q(-)p) = \delta(p(-)q) = 0$. Поэтому функция $\delta(p(-)q)$ является аналогом обычной четырехмерной функции $\delta(p-q)$. Из (19) следует, что

$$\delta(p(-)q) = \frac{1}{\sqrt{-g(p)}}\, \delta(p-q) . \tag{20}$$

Наличие нового элемента объема требует нового определения операции дифференцирования функционалов от функций, заданных в кривом p -пространстве. Именно, если $F[f(p)]$ есть такой функционал, то мы всегда будем считать, что

$$\delta F[f(p)] = \int_\Omega \frac{\delta F[f(p)]}{\delta f(q)}\, \delta f(q)\, d\Omega_q . \tag{21}$$

Полагая в (21) $F[f] = f$, находим равенство $\delta f(p) =$

$$= \int_\Omega \frac{\delta f(p)}{\delta f(q)}\, \delta f(q)\, d\Omega_q \,,$$ откуда, на основании (19),

$$\frac{\delta f(p)}{\delta f(q)} = \delta(p(-)q). \tag{22}$$

Нетрудно убедиться, что определенная соотношениями (21) и (22) операция дифференцирования обладает всеми свойствами обычного функционального дифференцирования.

2

Из вышеизложенного следует, что каждой параметризации кривого p -пространства отвечает свой вид операции $(+)$, координат x^n, элемента объема $d\Omega p$. Следовательно, задача правильного определения 4-импульса p_m в этом пространстве может быть сведена к отысканию "правильной" формы сдвига $p(+)k$, "правильных" x^n и т.д. С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся в релятивистском пространстве скоростей, несущем геометрию Лобачевского. Известно, что группой движения пространства в этом случае является группа Лоренца. С другой стороны, в силу определения $v_a = dx a/dt\,(a = 1,2,3)$ преобразования Лоренца относительно компонент v_a должны быть дробно-линейными. Поэтому в v -пространстве постоянной кривизны реализуется геодезическая система координат (см. (/ 2.9)).

Возвращаясь опять к кривому p -пространству, мы можем заметить, что из всех его релятивистски ковариантных параметризаций наиболее близка к системе координат в обычном пространстве импульсов параметризация (5). Именно только в этом случае имеет место равенство (см. (13)):

$$[t, \vec{p}\,]_- = 0 \,, \qquad (23)$$

что позволяет переходить от $(p_0, \vec{p})$ -представления к "смешанному" $(t, \vec{p})$ -представлению[x/]. Это обстоятельство нам кажется существенным для дальнейшего развития теории в рассматриваемой схеме (например, для формулировки принципа причинности) и может, по нашему мнению, служить основанием для определения вектора 4-импульса кривого p -пространства посредством соотношения (5). В следующей работе, посвященной исследованию модели теории поля в данном формализме, мы определим 4-импульс именно так. При этом мы положим $\epsilon = 1$, т.е. выберем Ω в виде $p^2 \geq -1$, чтобы в теории не было ограничения на массы физических систем.

Автор выражает глубокую благодарность Ю.А. Гольфанду за многочисленные плодотворные дискуссии.

Литература

1. В.Г. Кадышевский. ЖЭТФ, 41, 1885 (1961).
2. H.Snyder. Phys. Rev. 71, 38 (1947).
3. В.Л. Авербах, Б.В. Медведев. ДАН СССР, 54, 41 /(1949).
4. Ю.А. Гольфанд. ЖЭТФ, 37, 504 (1959).

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июня 1962 г.

---

x/ Подчеркнем особо, что равенство (23) выполняется в ортогональной параметризации потому, что вектор p, будучи в силу (5) 3-мерной частью 5-вектора (η_m, η_4), ортогонален к плоскости (04), а t есть инфинитезимальный оператор поворота в этой плоскости. Очевидно никакая другая релятивистски ковариантная система координат этим свойством не обладает.