

1013

2.3 ✓



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В.К. Мельников

P - 1013

КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ
В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ 1

Дубна 1962 год

В.К. Мельников

Р - 1013

КАЧЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЙ
В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ 1

1586/3 чр.

Объединенный институт
высших исследований
БИБЛИОТЕКА

Дубна 1962 год

А н н о т а ц и я

В работе дается качественное описание и условия возникновения сильного резонанса в нелинейной системе. Результаты работы дают новый метод для расчета резонансов в нелинейных системах, например, циклических ускорителях с пространственной вариацией магнитного поля. С помощью этого метода в работе рассмотрена устойчивость радиальных колебаний в изохронном циклотроне.

**QUALITATIVE DESCRIPTION OF RESONANCE PHENOMENA IN THE NON-LINEAR
SYSTEM I**

V.K. Melnikov

A b s t r a c t

In this paper a qualitative description of strong resonances and the conditions for its appearance in the non-linear system are given. A new method is suggested for calculating resonances in the non-linear system. e. g. for cyclic accelerators with the space variation of the magnetic field strength. Using this method, the stability of radial oscillations in an isochronous cyclotron is treated.

В настоящей статье нас будет интересовать вопрос о поведении траекторий нелинейной системы в окрестности положения равновесия эллиптического типа. Более точно речь будет идти о системе вида:

$$\dot{x} = \omega y + f(x, y, t), \quad \dot{y} = -\omega x + g(x, y, t), \quad (I)$$

где $\omega > 0$, а функции $f(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$ аналитические по x , y и t в некоторой области $|x| < R_0$, $|y| < R_0$, $|Im t| < \delta_0$ ($R_0 > 0$, $\delta_0 > 0$) и периодические по t с периодом 2π . Пусть далее разложение этих функций в ряд по степеням x и y не содержит членов ниже второй степени. Тогда, как известно, поведение траекторий системы (I) в окрестности точки $x = y = 0$ определяется с одной стороны арифметической природой частоты ω , а с другой стороны - некоторыми инвариантами системы (I), зависящими от конкретного выбора функций $f(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$. Возникающие при этом эффекты получили название резонансных и до недавнего времени изучались исключительно с помощью асимптотических или близких к ним методов. Однако, как будет видно из последующего изложения, асимптотические методы в том виде, например, как они излагаются в монографии^[1], мало пригодны для исследования таких, например, процессов, как движение заряженных частиц в магнитном поле. С другой стороны полученное в настоящей работе качественное описание резонансных явлений удобно во всех других случаях.

§ I. Преобразование системы (I) к каноническому виду

Система (I) может быть преобразована к очень удобному для наших целей виду. Это достигается следующим образом. Перейдем в системе (I) от переменных x , y к переменным $u = x + iy$, $\bar{u} = x - iy$. В новых переменных система (I) имеет вид:

$$\dot{u} = -i\omega u + p(u, \bar{u}, t), \quad \dot{\bar{u}} = i\omega \bar{u} + q(u, \bar{u}, t), \quad (2)$$

$$\text{где } p(u, \bar{u}, t) = f\left(\frac{u+\bar{u}}{2}, \frac{u-\bar{u}}{2i}, t\right) + iq\left(\frac{u+\bar{u}}{2}, \frac{u-\bar{u}}{2i}, t\right) = \overline{q(u, \bar{u}, t)},$$

очевидно, в силу сделанных предположений всегда может быть разложена в сходящийся ряд по степеням u и \bar{u} . Предположим теперь, что функция $p(u, \bar{u}, t)$ имеет вид:

$$p(u, \bar{u}, t) = \sum_{z=1}^k C_z u^{z+1} \bar{u}^z + \sum_{m=0}^n p_m(t) u^{n-m} \bar{u}^m + \dots,$$

где $n > 2k + 1$, а точками обозначены члены более высокой степени, чем n . Сделаем в системе (2) замену вида:

$$v = u + \sum_{m=0}^n \alpha_m(t) u^{n-m} \bar{u}^m + \dots, \quad \bar{v} = \bar{u} + \sum_{m=0}^n \overline{\alpha_m(t)} u^m \bar{u}^{n-m} + \dots, \quad (3)$$

где точками обозначены члены более высокой степени, чем n . Путем элементарных вычислений, находим, что в переменных v , \bar{v} система (2) имеет вид:

$$\dot{v} = -i\omega v + \sum_{z=1}^k C_z v^{z+1} \bar{v}^z + \sum_{m=0}^n (\dot{\alpha}_m(t) - i\omega(n-2m-1)\alpha_m(t) + p_m(t)) v^{n-m} \bar{v}^m + \dots, \quad (4)$$

$$\dot{\bar{v}} = i\omega \bar{v} + \sum_{z=1}^k \bar{C}_z v^z \bar{v}^{z+1} + \sum_{m=0}^n (\overline{\dot{\alpha}_m(t)} + i\omega(n-2m-1)\overline{\alpha_m(t)} + \overline{p_m(t)}) v^m \bar{v}^{n-m} + \dots,$$

где точками попеременно обозначены члены более высокой степени, чем n . Попробуем теперь так подогнуть периодические с периодом 2π функции $\alpha_m(t)$ ($m=0, 1, \dots, n$), чтобы максимально упростить члены n -ой степени в правой части системы (4). Это, очевидно, удастся сделать в том случае, если каждое из уравнений:

$$\dot{\alpha}_m(t) - i\omega(n-2m-1)\alpha_m(t) + p_m(t) = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n)$$

имеет периодическое с периодом 2π решение. Полагая

$$\alpha_m(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \alpha_{m,s} e^{ist}, \quad p_m(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} p_{m,s} e^{ist},$$

находим, что $\alpha_{m,s}$ должно удовлетворять следующему уравнению:

$$[is - i\omega(n-2m-1)] \alpha_{m,s} = -p_{m,s}. \quad (5)$$

В том случае, когда n - четное, а $\omega(n-2m-1)$ не есть целое число при любом $m=0, 1, \dots, n$, система (5), очевидно, имеет единственное решение, даваемое выражением:

$$\alpha_{m,s} = \frac{i p_{m,s}}{s - \omega(n-2m-1)}.$$

Используя очевидные оценки для $p_{m,s}$, нетрудно установить, что функция $\alpha_m(t)$ будет аналитической в полосе $|\operatorname{Im} t| < \delta_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае мы можем обратиться в нуль в правой части системы (4) все члены n -ой степени.

В том случае, когда n - нечетное, а $\omega(n-2m-1)$ не есть целое число при любом целом $m=0, 1, \dots, n$, кроме $m = \frac{n-1}{2}$, мы можем обратиться в нуль в правой части системы (4) все члены n -ой степени, кроме члена $p_{\frac{n-1}{2}, 0} v^{\frac{n+1}{2}} \bar{v}^{\frac{n-1}{2}}$.

Таким образом, при соответствующей арифметической природе частоты ω описанное преобразование, примененное достаточное число раз, позволяет упростить в системе (3) члены до сколь угодно высокой степени. Вид, к которому приводятся эти члены, в дальнейшем будет называться каноническим. При этом могут возникнуть следующие три возможности:

I. Арифметическая природа частоты ω такова, что, применяя достаточное число раз преобразование (3), мы можем преобразовать систему (2) к виду:

$$\dot{\xi} = -i\omega \xi + \sum_{z=1}^{\kappa} C_z \xi^{z+1} \bar{\xi}^z + \dots, \quad \dot{\bar{\xi}} = i\omega \bar{\xi} + \sum_{z=1}^{\kappa} \bar{C}_z \xi^z \bar{\xi}^{z+1} + \dots, \quad (6)$$

где точками обозначены члены более высокой степени, чем $2\kappa + 1$, а среди констант C_z ($z=1, \dots, \kappa$) найдется хотя бы одна отличная от нуля;

2. $\omega = \frac{m}{n}$ где m и n - взаимно-простые целые числа, а среди констант C_z , получившихся при приведении к каноническому виду членов степени меньшей $n-1$, все равны нулю; таким образом, система (2) в этом случае приводится к виду:

$$\dot{\xi} = -i \frac{m}{n} \xi + \sum_{k=0}^z p_k(t) \xi^{z-k} \bar{\xi}^k + \dots, \quad \dot{\bar{\xi}} = i \frac{m}{n} \bar{\xi} + \sum_{k=0}^z \overline{p_k(t)} \xi^k \bar{\xi}^{z-k} + \dots, \quad (7)$$

где $z > n-1$, а точками обозначены члены более высокой степени, чем z ;

3. ω - иррациональное, а среди констант C_z , получающихся при приведении к каноническому виду членов сколь угодно высокой степени, все равны нулю.

Заметим сразу, что третий случай в определенном смысле является чрезвычайно редким. Поэтому в настоящей работе мы его рассматривать не будем.

§ 2. Поведение траекторий системы (1) в случае сильного резонанса.

Посмотрим, к какому виду можно привести с помощью преобразования (3) члены z -ой степени в правой части системы (7). Из уравнения (5) следует, что полагая в преобразовании (3)

$$\alpha_{k,s} = \frac{i p_{k,s}}{s - \frac{m}{n}(z - 2k - 1)}$$

для тех значений индексов k и s , для которых $s - \frac{m}{n}(z - 2k - 1) \neq 0$ мы приведем с помощью так выбранного преобразования систему (7) к виду:

$$\dot{v} = -i \frac{m}{n} v + \sum_{\ell} p_{k_{\ell}, s_{\ell}} e^{i s_{\ell} t} v^{z-k_{\ell}} \bar{v}^{k_{\ell}} + \dots, \quad \dot{\bar{v}} = i \frac{m}{n} \bar{v} + \sum_{\ell} \overline{p_{k_{\ell}, s_{\ell}}} e^{-i s_{\ell} t} v^{k_{\ell}} \bar{v}^{z-k_{\ell}} + \dots, \quad (8)$$

где $k_{\ell} = \frac{1}{2}(z - n\ell - 1)$, $s_{\ell} = n\ell$ и суммирование распространяется по всем целым ℓ , для которых k_{ℓ} получается целым и удовлетворяет неравенству $0 \leq k_{\ell} \leq z$. В наиболее типичном случае, когда $z = n-1$, ℓ принимает только одно значение (-1), если n - нечетно, и два значения (-1 и 0), если n - четно.

Сделаем далее в системе (8) замену:

$$r = \rho e^{-i\left(\frac{m}{n}t - \varphi\right)}, \quad \bar{r} = \rho e^{i\left(\frac{m}{n}t - \varphi\right)}.$$

Путем элементарных вычислений, используя соотношение $s_\ell - \frac{m}{n}(z - 2\kappa_\ell - 1) = 0$ находим, что в переменных ρ, φ система (8) имеет вид:

$$\dot{\rho} + i\rho\dot{\varphi} = \sum_{\ell} p_{\kappa_\ell, s_\ell} \rho^z e^{i(z-2\kappa_\ell-1)\varphi} + \dots, \quad \dot{\rho} - i\rho\dot{\varphi} = \sum_{\ell} \overline{p_{\kappa_\ell, s_\ell}} \rho^z e^{-i(z-2\kappa_\ell-1)\varphi} + \dots.$$

Отделяя далее действительную и мнимую части и пользуясь тем, что $z - 2\kappa_\ell - 1 = n\ell$, окончательно получим:

$$\dot{\rho} = \rho^z \sum_{\ell} (\alpha_\ell \cos n\ell\varphi - \beta_\ell \sin n\ell\varphi) + \dots, \quad \dot{\varphi} = \rho^{z-1} \sum_{\ell} (\alpha_\ell \sin n\ell\varphi + \beta_\ell \cos n\ell\varphi) + \dots, \quad (9)$$

где суммирование распространяется по тем же самым значениям ℓ , что и в системе (8).

Для выяснения вопроса о поведении траекторий системы (9) рассмотрим сначала расположение траекторий ускоренной системы:

$$\dot{\rho} = \rho^z \sum_{\ell} (\alpha_\ell \cos n\ell\varphi - \beta_\ell \sin n\ell\varphi), \quad \dot{\varphi} = \rho^{z-1} \sum_{\ell} (\alpha_\ell \sin n\ell\varphi + \beta_\ell \cos n\ell\varphi). \quad (9')$$

Поведение траекторий системы (9') зависит от наличия и взаимного расположения нулей функций

$$P(n\varphi) = \sum_{\ell} (\alpha_\ell \cos n\ell\varphi - \beta_\ell \sin n\ell\varphi)$$

и

$$Q(n\varphi) = \sum_{\ell} (\alpha_\ell \sin n\ell\varphi + \beta_\ell \cos n\ell\varphi)$$

и в общем случае может быть чрезвычайно разнообразным. Однако в наиболее важном случае, когда

$z = n - 1$ и когда, следовательно, система (9') имеет вид:

$$\dot{\rho} = \alpha_0 \rho^{n-1} + (\alpha_{-1} \cos n\varphi + \beta_{-1} \sin n\varphi) \rho^{n-1}, \quad \dot{\varphi} = \beta_0 \rho^{n-2} + (-\alpha_{-1} \sin n\varphi + \beta_{-1} \cos n\varphi) \rho^{n-2}, \quad (9'')$$

все возможные случаи значительно упрощаются и могут быть разделены на следующие.

I. $\beta_0^2 < \alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2$.

В этом случае уравнение $\beta_0 - \alpha_{-1} \sin n\varphi + \beta_{-1} \cos n\varphi = 0$ имеет на отрезке $[0, 2\pi]$ $2n$ корней вида: $\bar{\varphi}_\kappa = \bar{\varphi}_1 + \frac{2\pi}{n}(\kappa-1)$, $\bar{\varphi}_\kappa = \bar{\varphi}_1 + \frac{2\pi}{n}(\kappa-1)$,

где $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_1$ заключены между нулем и $\frac{2\pi}{n}$, а $\kappa = 1, \dots, n$. Следовательно, в этом случае система (9^а) имеет $2n$ решений вида: $\bar{\varphi}_\kappa = \bar{\varphi}_1 + \frac{2\pi}{n}(\kappa-1)$, $\bar{f}_\kappa = \bar{f}_1(t)$ и $\bar{\varphi}_\kappa = \bar{\varphi}_1 + \frac{2\pi}{n}(\kappa-1)$, $\bar{f}_\kappa = \bar{f}_1(t)$, где $\bar{f}_1(t)$ и $\bar{f}_1(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\dot{\bar{f}}_1 = (\alpha_0 + \sqrt{\alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2 - \beta_0^2}) \bar{f}_1^{n-1}, \quad \dot{\bar{f}}_1 = (\alpha_0 - \sqrt{\alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2 - \beta_0^2}) \bar{f}_1^{n-1}.$$

В зависимости от знака выражения $\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2$ величины $\alpha_0 + \sqrt{\alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2 - \beta_0^2}$ и $\alpha_0 - \sqrt{\alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2 - \beta_0^2}$ будут иметь либо одинаковые, либо разные знаки. В том случае, когда $\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2 < 0$, знаки величин $\alpha_0 + \sqrt{\alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2 - \beta_0^2}$ и $\alpha_0 - \sqrt{\alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2 - \beta_0^2}$ будут разными и, следовательно, расположение траекторий системы (9^а) будет иметь вид, изображенный на рис. 1.

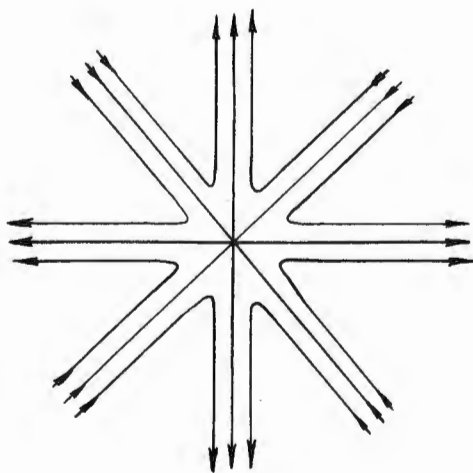


Рис. 1

В этом случае мы будем говорить, что имеет место сильный резонанс.

В том случае, когда $\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2 > 0$, расположение траекторий системы (9^а) будет зависеть от знака α_0 и знака выражения $\alpha_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2$. Нетрудно убедиться, что при $\alpha_0 < 0$ расположение траекторий имеет вид, изображенный на рис. 2, если $\alpha_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2 > 0$ и на рис. 3, если $\alpha_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2 < 0$. Случай $\alpha_0 > 0$ получается путем замены на рисунках 2 и 3 направления стрелок на обратное.

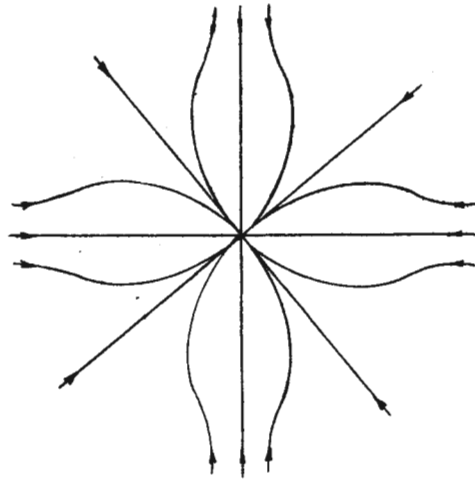


Рис. 2

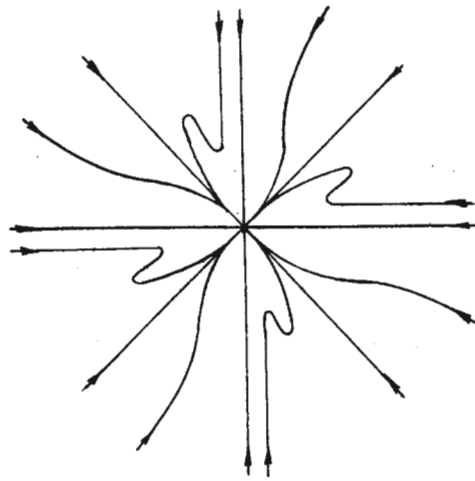


Рис. 3

П. $\beta_0^2 > \alpha_{-1}^2 + \beta_{-1}^2$.

В этом случае расположение траекторий системы (9^н) зависит от знаков α_0 и β_0 и представляет устойчивый фокус, если $\alpha_0 < 0$, неустойчивый фокус, если $\alpha_0 > 0$, и центр, если $\alpha_0 = 0$.
Случай $\beta_0 > 0$ изображен на рисунках 4-6; случай $\beta_0 < 0$ получается с помощью зеркального отражения с рисунков 4-6.

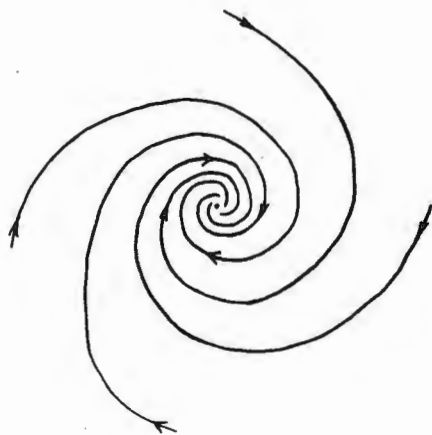


Рис. 4

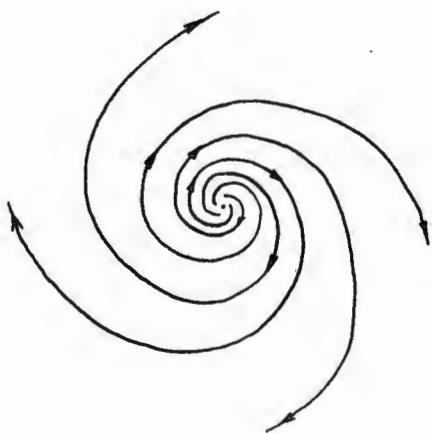


Рис. 5

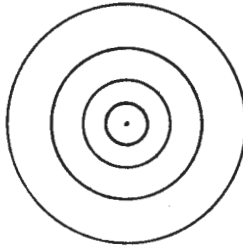


Рис. 6

Необходимо отметить, что в том случае, когда система (I) обладает интегральным инвариантом, полученная для нее система (9ⁿ) будет обладать аналитическим первым интегралом и количество возможных для нее случаев поведения траекторий резко сокращается. Применительно к случаю $z = n - 1$ это означает, что в системе (9ⁿ) $\alpha_0 = 0$ и, следовательно, для таких систем возможны только случаи, указанные на рис. I и 6. Далее, в том случае, когда $z = n - 1$ и n - нечетно, как уже отмечалось выше $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, и, следовательно, расположение траекторий системы (9ⁿ) имеет вид, указанный на рис. I, независимо от того, какой была исходная система (I).

Переходя от системы (9ⁿ) к системе (9), нетрудно показать^{/2/}, что случаи, изображенные на рис. I-5, будут грубыми, т.е. качественное расположение траекторий системы (9) в достаточно малой окрестности начала координат будет определяться членами до $n - 1$ степени и не зависит от членов более высокой степени. Однако от членов более высокой степени будет зависеть размер и форма области, в которой поведение траекторий системы (9) будет совпадать качественно с поведением траекторий системы (9ⁿ). В случае, изображенном на рис. 6, поведение траекторий системы (9) не определяется полностью членами степени меньшей n и зависит от членов более высокой степени. Более подробно этот случай будет рассмотрен во второй части статьи.

Выясним теперь, каково поведение траекторий системы (I) при значениях ω , близких к резонансным. С этой целью рассмотрим вместо системы (7) систему ей близкую:

$$\dot{\xi} = -i\left(\frac{m}{n} + \Delta\omega\right)\xi + \sum_{k=0}^z p_k(t)\xi^{z-k}\bar{\xi}^k + \dots, \quad \dot{\bar{\xi}} = i\left(\frac{m}{n} + \Delta\omega\right)\bar{\xi} + \sum_{k=0}^z \overline{p_k(t)}\bar{\xi}^k \xi^{z-k} + \dots, \quad (10)$$

где $|\Delta\omega| < \frac{1}{z+1}$, $z \gg n-1$, а точками обозначены члены более высокой степени, чем z . Тогда совершая над системой (I0) преобразования, аналогичные тем, которые применялись при преобразовании системы (7), получим систему:

$$\dot{\zeta} = \zeta^z \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} \cos n\ell\varphi - \beta_{\ell} \sin n\ell\varphi) + \dots, \quad \dot{\varphi} = -\Delta\omega + \zeta^{z-1} \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} \sin n\ell\varphi + \beta_{\ell} \cos n\ell\varphi) + \dots, \quad (II)$$

где суммирование распространяется по тем же самым значениям ℓ , что и в системе (9). Системе (II) соответствует укороченная система:

$$\dot{\zeta} = \zeta^z \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} \cos n\ell\varphi - \beta_{\ell} \sin n\ell\varphi), \quad \dot{\varphi} = -\Delta\omega + \zeta^{z-1} \sum_{\ell} (\alpha_{\ell} \sin n\ell\varphi + \beta_{\ell} \cos n\ell\varphi), \quad (II')$$

при исследовании которой мы как и раньше ограничимся случаем $z = n-1$. Таким образом, задача свелась к исследованию системы:

$$\dot{\zeta} = \alpha_0 \zeta^{n-1} + (\alpha_{-1} \cos n\varphi + \beta_{-1} \sin n\varphi) \zeta^{n-1}, \quad \dot{\varphi} = -\Delta\omega + \beta_0 \zeta^{n-2} + (-\alpha_{-1} \sin n\varphi + \beta_{-1} \cos n\varphi) \zeta^{n-2}, \quad (II'')$$

при исследовании которой мы ограничимся случаем сильного резонанса, т.е. будем предполагать, что $\alpha_0^2 + \beta_0^2 - \alpha_{-1}^2 - \beta_{-1}^2 < 0$. Тогда, очевидно, расположение траекторий системы (II'') будет зависеть от знаков α_0 и $\Delta\omega$. При $\Delta\omega > 0$ расположение траекторий системы (II'') будет иметь вид, изображенный на рис. 7, если $\alpha_0 < 0$, на рис. 8, если $\alpha_0 > 0$ и, наконец, на рис. 9, если $\alpha_0 = 0$.

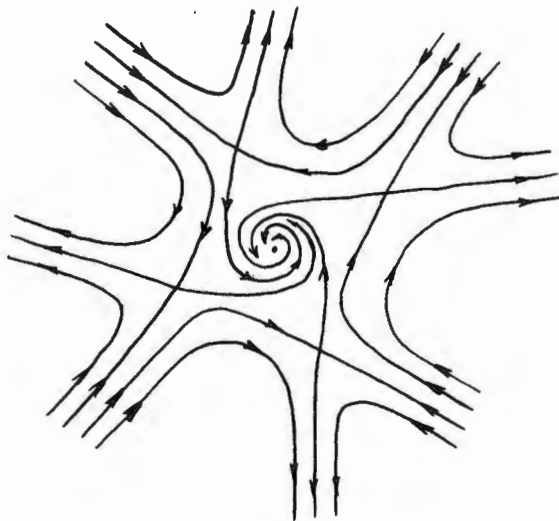


Рис. 7

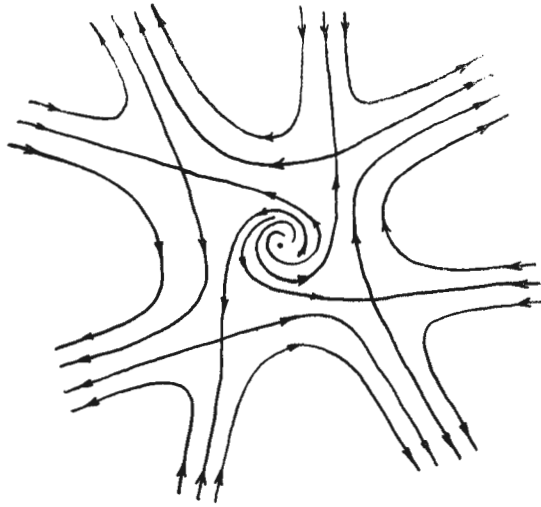


Рис. 8

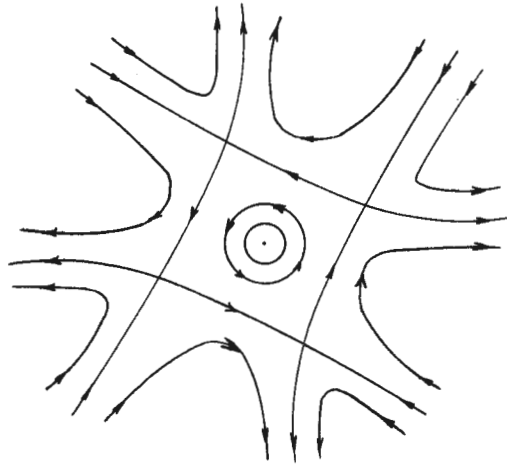


Рис. 9

Соответствующие картины для случая $\Delta\omega < 0$ получаются с помощью зеркального отражения с рис. 7, если $\alpha_0 < 0$, с рис. 8, если $\alpha_0 > 0$, и, наконец, с рис. 9, если $\alpha_0 = 0$. Они будут повернуты относительно исходных рисунков на угол, равный $\frac{\pi}{n}$, а движение внутри n -угольника будет происходить в обратном направлении.

Переходя от системы (II^{*}) к системе (II), мы должны выяснить связь между поведением траекторий системы (II) и системы (II^{*}) в рассмотренном нами случае. Ограничиваясь случаем $z = n-1$, сделаем в системе (II) замену: $\rho = \mu u$, $\varphi = \nu$ и $t = \mu^{2-n} \tau$. После замены получим:

$$\frac{du}{d\tau} = \alpha_0 u^{n-1} + (\alpha_{-1} \cos n\nu + \beta_{-1} \sin n\nu) u^{n-1} + \mu F(u, \nu, \mu^{2-n} \tau, \mu), \quad (12)$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = \pm 1 + \beta_0 u^{n-2} + (-\alpha_{-1} \sin n\nu + \beta_{-1} \cos n\nu) u^{n-2} + \mu G(u, \nu, \mu^{2-n} \tau, \mu),$$

где $\mu = \sqrt[n-2]{|\Delta\omega|}$, а функции $F(u, \nu, \theta, \mu)$ и $G(u, \nu, \theta, \mu)$ аналитические по u , ν , θ и μ , периодические по ν с периодом 2π , и по θ с периодом $2n\pi$. Мы, очевидно, должны выяснить, как будут вести себя сепаратрисы системы (12) при малых $\mu \neq 0$, т.е. малых $\Delta\omega \neq 0$. Для решения этой задачи мы можем воспользоваться результатами заметок^[3-4]. Из этих результатов следует, что случаи, изображенные на рисунках 7 и 8 будут грубыми, т.е. в этих случаях найдется такое $\delta_0 > 0$, что при $|\Delta\omega| < \delta_0$ поведение сепаратрис системы (II) и системы (II^{*}) будет совпадать. Наоборот, случай, изображенный на рис. 9 будет негрубым. Поведение сепаратрисы в этом случае зависит от членов степени большей, чем $n-1$, и может быть таким же, как на рисунках 7-9, или иметь вид, изображенный на рис. 10.

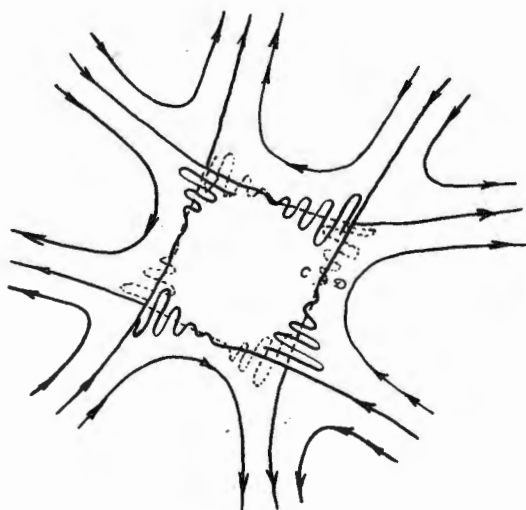


Рис.10

Необходимо отметить, что в том случае, когда система (I) обладает интегральным инвариантом, полученная для нее система (II^{*}) будет иметь $\alpha_0 = 0$ и, следовательно, для системы (II^{*}) в этом случае возможно только расположение сепаратрисы, указанное на рис. 9. Для системы (I2) в этом случае возможно только расположение, указанное на рис. 9 и 10, причем, расположение, указанное на рис. 10 будет более типичным в том смысле, что для того, чтобы расположение сепаратрисы имело вид, указанный на рис. 9, функции $f(x, y, t)$ и $g(x, y, t)$, входящие в систему (I), должны удовлетворять некоторому бесконечному числу функциональных условий. С другой стороны в этом случае, как это уже отмечалось в заметке^{15/}, величина отрезка CD , характеризующая максимальное отклонение соответствующих ветвей сепаратрисы друг от друга, имеет порядок $e^{-\frac{\alpha}{|\Delta\omega|}}$, где $\alpha > 0$. Этот факт приводит к тому, что при исследовании некоторых задач этим явлением можно пренебречь и считать, что $|CD| = 0$. Однако это можно делать только в тех случаях, когда $e^{-\frac{\alpha}{|\Delta\omega|}} \ll 1$, т.е. при $\Delta\omega$ достаточно малых. Например, при исследовании прохождения через резонанс такое упрощение справедливо, если только скорость прохождения через резонанс v удовлетворяет неравенству $v \gg |\Delta\omega| e^{-\frac{\alpha}{|\Delta\omega|}}$.

§ 3. Устойчивость радиальных колебаний в циклотроне с пространственной вариацией магнитного поля.

Результаты предыдущего параграфа дают возможность рассмотреть вопрос об устойчивости радиальных колебаний в циклотроне с пространственной вариацией магнитного поля.

Как известно, уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле \vec{H} в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{z} - r\dot{\varphi}^2 &= \frac{e}{mc} (r\dot{\varphi} H_z - \dot{z} H_\varphi), \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} &= \frac{e}{mc} (\dot{z} H_r - \dot{z} H_z), \\ \ddot{z} &= \frac{e}{mc} (\dot{z} H_\varphi - r\dot{\varphi} H_r). \end{aligned} \quad (I)$$

Предположим, что при $Z = 0$ $H_r = H_\varphi \equiv 0$. Тогда, очевидно, движение в плоскости $Z = 0$ будет описываться более простой системой уравнений:

$$\ddot{z} - r\dot{\varphi}^2 = \frac{e}{mc} r\dot{\varphi} H_0, \quad r\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} = -\frac{e}{mc} \dot{z} H_0, \quad (II)$$

где $H_0 = H_0(z, \varphi) = H_z(z, \varphi, 0)$. Выбирая в системе (II) в качестве независимой переменной φ , получим в результате элементарных преобразований:

$$z'' - 2\frac{z'}{z}z' - z = \frac{e}{mc} \frac{z^2 + z'^2}{\omega z} H_0, \quad \omega' + 2\frac{z'}{z}\omega = -\frac{e}{mc} \frac{z'}{z} H_0, \quad (III)$$

где $\omega = \dot{\varphi}$, а штрихами обозначены производные по φ .

Так как при движении частицы в магнитном поле ее полная скорость сохраняется, то величина $v^2 = (z^2 + z'^2)\omega^2$ будет первым интегралом системы (III). Далее нетрудно убедиться, что система (III) обладает

интегральным инвариантом. Действительно, как известно^{/2/}, функция $M(z, z', \varphi, \omega) \geq 0$ будет интегральным инвариантом системы (III), если она удовлетворяет уравнению:

$$z' \frac{\partial M}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\left(2 \frac{z'^2}{z} + z + \frac{e}{mc} \frac{z^2 + z'^2}{\omega z} H_0 \right) M \right] + \frac{\partial M}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\partial \omega} \left[\left(2 \frac{z'}{z} \omega + \frac{e}{mc} \frac{z'}{z} H_0 \right) M \right] = 0.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что $M(z, z', \varphi, \omega) = z^2 \omega^2$ удовлетворяет приведенному выше уравнению. Таким образом, фиксируя величину полной скорости частицы, мы с помощью соотношения $v^2 = (z^2 + z'^2) \omega^2 = \text{const}$. сведем нашу первоначальную задачу к исследованию следующего дифференциального уравнения:

$$z'' - 2 \frac{z'^2}{z} - z = \frac{e}{mc} \frac{(z^2 + z'^2)^{3/2}}{z v} H_0. \quad (IV)$$

Из того факта, что система (III) обладает интегральным инвариантом, на основании общих теорем следует, что движение в плоскости (z, z') , описываемое уравнением (IV) также будет обладать интегральным инвариантом. Он находится из следующих геометрических соображений. Пусть поверхность S определяется уравнением $(z^2 + z'^2) \omega^2 = v^2 = \text{const}$. Тогда интегральный инвариант на S задается выражением

$$M = \frac{M}{|g \text{rad} v^2|}.$$

Интегральный инвариант на S индуцирует интегральный инвариант в плоскости (z, z') по формуле $m = \frac{M}{\cos \varphi}$, где φ - угол между осью ω и нормально к поверхности S в рассматриваемой точке. Очевидно, что $\cos \varphi = \frac{\partial v^2}{\partial \omega}$. Следовательно, $m(z, z') = \frac{M(z, z', \varphi, \omega)}{\frac{\partial v^2}{\partial \omega}}$

при $\omega = \frac{v}{(z^2 + z'^2)^{1/2}}$, т.е. $m(z, z') = \frac{v}{2} \frac{z^2}{(z^2 + z'^2)^{3/2}}$.

Пусть теперь^{/6/} $H_0(z, \varphi) = \frac{H_0}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{z_\infty^2}}} \left(1 + \varepsilon \sin \left(\frac{z}{\lambda} - N\varphi \right) \right)$.

Подставляя выражение для $H_0(z, \varphi)$ в (IV), получим следующее уравнение:

$$z'' - 2 \frac{z'^2}{z} - z = \frac{e H_0}{m v c} \frac{(z^2 + z'^2)^{3/2}}{z \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_\infty^2}}} \left(1 + \varepsilon \sin \left(\frac{z}{\lambda} - N\varphi \right) \right),$$

которое после замены $z = z_\infty x$ примет вид:

$$\ddot{x} - 2 \frac{\dot{x}^2}{x} - x = -\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(x^2 + \dot{x}^2)^{3/2}}{x(1-x^2)^{1/2}} \left(1 + \varepsilon \sin \left(\frac{z_\infty}{\lambda} x - N\varphi \right) \right), \quad (V)$$

где $\sqrt{n} = -\frac{m v c}{e H_0 z_\infty}$, а точками обозначены производные по φ .

При $\varepsilon = 0$ уравнение (V) имеет положение равновесия типа центр $x_c = \sqrt{\frac{n}{1+n}}$. Используя теорему Пуанкаре^{/7/}, получаем, что при $\varepsilon \neq 0$ уравнение (V) имеет периодическое с периодом $\frac{2\pi}{N}$ решение $x_c(\varphi, \varepsilon)$, которое аналитически зависит от ε и при $\varepsilon = 0$ обращается в

$x_c = \sqrt{\frac{n}{1+n}}$, если $\cos \frac{2\pi\sqrt{1+n}}{N} \neq 1$, т.е. $\frac{\sqrt{1+n}}{N}$ не есть целое число, например, при $0 < \frac{1+n}{N^2} < 1$. Сделаем теперь в уравнении (V) замену: $x = x_c(\varphi, \varepsilon) + \xi$, $\dot{x} = \dot{x}_c(\varphi, \varepsilon) + \dot{\xi}$,

где $x_c(\varphi, \varepsilon)$ — это указанное выше периодическое решение. После замены уравнение (У) примет вид:

$$\ddot{\xi} + \varepsilon p(\varphi, \varepsilon) \dot{\xi} + [1 + n + \varepsilon q(\varphi, \varepsilon)] \xi = f(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \varepsilon), \quad (VI)$$

где функции $p(\varphi, \varepsilon)$ и $q(\varphi, \varepsilon)$ — аналитические по φ и ε и периодические по φ с периодом $\frac{2\pi}{N}$, а функция $f(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \varepsilon)$ — аналитическая по ξ , $\dot{\xi}$, φ и ε и периодическая по φ с тем же самым периодом $\frac{2\pi}{N}$, причем разложение функции $f(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \varepsilon)$ в ряд по степеням ξ и $\dot{\xi}$ не содержит членов ниже второй степени. Из того факта, что уравнение (У) обладает интегральным инвариантом легко следует, что $\int_0^{2\pi} p(\varphi, \varepsilon) d\varphi \equiv 0$. Следовательно, функция $m(\varphi, \varepsilon) = \exp(\varepsilon \int_0^\varphi p(\theta, \varepsilon) d\theta)$ будет периодической с периодом $\frac{2\pi}{N}$ функцией φ . Очевидно, что $m(\varphi, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \tilde{m}(\varphi, \varepsilon)$. Умножив уравнение (VI) на $m(\varphi, \varepsilon)$ получим уравнение:

$$\frac{d}{d\varphi} [m(\varphi, \varepsilon) \dot{\xi}] + [1 + n + \varepsilon r(\varphi, \varepsilon)] \xi = F(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \varepsilon), \quad (VII)$$

где $r(\varphi, \varepsilon) = q(\varphi, \varepsilon) + (1+n) \tilde{m}(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon q(\varphi, \varepsilon) \tilde{m}(\varphi, \varepsilon)$, а $F(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \varepsilon) = m(\varphi, \varepsilon) f(\xi, \dot{\xi}, \varphi, \varepsilon)$.

Рассмотрим сначала соответствующее линейное уравнение:

$$\frac{d}{d\varphi} [m(\varphi, \varepsilon) \dot{\xi}] + [1 + n + \varepsilon r(\varphi, \varepsilon)] \xi = 0. \quad (VIII)$$

Характер решений уравнения (VIII), как известно, зависит от корней характеристического уравнения, которое для уравнения (VIII) имеет вид: $\rho^2 + 2A(\varepsilon)\rho + 1 = 0$, где $A(\varepsilon)$ — аналитическая функция ε . Путем элементарных вычислений нетрудно показать, что $A(\varepsilon)$ имеет вид:

$$A(\varepsilon) = \cos \frac{2\pi(1+n)}{N} + \varepsilon \dots$$

Таким образом, в том случае, когда $\frac{1+n}{N}$ не есть целое число, например, при $0 < \frac{1+n}{N^2} < 1$ корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными и равными по модулю единице, если ε достаточно мало. Это означает, что существует замена переменных вида:

$$\xi = p_{11}(\varphi, \varepsilon) \eta + p_{12}(\varphi, \varepsilon) \dot{\eta}, \quad \dot{\xi} = p_{21}(\varphi, \varepsilon) \eta + p_{22}(\varphi, \varepsilon) \dot{\eta},$$

где $p_{ij}(\varphi, \varepsilon)$ ($i, j = 1, 2$) — аналитические функции φ и ε , периодические по φ с периодом $\frac{2\pi}{N}$, такая, что в новых переменных уравнение (VIII) будет иметь вид: $\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$.

Это означает, что в новых переменных уравнение (VII) будет иметь вид:

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = G(\eta, \dot{\eta}, \varphi, \varepsilon), \quad (IX)$$

где функция $G(\eta, \dot{\eta}, \varphi, \varepsilon)$ — аналитическая по всем переменным и периодическая по φ с периодом $\frac{2\pi}{N}$; разложение этой функции в ряд по степеням η и $\dot{\eta}$ не содержит членов ниже второй степени. Полагая, наконец, $\eta = X$, $\dot{\eta} = \omega Y$, получим:

$$\dot{x} = \omega y, \quad \dot{y} = -\omega x + g(x, y, \varphi, \varepsilon).$$

Система (X), очевидно, является частным случаем системы (I) и, следовательно, для ее изучения мы можем воспользоваться общей теорией, изложенной выше.

Путем непосредственного вычисления нетрудно показать, что $\omega^2 = 1 + n + \varepsilon \dots$. Таким образом, при значениях n , близких к значениям n , определяемым из уравнения $\sqrt{1+n} = \frac{p}{q} N$ (p и q - взаимно-простые целые числа), в системе (X) возможны резонансные явления. Так как в процессе ускорения n изменяется от нуля до $n_{\max} < 3$, то интерес могут представить только резонансы с $q > \frac{pN}{2}$. Так как с другой стороны с ростом q резонансы слабеют, то на основании неравенства $q > \frac{pN}{2}$ следует, что наиболее опасными будут резонансы с $p=1$. Для $N=6$ таким будет резонанс с $q=4$, а для $N=8$ с $q=5$. Непосредственное вычисление показывает, что при приведении членов 3-ей степени в системе (X) к каноническому виду соответствующий коэффициент $C_1(\varepsilon)$ обращается в нуль при $\varepsilon = 0$. Так как система (X) обладает интегральным инвариантом, то условие $C_1(\varepsilon) = 0$ является достаточным для того, чтобы резонансы с $N=6, p=1, q=4$ и с $N=8, p=1, q=5$ были сильными, т.е. при $n = n_{\text{рез}}$ должна иметь место картина, изображенная на рис. I, а при n близких к $n_{\text{рез}}$, картина, изображенная на рис. IO (или, что заранее менее вероятно, картина, изображенная на рис. 9). Это было проверено путем непосредственного интегрирования уравнения (Y) на электронной счетной машине. Результаты вычислений показали полное совпадение между поведением траекторий уравнения (Y) и качественной картиной сильного резонанса, описанной в § 2. Результаты вычислений позволили найти точное значение $n_{\text{рез}}$ и найти ширину резонанса (под шириной резонанса здесь понимается интервал значений n , при которых изображенный на рис. 9 четырехугольник имеет размеры меньше наперед заданных).

Вычисления на электронной счетной машине были выполнены Н.И.Полумордвиновой. Пользуясь случаем выразить ей свою благодарность.

Л и т е р а т у р а :

1. Н.Н.Боголюбов и Д.А.Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958 г.
2. В.В.Немыцкий и В.В.Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949 г.
3. В.Мельников, Об определении области захвата для системы, близкой к гамильтоновой, ДАН СССР, 139, № 1 (1961), 31-33.
4. В.Мельников, О поведении траекторий системы, близкой к автономной гамильтоновой системе, ДАН СССР, 142, № 3 (1962), 542-545.
5. В.К.Мельников, О силовых линиях магнитного поля, ДАН СССР, 144, № 4 (1962), 747-750.
6. V.I.Danilov, Yu.N.Denisov, V.P.Dmitrievskij, V.P.Dzheleпов, A.A.Glasov, V.V.Kol'ga, A.A.Kropin, Lu Ne-chuan, V.S.Pybalko, L.A.Sarkisyan, A.L.Savenkov, B.I.Zamolodchikov, N.L.Zaplatin and D.P.Vasilevskaya, Cyclotron with Space Variation of the Magnetic Field, Proceedings of the Intern. Conf. of High Energy Accelerators and Instrumentation, CERN, 1959, 2II-225.
7. H.Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t.I, Paris, 1892.