ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

А.А. Логунов

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

Дубна, 1959 год

А.А. Логунов

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

x x

x

ВВЕДЕНИЕ

Успешное развитие квантовой электродинамики в 1947-1951 гг. было возможно благодаря разработке метода теории возмущений. В последующий период были предприняты многочисленные попытки создать теорию мезон-нуклонных явлений. Вначале предполагалось, что можно, исходя из основных уравнений полевой теории, получить формулы, описывающие процессы с сильным взаимодействием. Однако эти надежды не оправдались, так как на этом пути встали непреодолимые трудности.

Так, попытки распространить метод теории возмущений на описание процессов с сильным взаимодействием оказались неудачными из-за большой константы связи, методы Тамма-Данкова не привели к цели, поскольку для них не удалось создать необходимого алгоритма для удаления расходимостей.

Возникла довольно сложная ситуация, когда казалось, что теория сильных взаимодействий, основывающаяся на современных представлениях, зашла в тупик.

В этих условиях вместо общей задачи описания процессов с сильным взаимодействием была поставлена более скромная задача установления связей между различными физическими процессами/I,II/. Исследования в этом направлении исходят лишь из основных принципов современной квантовой теории поля, таких как ковариантность, унитарность, причинность и спектральные условия. Это позволило освободиться от таких нефизических понятий как "голые" частицы, "затравочная" масса, "затравочный" заряд и т.д.

В результате этих исследований удалось получить так называемые дисперсионные соотношения, которые устанавливают связь между физическими величинами.

В начальный период развития метода дисперсионных соотношений большое внимание было уделено процессу мезон-нуклонного рассеяния/27-29/. Дисперсионные соотношения для этого процесса могут быть использованы как для проверки фундаментального принципа современной теории - свойства локальности, так и для построения приближенной системы уравнений для амплитуды процесса. Возможность их применения для проверки свойства локальности вытекает из следующих двух обстоятельств.

/1/ M.L.Goldberger, Phys.Rev., 99 (1955) 979-985.
/11/ M.Gell-Mann, M.L.Goldberger and W.E.Thirring, Phys.Rev., 95 (1954) 1612-1627.
/27/ M.L.Goldberger, H.Miyazawa, R.Oehme, Phys.Rev., 99 (1955) 986.
/28/ R.Oehme, Phys.Rev., 100 (1955) 1503.
/29/ R.Oehme, Phys.Rev., 102 (1956) 1174.

Во-первых, поскольку этот процесс упругий, антиэрмитова часть для рассеяния вперед в силу оптической теоремы может быть выражена через полное сечение рассеяния.

Во-вторых, для рассеяния вперед дисперсионные соотношения не содержат ненаблюдаемой области энергии. Оба обстоятельства приводят к тому, что дисперсионные соотношения для рассеяния π -мезонов на нуклонах связывают только наблюдаемые величины. Проверка этих соотношений могла бы указать на возможные нарушения основных принципов теории, если бы было установлено, что они являются следствиями этих принципов. В связи с этим важное значение приобретают строгие доказательства дисперсионных соотношений. Получение дисперсионных соотношений основывается на свойствах аналитичности амплитуд рассеяния, которые являются, вообще говоря, обобщенными функциями в смысле Соболева-Шварца/2/x). Установление свойств аналитичности амплитуд рассеяния приводило к ряду математических трудностей, в связи с чем дисперсионные соотношения некоторое время не были доказаны.

В 1956 году Н.Н.Боголюбов[xx)], опираясь на теорию обобщенных функций и теорию функций многих комплексных переменных, впервые разработал метод, позволяющий строго доказывать дисперсионные соотношения. Этим путем он доказал дисперсионные соотношения для мезон-нуклонного рассеяния. При этом им было установлено, что дисперсионные соотношения являются следствием лишь общих принципов современной теории. После исследований по обоснованию дисперсионных соотношений для мезон-нуклонного рассеяния важное значение приобрели работы по их проверке.

В настоящее время установлено, что дисперсионные соотношения для мезон-нуклонного рассеяния не противоречат экспериментальным данным. Дальнейшее экспериментальное исследование процесса рассеяния π -мезонов на нуклонах в области больших энергий могут пролить свет на возможное существование элементарной длины. Применение дисперсионных соотношений π -мезонов на нуклонах для получения системы приближенных уравнений было рассмотрено в работах/30,31,33/. Показано, что эти уравнения удовлетворительно описывают указанное явление в области энергий до 300-400 Мэв. Наряду с процессом мезон-нуклонного рассеяния важное значение для проверки свойства локальности имеет процесс комптоновского рассеяния на нуклонах. Следует отметить, что в отличие от мезон-

---

x) Обобщенной функцией мы называем всякий линейный непрерывный функционал над пространством S Шварца/2a/ или, что одно и то же, на введенных Боголюбовым классах $C(p,q;n)$ (см., например/3/).

xx) Доклад на Международном съезде физиков-теоретиков в Сиэттле, США (сентябрь 1956 г.); см. также работу Боголюбова, Медведева и Поливанова/4/.

/2/ С.Л.Соболев, Математический сборник I (43) (1936) 39-72.

/2a/ L.Schwartz, Theorie des distributions, 1-2, Paris, 1950, 1951.

/3/ Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, УФН 55 (1955) 149-214; 57 (1955) I-92 (I,II).

/4/ Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений" Гостехиздат, Москва (1958).

/30/ R.H.Capps, G.Takeda, Phys.Rev., 103 (1956) 1877-1896.

/31/ G.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low and Y.Nambu "Application of Dispersion Relations to Low-Energy Meson-Nucleon Scattering", Phys.Rev., v.106 (1957) 1337-1344.

/33/ В.Л.Жукин и А.Р.Френкин, Научные доклады высшей школы, № I (1958) 7I-79.

нуклонного рассеяния, для которого дисперсионные соотношения не содержат ненаблюдаемой области лишь при рассеянии вперед, для комптоновского рассеяния они не содержат ее и при некоторых конечных передачах импульса нуклону. Использование этих соотношений для описания процесса комптоновского рассеяния было рассмотрено в работах/34,35/. Как и в случае мезон-нуклонного рассеяния здесь могут быть получены приближенные уравнения для амплитуды комптон-эффекта, которые позволяют дать удовлетворительную теорию данного явления.

В дальнейшем метод дисперсионных соотношений начал применяться к исследованию неупругих процессов. Здесь следует отметить работы/16-19,36-38/, в которых с помощью метода дисперсионных соотношений изучались процессы фоторождения π-мезонов на нуклонах. Эти исследования позволили дать теорию фоторождения в области энергий до 300—400 Мэв.

В последующем метод дисперсионных соотношений был распространен на изучение виртуальных процессов/15/. Это дало возможность изучить неупругие процессы с сильным и электромагнитным взаимодействием. Простейшим процессом такого типа является рождение π-мезонов в электрон-нуклонных столкновениях. Применение дисперсионных соотношений к его изучению см. в работах/39-41/. В настоящее время рассмотрение таких процессов находится в стадии разработки. Можно с уверенностью сказать, что метод дисперсионных соотношений позволит описать и эти реакции. Позднее метод дисперсионных соотношений был использован для изучения процессов со слабым взаимодействием /42,43,52/. Эти работы дали возможность выяснить ряд принципиальных моментов в теории дисперсионных соотношений. В последнее время метод был распространен на изучение неупругих процессов типа/44-50/ ($a+b \rightarrow a'+c+d$). Эти дисперсионные соотношения позволяют исследовать процессы рождения мезонов в мезон-нуклонных столкновениях, фоторождение двух π-мезонов и т.д.

/34/ А.Н.Тавхелидзе и В.К.Федянин, ДАН СССР 119 (1958) 690.
/35/ M.Gell-Mann, P.T.Matthews, Conference at CERN, 1958.
/16/ А.А.Логунов и Б.М.Степанов, ДАН СССР 110 (1956) 368-370.
/17/ А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев и А.Н.Тавхелидзе, Nuclear Physics, 4 (1957) 427-452.
/18/ E.Corinaldesi, Nuovo Cimento, IV (1956) 1384.
/19/ G.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low and Y.Nambu, Phys.Rev., 106 (1957) 1345-1355.
/36/ А.А.Логунов, Б.М.Степанов, А.Н.Тавхелидзе, ДАН СССР 112 (1957) 45.
/37/ А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, ЖЭТФ 32 (1957) 1393-1403.
/38/ Л.Д.Соловьев, Nuclear Physics, 5 (1958) 256-270.
/15/ А.А.Логунов, ДАН СССР 117 (1957) 792-794.
/39/ А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев, В.Д.Кукин, А.Р.Френкин, препринт ОИЯИ, Р-161 (1958).
/40/ А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев, Научные доклады высшей школы (в печати) Nuclear Physics,9 (1958).
/41/ В.Д.Кукин, Л.Д.Соловьев, А.Р.Френкин, Научные доклады высшей школы (в печати, 1958).
/42/ Н.Н.Боголюбов, С.М.Биленький, А.А.Логунов, ДАН СССР 115 (1957) 891-893.
/43/ N.N.Bogolubov, S.M.Bilenky, A.A.Logunov, Nuclear Physics, 5 (1957) 383.
/52/ С.М.Биленький, кандидатская диссертация, ОИЯИ (1958).
/44/ А.А.Логунов, ДАН СССР 120 (1958) 501.
/45/ А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, ДАН СССР 120 (1958) 739.
/46/ А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, Nuclear Physics 8 (1958) 374.
/47/ A.A.Logunov, A.N.Tawchelidse und N.A.Tschernikov,
Zeitschrift für Naturforschung, 13a, 8 (1958) 642-644.
/48/А.А. Логунов и А.Н.Тавхелидзе, Научные доклады высшей школы, 3 (1958);Nuovo Cim. (в печати).

Кроме перечисленных выше работ, в которых метод дисперсионных соотношений был распространен на широкий круг физических процессов, следует отметить работы, использующие его для описания некоторых процессов распада/53-55/, изучения структуры нуклона/56,57/, описания процессов с участием странных частиц/58-61/ и т.д. Даже из краткого перечисления применений дисперсионных соотношений видно, что метод дисперсионных соотношений находит все большее и большее применение в изучении процессов с сильным взаимодействием. Следует подчеркнуть, что каждое новое расширение метода дисперсионных соотношений требует строгого их обоснования. По-существу дисперсионные соотношения должны доказываться для каждого вновь рассматриваемого процесса. Доказательство дисперсионных соотношений особенно необходимо в тех случаях, когда они позволяют дать теорию того или иного процесса.

Остановимся коротко на описании метода дисперсионных соотношений. Для целей построения дисперсионных соотношений амплитуда процесса делится на две части, из которых одна является эрмитовой, другая антиэрмитовой. Антиэрмитова часть амплитуды в силу условия унитарности может быть разложена по реальным состояниям оператора энергии-импульса, тогда как эрмитова часть разлагается лишь по виртуальным состояниям. Исходя из принципов ковариантности, локальности и спектральных условий, можно установить связь между эрмитовой и антиэрмитовой частями амплитуды. Установление этой связи является сложной задачей, так как требует детального изучения аналитических свойств обобщенных функций, и, как мы увидим ниже, не всегда является возможным.

Дисперсионные соотношения (как мы видели) служат основой при получении приближенных уравнений для амплитуд процессов. Такие приближенные уравнения возникают, если мы оборвем разложение по полной системе на тех или иных физических состояниях. Этот обрыв определяется интервалом энергий и теми процессами, которые мы изучаем. Так, например, для изучения процессов комптон-эффекта, мезон-нуклонного рассеяния, фоторождения, виртуального фоторождения в области энергий до 300–400 Мэв достаточно учесть только нуклон + π -мезонные состояния. Метод дисперсионных соотношений позволяет в наиболее последовательной форме провести идею Тамма-Данкова об учете конечного числа промежуточных состояний при исследовании процессов с сильным взаимодействием. Эта идея в методе дисперсионных соотношений оказалась перспективной, потому что в нем мы имеем дело лишь с физическими (а не виртуальными) состояниями.

/49/ А.А.Логунов, С.М.Биленький и А.Н.Тавхелидзе, Научные доклады высшей школы, 3 (1958); Nuovo Cimento (в печати).
/50/ А.А.Логунов и И.Т.Тодоров, Научные доклады высшей школы (в печати);Nuclear Phys. (в печати).
/53/ M.L.Goldberger and S.B.Treiman, Nuovo Cimento, v.IX (1958) 451.
/54/ M.L.Goldberger and S.B.Treiman, Phys.Rev., 110 (1958) 1178.
/55/ M.L.Goldberger and S.B.Treiman, Phys.Rev., 111 (1958) 354-361.
/56/ G.F.Chew, R.Karplus, S.Gasiorowicz and Zachariasen, Phys.Rev., 110 (1958) 265.
/57/ J.Bernstein, M.L.Golberger, Revs.Mod.Phys., 30 (1958) 465.
/58/ S.Okubo, Prog.Theor.Phys., 19 (1958) 43-56.
/59/ М.К.Поливанов, ДАН СССР 116 (1957) 943; ДАН СССР 118 (1958) 679.
/60/ P.T.Matthews and A.Salam, Phys.Rev., 110 (1958) 565-568.
/61/ P.T.Matthews and A.Salam, Phys.Rev., 110 (1958) 569-572.

Идея взаимосвязи явлений с сильным взаимодействием в методе дисперсионных соотношений проявляется в том, что при обрыве разложения по полной системе мы получаем систему уравнений для амплитуд процессов, связанных между собой. Если мы изучаем физический процесс в некотором интервале энергий, то в выражении для антиэрмитовой части мы должны учитывать лишь процессы, которые возможны в этом интервале энергий. Такой обрыв разложения по полной системе является законным, поскольку высшие реальные состояния возникают лишь при энергиях, больших энергии порога этих процессов. Но так обстоит дело только с антиэрмитовой частью. Эрмитова часть амплитуды процесса выражается через дисперсионный интеграл от антиэрмитовой части, а, следовательно, даже в области небольших энергий в нее дают вклад физические состояния, возникающие при больших энергиях. Обычно при исследовании приближенных уравнений, получаемых из дисперсионных соотношений, высокоэнергетическая область грубо учитывается введением параметра обрезания.

Такой учет высших состояний не является, конечно, последовательным, однако, можно надеяться, что дальнейшие знания на пути установления связей между физическими процессами позволят внести ясность и в этот, еще мало изученный вопрос.

В последнее время вопросы взаимосвязи получили дальнейшее развитие в работах Чу и Лоу/62,63/. Им удалось показать, что изучение ряда сложных процессов может дать информацию о контактных взаимодействиях элементарных частиц (так, например, изучение процесса рождения мезонов в мезон-нуклонных столкновениях может дать возможность определить константу контактного взаимодействия 4-х пионов).

Идеи о связи сложных и элементарных процессов и ранее высказывались рядом ученых, однако, Чу и Лоу удалось достаточно наглядно показать, что контактные взаимодействия могут привести к появлению полюса в комплексной плоскости Δ^2 (передача импульса) у амплитуды процесса. Предположение о существовании полюса амплитуды процесса пока еще не доказано. Однако, на пути изучения аналитических свойств амплитуды по переменной Δ^2 уже имеются некоторые успехи. Так, например, в работе/9/ были исследованы аналитические свойства амплитуды мезон-нуклонного рассеяния, а в работах/24,26/ аналитические свойства амплитуд виртуальных процессов. В этих работах было установлено, что амплитуда процесса является аналитической функцией Δ^2 внутри некоторого эллипса (см. введение к гл.I). Предположение о существовании полюса в комплексной плоскости не противоречит этим результатам, поскольку полюс лежит или вне эллипса, или на его границе.

Выше мы коротко обрисовали пути использования дисперсионных соотношений. Остановимся те-

---

/62/ G.F.Chew, Conference at CERN, 1958.

/63/ G.F.Chew and F.E.Low, preprint UCRL-8427 (1958).

/9/ H.Lehmann "Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer", preprint (1958).

/24/ R.Oehme and J.G.Taylor "Proof of dispersion relations for the production of pions by real and virtual photons and for related processes", preprint (1958).

/26/ В.С.Владимиров и А.А.Логунов, препринт ОИЯИ, Р-260 (1958); Известия АН СССР (серия матемaт., - в печати).

перь на вопросах, связанных с доказательством дисперсионных соотношений /70/. Как известно, основным средством получения дисперсионных соотношений является теорема Коши, для применения которой необходимо знать свойства аналитичности матричных элементов в комплексной области. Так как матричные элементы являются, вообще говоря, обобщенными функциями, то тем самым возникает задача аналитического продолжения обобщенных функций. Чтобы пояснить сказанное, рассмотрим модель с фиксированным нуклонным источником /64,65/. В этой модели запаздывающая $f_r(t)$ и опережающая $f_a(t)$ амплитуды процесса рассеяния мезона на нуклонах являются обобщенными функциями лишь одного параметра t, причем в силу условий причинности $f_r(t)$ обращается в нуль при $t<0$ и $f_a(t)$ обращается в нуль при $t>0$. Совершенно очевидно, что их Фурье-образы $f_r(E)$ и $f_a(E)$ допускают аналитическое продолжение соответственно в верхнюю или в нижнюю полуплоскость. Если воспользоваться условием спектральности, согласно которому функции $\tilde{f}_j(E)$, $j=r,a$ совпадают в области $|E|<\mu$, то можно установить, что существует единая аналитическая функция $f(z)$, голоморфная во всей плоскости комплексного переменного z за исключением линии разреза

$$-\infty < \operatorname{Re} z \leq -\mu \quad , \quad \mu \leq \operatorname{Re} z < \infty \quad , \quad \operatorname{Im} z = 0$$

В силу обобщенности функций $f_j(t)$ построенная функция $\tilde{f}(z)$ полиноминально ограничена в области, где

$$|\operatorname{Im} z| \geq \delta > 0$$

Обозначая через n степень мажорирующего полинома и применяя теорему Коши, получаем интегральное представление для функции

$$\tilde{f}(z) = \frac{(z-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tilde{f}_r(E') - \tilde{f}_a(E')}{(E'-z)(E'-E_0)^{n+1}}\,dE' + \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\,\tilde{f}^{(m)}(E_0)(z-E_0)^m,$$

Переходя на вещественную ось, из этого представления легко получить дисперсионные соотношения.

В действительности положение значительно более сложно, так как матричные элементы зависят от многих переменных. Так, например, уже в случае функций $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, зависящих от одного 4-вектора $x=(x_0, x_1, \dots x_3)$ и обращающихся в нуль соответственно вне опережающего $x \geq 0$ и запаздывающего $x \leq 0$ световых конусов, мы сталкиваемся со следующей трудностью.

Для того, чтобы доказать дисперсионные соотношения, в этом случае необходимо установить свойства аналитичности в комплексной плоскости E амплитуд:

$$\tilde{\mathcal{F}}_i(E,\vec{e}) = \int e^{i(Ex_0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-\mu^2})}\,\mathcal{F}_i(x)\,dx \quad , \quad |\vec{e}|=1 \; , \quad i=r,a \qquad (0.I)$$

/64/ А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Сообщения АН Груз.ССР, т.ХУШ № I (I957) I9-24 /I/.
/65/ А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе, Сообщения АН Груз.ССР, т.ХУШ № 5 (I957) 533-540 /П/.

Но из приведенного выражении видно, что эти функции могут быть непосредственно аналитически продолжены в соответствующие полуплоскости лишь при нефизическом условии $\mu^2 < 0$. Более того, сами выражения (0.1) определены лишь на участках действительной оси

$$-\infty < E < -\mu \quad , \quad \mu < E < \infty$$

Ввиду этого задача аналитического продолжения этих функций является достаточно сложной.

Впервые теоремы об аналитическом продолжении обобщенных функций были доказаны Н.Н.Боголюбовым. Среди этих теорем важное место занимает теорема типа " *edge of the wedge* ". Доказательство этой теоремы основывается на теории обобщенных функций с использованием различных способов параметризации.

ТЕОРЕМА I

Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_1(x)$ и $\mathcal{F}_2(x)$, обращающиеся в нуль соответственно вне запаздывающего и опережающего световых конусов. Пусть их преобразования Фурье $\widetilde{\mathcal{F}}_i(p)$, $i=1,2$ совпадают в области G_0. Тогда существует функция $\widetilde{\mathcal{F}}(z)$ комплексных переменных $z=(z_0, z_1, \dots z_3)$ голоморфная в некоторой области G, вещественное сечение которой есть G_0, и такая, что при всех вещественных $z=p$ из G_0

$$\widetilde{\mathcal{F}}(p) = \widetilde{\mathcal{F}}_1(p) = \widetilde{\mathcal{F}}_2(p)$$

Приведем несколько примеров конкретного вычисления областей при различных предположениях об областях G_0.

1. Пусть G_0 есть полоса $|p^0| < m$. Тогда G есть совокупность точек $z = p + iq$, удовлетворяющих неравенству

$$|\vec{q}| < |\operatorname{Im} \sqrt{z_0^2 - m^2}|$$

Эта область не допускает дальнейшего аналитического расширения, т.е. является областью голоморфности.

2. G_0 есть внешность гиперболоида:

$$p_0^2 < \vec{p}^{\,2} + m \quad , \quad m \geq 0$$

Тогда G есть все пространство за исключением удаленных точек и аналитической гиперповерхности

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = \rho \quad , \quad m \leq \rho < \infty$$

Следовательно, дальнейшее аналитическое расширение полученной области невозможно. Более того, функция $\widetilde{\mathcal{F}}(z)$ представима в виде:

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{k} \mathcal{P}_k(z)\, \phi_k\left(z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2\right)$$

с конечным числом членов в сумме. В этом представлении $\mathcal{P}_k(z)$ – полиномы, а функции $\phi_k(\omega)$ полиноминально ограничены.

3. Если C_0 есть область

$$c_1 - \sqrt{\gamma_1 \vec{p}^2 + \sigma^2} < p_0 < c_2 + \sqrt{\gamma_2 \vec{p}^2 + \delta^2}\ , \quad \gamma_i \geq 0 .$$

то область C есть совокупность точек $p + iq$, удовлетворяющих условиям: либо $q^2 > 0$, либо при $q^2 \leq 0$

$$c_1 - \sqrt{\gamma_1 e_2(|\vec{p}| - q) + \sigma^2} + |q| < p_0 < c_2 + \sqrt{\gamma_2 e_2(|\vec{p}| - q) + \delta^2} - |q|\ ,$$

где $e_2(\xi)$ при $\xi > 0$ и $e_2(\xi) = 0$ при $\xi < 0$. В этом примере область C фактически шире указанной, но она определяется более сложными условиями (см. например[5]). Эта теорема помимо самостоятельного интереса может играть роль лемм при рассмотрении более сложных случаев. Условия этой теоремы отражают свойства локальности, ковариантности и спектральности. Математическим выражением свойства спектральности является совпадение функций $\widetilde{\mathcal{F}}_i(p)$ в области C_0.

Приведенные результаты позволяют доказать теорему, которая является основной при доказательстве дисперсионных соотношений для упругого рассеяния частиц.

ТЕОРЕМА П

Пусть даны 4 обобщенные функции четырех 4-векторов:

$$\mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4)\ ; \quad i, j = r, a$$

инвариантные относительно преобразований из неоднородной ортохронной группы Лоренца. Предположим, что эти обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathcal{F}_{rr} = 0,\ \text{если}\quad x_1 \lesssim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim x_4$$

$$\mathcal{F}_{ra} = 0,\ \text{если}\quad x_1 \lesssim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim x_4$$

$$\mathcal{F}_{ar} = 0,\ \text{если}\quad x_1 \gtrsim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim x_4$$

$$\mathcal{F}_{aa} = 0,\ \text{если}\quad x_1 \gtrsim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim x_4$$

Предположим далее, что их преобразования Фурье

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1, p_2, p_3, p_4)$$

определенные, очевидно, на многообразии

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \tag{0.2}$$

удовлетворяют условиям:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{rj} = \widetilde{\mathcal{F}}_{aj}\ ,\ \text{если}\quad p_1^2 < (M+\mu)^2 \quad \text{и} \quad p_3^2 < (3\mu)^2\ , \quad j = r, a$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{ir} = \widetilde{\mathcal{F}}_{ia}\ ,\ \text{если}\quad p_2^2 < (M+\mu)^2 \quad \text{и} \quad p_4^2 < (3\mu)^2\ , \quad i = r, a$$

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{ij} = 0\ ,\ \text{если}\quad (p_1 + p_2)^2 < (M+\mu)^2 \quad \text{или} \quad p_1^0 + p_3^0 < 0\ ; \quad i, j = r, a .$$

причем считаем, что

$$\gamma > 1 \quad , \; M \geqslant 2\mu$$

Пусть V и τ_0 - любые фиксированные числа, подчиненные неравенствам

$$V < \tau_0 \leq \mu^2 \quad , \quad \tau_0 \geqslant -\mu\,(2M+\mu)$$

Тогда можно указать такое достаточно малое положительное число ρ и построить обобщенную функцию

$$\Phi\,(z_1, z_2, \ldots z_5\,;\,\xi)$$

вещественной переменной ξ со свойствами:

I) $\Phi\,(z_1, z_2, \ldots z_5\,;\,\xi)$ аналитическая относительно $(z_1, \ldots z_5)$ в области

$$|z_1 - M^2| < \rho \;,\; |z_2 - M^2| < \rho \;,\; |z_3 - \tau| < \rho \;,\; |z_4 - \tau| < \rho \;,\; |z_5 + 4\Delta^2| < \frac{\rho}{\xi} \tag{0.3}$$

где вещественные параметры τ и Δ^2 независимо пробегают промежутки

$$V \leq \tau \leq \tau_0 \quad ; \quad 0 \leq \Delta^2 \leq 3m^2\left(1 - \frac{\mu^2 - \tau_0}{2\mu\,(M+\mu)}\right) - \tau_0 \tag{0.4}$$

2) $\Phi\,(z_1, \ldots z_5\,;\,\xi) = 0$, если $\xi = (M+\mu)^2$

3) Для вещественных $(p_1, \ldots p_4)$ из многообразия (0.2), для которых величины

$$z_i = p_i^2\,, \quad i = 1, \ldots 4 \quad , \quad z_5 = (p_1 + p_2)^2 \;,\; \xi = (p_1 + p_3)^2$$

удовлетворяют неравенствам (0.3) и $p_1^0 + p_3^0 \geqslant 0$, имеем представление вида

$$\widetilde{\mathcal{F}}_{ij}\,(p_1, \ldots p_4) = \Phi\,(p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, (p_1+p_2)^2, (p_1+p_3)^2)$$

Теорема II была доказана Боголюбовым для Δ^2, ограниченных условием

$$\Delta^2 \leq \frac{M}{M+\mu}\,\mu^2 \quad , \quad (\tau_0 = \mu^2)$$

Дальнейшее усовершенствование и развитие метод Боголюбова получил в работе/5/, где верхняя грань для Δ^2 в случае мезон-нуклонного рассеяния была доведена до $2\mu^2$. Опираясь на результаты работы/5/, Владимиров в/8/ увеличил верхнюю грань для Δ^2 до 2,56 (в предположении $M = 7\mu$) Позже в работе Лемана/9/ эта верхняя граница была увеличена до

$$\Delta^2_{max} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2M+\mu}{2M-\mu}\,\mu$$

Следует заметить, что безграничное увеличение верхней границы Δ^2 в теореме II невозможно. Об

/5/ Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимирова, Изв. АН СССР, серия матем., II (1958) I5-48.
/8/ В.С.Владимиров, Изв. АН СССР, серия математ. (в печати); препринт ОИЯИ, Р-225 (1958).

этом свидетельствуют следующие примеры[6, 66]:

1. Теорема типа теоремы II для рассеяния нуклонов на нуклонах может быть доказана лишь для нефизического соотношения масс

$$\mu > (\sqrt{2} - 1)M$$

если принимать во внимание только свойства локальности и спектральности. Использование условий симметрии функций Грина может, повидимому, несколько расширить область аналитичности, однако, вопрос о том, будет ли это расширение достаточным для доказательства дисперсионных соотношений, остается открытым.

2. Теорема типа теоремы II для вершинной мезон-нуклонной функции может быть доказана даже с использованием свойств симметрии лишь при нефизическом соотношении масс

$$\mu > \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) M$$

В 1957 году Бремерманом, Оме и Тейлором[6] был предложен другой метод доказательства теорем типа I и ее различных обобщений и модификаций. В их методе доказательство этой теоремы сводится к проблеме нахождения аналитического расширения областей специального вида, называемых полутрубами. Под аналитическим расширением $E(C)$ области C мы понимаем пересечение областей голоморфности всех функций, которые регулярны в C. Область голоморфности C_f функции f, которая аналитична в C, есть наибольшая область, в которую может быть продолжена функция f. В случае одного комплексного переменного для каждой области C существует такая функция $f(z)$, что $C = C_f$ и, следовательно, $E(C) = C$. В случае функций 2-х или более комплексных переменных, аналитических в области C, область аналитического расширения является, вообще говоря, более широкой, чем область C.

Метод полутруб позволил установить дисперсионные соотношения для рассеяния π-мезонов на нуклонах для передачи импульса:

$$\Delta^2 \leq 2\mu^2$$

В принципе метод аналитического расширения позволяет несколько увеличить верхнюю границу для передачи импульса. Однако, как отмечают авторы[24], современный функционально-теоретический метод построения аналитического расширения является непрактичным.

Важное значение для исследования аналитических свойств амплитуды процесса имеет интегральное представление Йоста-Лемана-Дайсона[10]. Это представление дается для обобщенных функций, преобразования Фурье которых обращаются в нуль вне светового конуса, а сами функции исчезают в

/6/ H.J.Bremermann, R.Oehme, J.G.Taylor, Phys.Rev., 109 (1958) 2178.

/66/ R.Jost, Helvetica Physica Acta, 31 (1958) 263-272.

/10/ F.J.Dyson, Phys.Rev., 110 (1958) 1460-1464.

заданной области типа

$$a - \sqrt{\vec{\rho}^2 + b^2} < \rho_0 < \sqrt{\vec{\rho}^2 + c^2} - a \tag{0.5}$$

Изложим вкратце схему рассуждений Дайсона. Пусть функция $f(x)$ исчезает вне светового конуса. Тогда функция $\tilde{f}(\rho)$ представима в виде

$$\tilde{f}(\rho) = \tilde{\mathcal{F}}_1(\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_3, 0, 0) = \tilde{\mathcal{F}}(\hat{\rho})$$

где $\tilde{\mathcal{F}}(\rho)$, функция шести переменных $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_5)$ удовлетворяет шестимерному волновому уравнению

$$\Box_6 \tilde{\mathcal{F}}(\rho) = 0 \tag{0.6}$$

Используя представление решения волнового уравнения, получаем представление для функции $\tilde{f}(\rho)$:

$$\tilde{f}(\rho) = \int d\Sigma_\alpha \left[\tilde{\mathcal{F}}(\tau'), \left(\frac{\partial}{\partial \tau'^\alpha}\right) \mathcal{D}(\tau' - \hat{\rho}) \right] \tag{0.7}$$

где интегрирование производится по любой пространственно подобной поверхности в шестимерном пространстве и $\mathcal{D}(\rho)$ - нечетная инвариантная функция в шестимерном пространстве

$$\mathcal{D}(\rho) = \frac{1}{2\pi^2} \epsilon(\rho^0) \delta'(\rho^2) \tag{0.8}$$

Для того, чтобы удовлетворить условию, что $\tilde{f}(\rho)$ исчезает в области (0.5), выбирается в представлении (0.7) соответствующая пространственно-подобная поверхность (из числа так называемых допустимых гиперболоидов) в шестимерном пространстве. Это приводит к окончательному представлению

$$\tilde{f}(\rho) = \int d_4 u \int d\kappa^2 \, \epsilon(\rho^0 - u^0)\, \delta\left[(\rho - u)^2 - \kappa^2\right] \varphi(u, \kappa^2) \tag{0.9}$$

где обобщенная функция $\varphi(u, \lambda^2)$ сосредоточена в области:

$$|u_0| + |\vec{u}| \leqslant a \quad , \quad \lambda \geqslant \max\left[0,\ c - \sqrt{(a+u_0)^2 - \vec{u}^2},\ b - \sqrt{(a-u_0)^2 - \vec{u}^2}\right]$$

Представление (0.9) единственно. Справедливо и обратное утверждение. Всякая функция, представимая в виде (0.9), исчезает в области (0.5), а ее преобразование Фурье исчезает вне светового конуса. Даже из краткого обзора работ по дисперсионным соотношениям мы видим, что метод дисперсионных соотношений развивается как в направлении их применения к изучению тех или иных процессов, так и в направлении обоснования.

По-существу мы вступили в новый этап развития методов теории поля, когда происходит интенсивное проникновение в теоретическую физику методов теории функций многих комплексных переменных и теории обобщенных функций. Начало этого этапа связано с работами Н.Н.Боголюбова и О.С.Парасюка/68,69/.

/68/ N.N.Bogoliubov und O.S.Parasiuk. Acta Mathematica, 97 (1957) 227-266.
/69/ О.С.Парасюк, Изв. АН СССР, серия математ. 20 № 6 (1956).

Дело здесь не только в том, чтобы навести строгость при исследовании тех или иных вопросов, хотя и это стремление является естественным и необходимым, а прежде всего в том, что без использования этих методов невозможно не только доказательство дисперсионных соотношений и спектральных представлений, но и правильное понимание даже такого момента в современной квантовой электродинамике, как устранение расходимостей в теории S -матрицы. Доказательства дисперсионных соотношений и спектральных представлений без использования методов теории функций многих комплексных переменных, а также теории обобщенных функций при ближайшем рассмотрении неминуемо оказываются ложными. В связи с этим всякое новое применение дисперсионных соотношений требует их детального рассмотрения и доказательства на базе этих методов.

Выше мы отмечали широкий круг неупругих процессов, которые могут быть изучены или уже изучаются с помощью метода дисперсионных соотношений. К такому типу процессов относятся процессы фоторождения, тормозного излучения на нуклонах, рождения π -мезонов в электрон-нуклонных столкновениях, фоторождение двух π -мезонов, рождение мезона в мезон-нуклонных столкновениях и т.д.

Настоящая работа посвящена обоснованию дисперсионных соотношений для этих процессов. Основные результаты работы опубликованы в ряде статей. Вопросами доказательства дисперсионных соотношений для неупругих процессов одновременно занимались также Омс, Тейлор, Полкингхорн и Кибл.

Перейдем к краткому изложению основных результатов работы. Глава I посвящена доказательству дисперсионных соотношений для блоковых элементов. В этой главе методом Боголюбова с использованием интегрального представления Йоста-Лемана-Дайсона дано доказательство теорем типа I и II. Доказанные теоремы являются обобщением и развитием теорем Боголюбова. Обобщение теорем идет как по линии увеличения области аналитичности, так и по линии расширения их на виртуальные процессы.

Теорема II ранее была доказана лишь для одинаковых бозонов (упругое рассеяние) и для вещественных значений Δ^2 . В I главе показано, что теорема может быть обобщена как на виртуальные процессы, так и на комплексные значения Δ^2 , лежащие внутри некоторого эллипса (см. введение к главе I). В главе I на основании основной теоремы получено специальное представление для антиэрмитовой части амплитуды виртуального процесса. Это представление позволяет установить аналитические свойства антиэрмитовой части как по переменной τ , так и по Δ^2. Показано, что антиэрмитова часть является аналитической функцией Δ^2 , если Δ^2 лежит внутри упомянутого выше эллипса. Этот результат является обобщением результата Лемана на виртуальные процессы. Он позволяет с помощью разложения по полиномам Лежандра осуществить аналитическое продолжение по $\cos\theta$ (где θ - угол рассеяния) в ненаблюдаемую область. Ранее этот прием использовался для практических целей при получении приближенных уравнений, но не был доказан.

Представление для антиэрмитовой части дает возможность выполнить аналитическое продолжение по переменной τ в область физических значений и доказать дисперсионные соотношения для виртуальных процессов[x)].

В главе II дается способ построения причинных амплитуд для неупругих процессов типа ($a+b \to a'+c'+c''+\dots+c^{(n)}$), а также проводится кинематический анализ реакций вида ($a+b \to a'+c+d$). Принцип причинности и кинематический анализ позволяют выбрать переменную, по которой необходимо рассматривать аналитические свойства.

В главе III дан общий метод получения дисперсионных соотношений для неупругих процессов типа ($a+b \to a'+c+d$). Без существенных изменений он может быть применен и к неупругим процессам, содержащим большее число частиц. Вопросы доказательства дисперсионных соотношений для этих неупругих процессов являются сложными.

В параграфах 1-3 главы дано доказательство дисперсионных соотношений для двойного комптон-эффекта в случае отсутствия ненаблюдаемой области. Это доказательство основывается лишь на общих принципах современной теории - свойств ковариантности, локальности и спектральности.

В четвертом параграфе этой главы дано доказательство дисперсионных соотношений в общем случае наличия ненаблюдаемой области[xx)]. Для проведения этого доказательства предполагается существование специального представления для антиэрмитовой части. Некоторым основанием для такого предположения является наличие аналогичного представления для антиэрмитовой части амплитуды виртуальных процессов (гл.I § 6).

В заключение выражаю благодарность академику Н.Н.Боголюбову за ценные обсуждения работы. Я благодарен В.С.Владимирову, С.М.Биленькому, П.С.Исаеву, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову и Н.А.Черникову, в сотрудничестве с которыми получены некоторые результаты данной работы. Я благодарен также сотрудникам Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований и сотрудникам Отдела теоретической физики Математического института им. В.А.Стеклова, принимавшим участие в обсуждении работы.

---

x) Аналогичные дисперсионные соотношения независимо были доказаны в работе Оме и Тейлора /24/. Результаты этой работы в некоторых пунктах отличаются от полученных нами результатов. Причина этого расхождения заключается в том, что ими неправильно вычислена область аналитичности (см. введение к главе I).

xx) Вопросы дисперсионных соотношений для реакций типа $a+b \to a'+c+d$ независимо рассматривались в работе Kibble /67/. Им обсуждались дисперсионные соотношения, содержащие ненаблюдаемую область энергий. Рассмотрение Kibble не является последовательным, так как наряду с допущением о существовании представления антиэрмитовой части ему приходится сделать некоторое необоснованное утверждение об области аналитичности (см. § 4 гл.III).

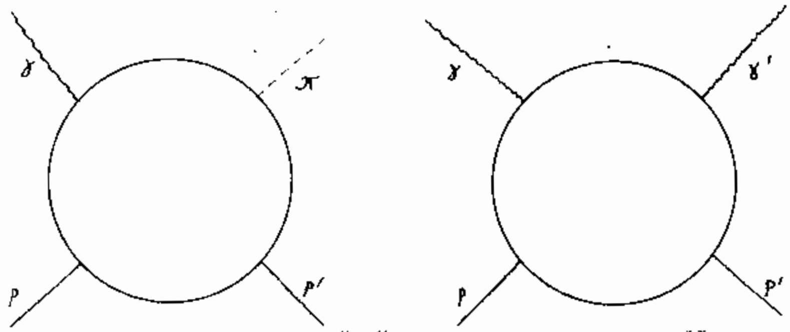
/24/R.Oehme and J.G.Taylor, preprint (1958).

/67/T.W.B.Kibble, Proc.Roy.Soc., 244 (1958) 355-376.

Глава I. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВИРТУАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

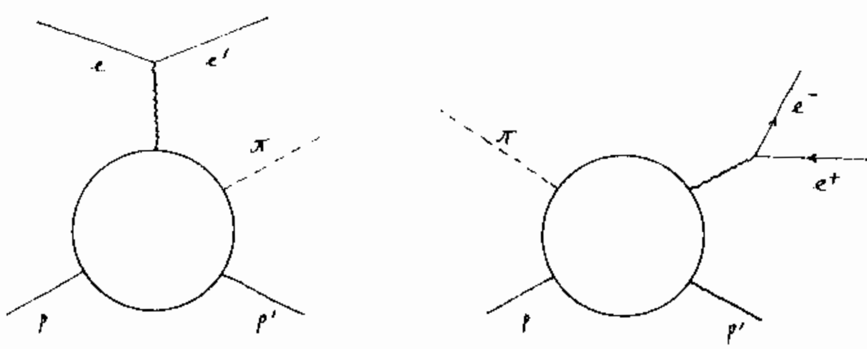
Введение

В целях расширения метода дисперсионных соотношений представляется весьма перспективным установление дисперсионных соотношений для вершинных частей - "блоков", входящих в матричные элементы сложных процессов. Простейшими примерами могут являться "блоки" фоторождения и комптон-эффекта. Схематически они изображены на рис.

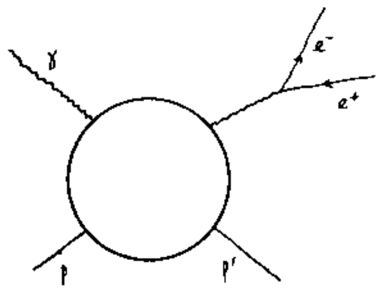


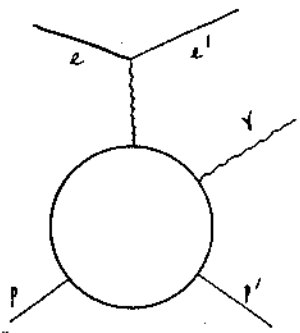
"Блок" фоторождения имеет один виртуальный γ - квант, а комптон-эффекта может иметь как один виртуальный квант (второй квант предполагается реальным), так и два виртуальных кванта. Рассматриваемые выше блоки отличаются от матричных элементов реальных процессов фоторождения и комптон-эффекта прежде всего тем, что виртуальный фотон имеет кроме поперечной, продольную и скалярную компоненты поляризации, а также тем, что 4-мерный импульс виртуального фотона отличен от нуля ($K^2 \neq 0$). Последнее обстоятельство (как это показано в настоящей главе) приводит к тому, что в этом случае в дисперсионные соотношения для "блоковых элементов" будут входить функции $F_1^{p,n}(K^2)$ и $F_2^{p,n}(K^2)$, которые характеризуют электромагнитную структуру нуклона. Заметим, что функции F_1 и F_2 точно совпадают с форм-факторами, входящими в матричный элемент упругого процесса электрон-нуклонного рассеяния. Экспериментальное определение форм-факторов из опытов по упругому рассеянию электронов на нуклонах было дано в работах [71].

Так как "блоки" являются составными частями матричных элементов реальных физических процессов, то изучение этих процессов может дать независимый метод для определения форм-факторных функций нуклона. Простейшими примерами процессов, матричные элементы которых содержат блоки фоторождения, являются:



а блок комптон-эффекта





Совершенно очевидно, что амплитуды процессов фоторождения и комптон-эффекта являются частными случаями блока фоторождения и комптон-эффекта. Следует отметить, что дисперсионные соотношения для реальных процессов фоторождения и комптон-эффекта не содержат форм-факторных функций нуклона.

В настоящей главе методом Боголюбова[4,5] с помощью интегрального представления Иоста-Лемана-Дайсона[22,10] дается доказательство дисперсионных соотношений для блоковых элементов. Это позволяет рассмотреть процессы следующего вида.

1. Комптон-эффект на нуклонах $p+\gamma \to p'+\gamma'$ (Гелл-Манн, Гольдбергер и Тирринг[11], Боголюбов и Ширков[12], Акиба и Сато[13], Логунов и Френкин[51]). Для данного процесса параметры γ_i и τ_i° x) принимают значения

$$\gamma_i = 2\,, \quad \tau_i^\circ = 0 \quad ; \qquad i = 1,2\,.$$

Верхняя граница Δ^2_{max} для передачи импульса Δ^2 вычисляется по формуле (I.17) и равна:

$$\Delta^2_{max} = \frac{(2M+\mu)(6M^2+9M\mu+4\mu^2)}{4M(M+\mu)}\mu^2 \tag{0.2}$$

2. Тормозное излучение γ - квантов в электрон-нуклонных столкновениях $p+e \to p'+e'+\gamma$ (Логунов[15]) $\quad \gamma_i = 2\,,\ i=1,2\ ; \quad \tau_1^\circ = \tau^\circ < 0\,, \quad \tau_2^\circ = 0$

$$\Delta^2_{max} = \frac{M}{M+\mu}\cdot\frac{2\mu^2-\tau^\circ}{4} + \frac{(\mu^2-\tau^\circ)\mu^2}{2(2M+2\mu)^2} + \frac{\mu(2M+\mu)}{4M}\sqrt{4\mu^2-\tau^\circ} + \tag{0.3}$$

если $\tau^\circ > -3\mu^2$

$$+\frac{\mu(2M+\mu)}{4M}\left[(4\mu^2-\tau_0)\left(1+\frac{(2M+\mu)M}{(2M+2\mu)^2}\right)\left(1+\frac{\mu^2-\tau^\circ}{4\mu^2-\tau^\circ}\cdot\frac{M}{(M+\mu)^2}\cdot\frac{(2M+\mu)^2-\tau^\circ}{2M+\mu}\right)\right]^{1/2}$$

При $\quad \tau^\circ \le -3\mu^2$, Δ^2_{max} дается общей формулой (I.12). Вычисления дали следующие результаты.

τ°/μ^2	- 1	- 2	-3	-4	-5	- 6	- 7	- 8	- 9	-10	-20
Δ^2_{max}/μ^2	3,69	-4,30	4,88	5,41	5,91	6,40	6,88	7,33	7,77	8,19	12,23

---

x) По поводу смысла обозначений параметров γ_i и τ_i° см. основную теорему.

3. Фоторождение электронно-позитронных пар на нуклонах $p+\gamma\to p'+e^{+}+e^{-}$ (Логунов[I5])

$$\gamma_1=\gamma_2=2\ ,\quad \tau_1^{\circ}=0\ ,\quad (2m_e)^2\leqslant\tau_2^{\circ}=\tau^{\circ}$$

где m_e - масса электрона. Верхняя граница τ° вычислена согласно формуле (I.5). Δ^2_{max} вычисляется по формуле (0.3).

τ°/μ^2	0	0,25	0,5	0,75	I,0	I,5	2,0
Δ^2_{max}/μ^2	3,02	2,84	2,66	2,46	2,25	I,79	I,I5

4. Фоторождение мезонов на нуклонах $p+\gamma\to p'+\pi$ (Логунов и Степанов[I6], Логунов, Соловьев и Тавхелидзе[I7], Коринальдези[I8], Чу, Гольдбергер, Лоу и Намбу[I9])

$$\gamma_1=2\ ,\quad \gamma_2=3\ ,\quad \tau_1^{\circ}=0\ ,\quad \tau_2^{\circ}=\mu^2$$

$$\Delta^2_{max}=\frac{M}{M+\mu}\cdot\frac{\mu^2}{4}+(2M+\mu)\mu^2\sqrt{\frac{2}{3M(2M-\mu)}}\left[1+\sqrt{1+\frac{M(2M+\mu)}{4(M+\mu)^2}}\right] \tag{0.4}$$

5. Рождение π -мезонов в электрон-нуклонных столкновениях $p+e\to p'+e+\pi$ (Логунов[I5], Фубини, Намбу и Ватагин[2I]).

$$\gamma_1=2\ ,\ \gamma_2=3\ ,\quad \tau_1^{\circ}=\tau^{\circ}<0\quad ,\quad \tau_2^{\circ}=\mu^2$$

$$\Delta^2_{max}=\frac{M}{M+\mu}\cdot\frac{\mu^2-\tau^{\circ}}{4}+\frac{(2M+\mu)\mu}{2}\sqrt{\frac{2(4\mu^2-\tau^{\circ})}{3M(2M-\mu)}}\left[1+\sqrt{1+\frac{(\mu^2-\tau^{\circ})M[(2M+\mu)^2-\tau^{\circ}]}{(4\mu^2-\tau^{\circ})(M+\mu)^2(2M+\mu)}}\right] \tag{0.5}$$

если $\tau^{\circ}>-3\mu^2$ при $\tau^{\circ}\leqslant-3\mu^2$, Δ^2_{max} дается общей формулой (I.I2). Вычисления дали следующие результаты.

τ°/μ^2	- I	- 2	- 3	- 4	- 5	- 6	- 7	- 8	- 9	- I0	- 20
Δ^2_{max}/μ^2	3,73	4,36	4,95	5,5I	6,04	6,54	7,03	7,50	7,95	8,39	I2,32

6. Рождение электронно-позитронных пар π -мезонами $p+\pi\to p'+e^{+}+e^{-}$ (Логунов[I5]).

$$\gamma_1=3\ ,\ \gamma_2=2\ ,\quad \tau_1^{\circ}=\mu^2\ ,\quad (2m_e)^2\leqslant\tau^{\circ}=\tau_2^{\circ}$$

Δ^2_{max} дается формулой (0.5).

τ°/μ^2	0	0,25	0,5	0,75	I	I,5	2,0
Δ^2_{max}/μ^2	3,04	2,85	2,65	2,45	2,23	I,83	I,09

Процессы 2-6 являются простейшими примерами неупругих реакций. Для мезон-нуклонного рассеяния $(\gamma_1=\gamma_2=3\ ,\ \tau_1^{\circ}=\tau_2^{\circ}=\mu^2)$ полученное здесь значение Δ^2_{max} совпадает со значением, полученным

Леманом в работе[9] (формула 0.I). В случае процессов I и 4 полученные в данной работе значения Δ^2_{max} совпадают с соответствующими значениями, вычисленными Оме и Тейлором[24]. Что касается процесса 5, наши результаты совпадают с соответствующими результатами работы[25] лишь при

$$\tau^\circ \geq -4\mu^2 \frac{M+\mu}{M-\mu} = \tau'$$

При значениях $\tau^\circ < \tau'$ результаты работы[24] неправильны, поскольку при вычислении Δ^2_{max} по формуле (I.I2) ими, по-существу, не была учтена вторая возможность в формулах (I.I0) (см. доказательство вспомогательной теоремы). Соответствующие значения Δ^2_{max} при $\tau^\circ < \tau'$, приведенные на стр. I2 работы[24], оказываются поэтому завышенными.

Как следует из основной теоремы, антиэрмитова часть амплитуды рассеяния при любых фиксированных $t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)$ и $\tau \leq 0$ является голоморфной функцией Δ^2 внутри эллипса (I.7) с границей:

$$\Delta^2 = A + B\cos\delta + iC\sin\delta \quad , \quad 0 \leq \delta < 2\pi$$

и фокусами

$$A \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}$$

если $\tau_i^\circ \leq \mu^2$. Функции A,B,C и φ^2 определены формулами (I.8)-(I.I0). При $t > \frac{1}{2}(M+\mu)$ в качестве новой переменной можно ввести $\cos\theta$ по формуле

$$2(\Delta^2 - A) = \cos\theta\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}$$

Заметим попутно, что для вещественных значений этот косинус представляет собой косинус угла между импульсами начального и конечного нуклонов.

Тогда антиэрмитова часть амплитуды будет аналитической функцией от $\cos\theta$, голоморфной внутри эллипса с фокусами $\pm$ I и с границей

$$\cos\theta = \mathcal{D}\cos\delta + i\sqrt{\mathcal{D}^2 - 1}\,\sin\delta \quad , \quad 0 \leq \delta < 2\pi \tag{0.6}$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{2B}{\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}}$$

Поэтому она может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра от $\cos\theta$ и этот ряд будет сходиться внутри эллипса (0.6). Коэффициенты этого ряда определяются значениями антиэрмитовой части в области, где $|\cos\theta| \leq 1$. Полученный ряд, в частности, будет сходиться и для всех вещественных Δ^2 из промежутка:

$$\Delta^2_{min} < \Delta^2 < \Delta^2_{max}$$

Это обстоятельство дает возможность выразить антиэрмитову часть в ненаблюдаемой области, содержащейся в дисперсионных соотношениях, через значения в физической области.

§ I. Основная теорема

В настоящем параграфе нами будет дано доказательство основной теоремы, которая является обобщением и развитием соответствующей теоремы Боголюбова ([4] Математическое дополнение, см. также[5,6,8]).

Эта теорема позволяет установить дисперсионные соотношения для всех перечисленных выше процессов (см. работы[14,20]), а также приводит к некоторым аналитическим свойствам амплитуды как функции энергии и передачи импульса. Получающиеся при этом результаты приведены во введении. Следует отметить, что аналитические свойства амплитуды доказываются на основе общих принципов квантовой теории поля – ковариантности, локальности и спектральных условий.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть даны 4 обобщенные функции четырех 4-векторов

$$\mathcal{F}_{ij}\,(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad ; \quad i, j = r, a$$

инвариантные относительно преобразований из неоднородной ортохронной группы Лоренца. Предположим, что эти обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{rr} &= 0, \text{ если } x_1 \lesssim x_3 \text{ или } x_2 \lesssim x_4 \\
\mathcal{F}_{ra} &= 0, \text{ если } x_1 \lesssim x_3 \text{ или } x_2 \gtrsim x_4 \qquad \text{(I.I)} \\
\mathcal{F}_{ar} &= 0, \text{ если } x_1 \gtrsim x_3 \text{ или } x_2 \lesssim x_4 \\
\mathcal{F}_{aa} &= 0, \text{ если } x_1 \gtrsim x_3 \text{ или } x_2 \gtrsim x_4
\end{aligned}$$

Пусть далее их преобразования Фурье

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_4)\, \widetilde{\mathcal{F}}_{ij}\,(p_1, \dots\dots p_4) = \int \mathcal{F}_{ij}\,(x_1, \dots x_4)\, exp\,[i(p_1 x_1 + \dots\dots + p_4 x_4)]\, dx_1 \dots dx_4$$

определенные, очевидно, на многообразии

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{F}}_{rj} &= \widetilde{\mathcal{F}}_{aj} \quad , \text{ если } \quad p_1^2 < (M+\mu)^2 \,, \; p_3^2 < \gamma_1^2 \mu^2 \,, \; j = r, a \\
\widetilde{\mathcal{F}}_{ir} &= \widetilde{\mathcal{F}}_{ia} \quad , \text{ если } \quad p_2^2 < (M+\mu)^2, \; p_4^2 < \gamma_2^2 \mu^2 \,, \; i = r, a \qquad \text{(I.3)} \\
\widetilde{\mathcal{F}}_{ij} &= 0 \quad , \text{ если } \quad (p_1 + p_3)^2 < (M+\mu)^2 \text{ или } p_{10} + p_{30} < 0 \;;\; i, j = r, a \qquad \text{(I.4)}
\end{aligned}$$

При этом считаем, что

$$\gamma_i > 1 \,, \; M + \mu \geqslant \gamma_i \mu > 0 \quad ; \; i = 1, 2 .$$

Пусть τ_j^0 – любые фиксированные числа, обладающие тем свойством, что

$$\min_{t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)} \left[\left(t + \frac{M^2 - \tau_i^\circ}{4t}\right)^2 - M^2 + \frac{(2M+\mu)(\gamma_i^2\mu^2 - \tau_i^\circ)}{4t^2 - (M+\mu-\gamma_i\mu)^2}\mu \right] > 0 \quad , \quad i = 1, 2. \tag{I.5}$$

Тогда можно построить обобщенную функцию $\Phi(z_1, z_2, \ldots z_5; t)$ вещественной переменной t со свойствами:

I) $\Phi(z_1, \ldots z_5; t)$ голоморфна относительно $z = (z_1, z_2, \ldots z_5)$ в некоторой области $\mathcal{D}_t$. Область $\mathcal{D}_t$, $t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)$ содержит все точки z вида:

$$z_1 = M^2, \quad z_2 = M^2, \quad z_3 = \tau + \tau_1^\circ, \quad z_4 = \tau + \tau_2^\circ, \quad z_5 = -4\Delta^2 \tag{I.6}$$

где τ - любое число, меньшее или равное нулю, и Δ^2 пробегает внутренность эллипса

$$\mathcal{A}(t,\tau) + \mathcal{B}(t,\tau)\cos\delta + i\,\mathcal{C}(t,\tau)\sin\delta \quad , \quad 0 \leq \delta < 2\pi \tag{I.7}$$

где

$$\mathcal{A}(t,\tau) = \frac{1}{4}\varphi^2(t, \tau+\tau_1^\circ) + \frac{1}{4}\varphi^2(t, \tau+\tau_2^\circ) - \left(\frac{\tau_1^\circ - \tau_2^\circ}{8t}\right)^2,$$

$$\mathcal{B}(t,\tau) = \frac{1}{2}\sqrt{[\psi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)][\psi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)]} +$$

$$+ \frac{1}{2}\psi(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ)\psi(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ) \quad ,$$

$$\mathcal{C}(t,\tau) = \frac{1}{2}\psi(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ)\sqrt{\psi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)} + \frac{1}{2}\psi(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ)\sqrt{\psi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)}$$

$$\varphi^2(t,\tau) = \left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2 \quad ,$$

$$\psi(t,\gamma,\tau) = \begin{cases} \sqrt{\varphi^2(t,\tau) + \dfrac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2 - \tau)}{4t^2 - (M+\mu-\gamma\mu)^2}\mu} \quad , & \text{если } \tau \geq \gamma\mu\left(M+\mu - \dfrac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right) \\ \dfrac{\mu(2M+\mu)}{4t} + \dfrac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2 - \tau}\cdot\sqrt{(2t-M-\mu)^2 - \tau} \; , & \tau \leq \gamma\mu\left(M+\mu - \dfrac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right) \end{cases}$$

В частности, если выполнено неравенство $\Delta^2_{min} < \Delta^2_{max}$ x), то ко всем областям $\mathcal{D}_t$ принадлежат Δ^2 из промежутка

$$\Delta^2_{min} < \Delta^2 < \Delta^2_{max} \tag{I.II}$$

где

$$\Delta^2_{max} = \min_{t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)} \left[\mathcal{A}(t,0) + \mathcal{B}(t,0)\right] \tag{I.I2}$$

$$\Delta^2_{min} = \max_{t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)} \left[\mathcal{A}(t,\tau) - \mathcal{B}(t,\tau)\right] \tag{I.I3}$$

---

x) Это опять приведет к некоторым ограничениям на числа γ_i, τ_i°, M/μ.

2) $\Phi(z_1, \ldots z_5 ; t)$, если $t < \frac{1}{2}(M+\mu)$

3) Для вещественных (p_1, p_2, p_3, p_4) из многообразия (I.2), для которых величины

$$z_1 = p_1^2 , \; z_2 = p_2^2 , \; z_3^2 = p_3^2 , \; z_4^2 = p_4^2 , \; z_5 = (p_1 + p_2)^2$$

принадлежат области $\mathcal{D}_t$, где $t^2 = (\frac{p_1 + p_3}{2})^2$, имеет место представление

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1, \ldots p_4) = \Phi\,[p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, (p_1 + p_2)^2 ; (\frac{p_1 + p_3}{2})^2]$$

если

$$p_{10} + p_{30} \geqslant 0$$

<u>ПРИМЕЧАНИЕ А</u>

Рассмотрим более общий случай, когда функции

$$\mathcal{F}_{ij}(x_1, \ldots x_4)$$

удовлетворяют всем условиям основной теоремы кроме условия скалярности.

Вместо него предположим, что при преобразовании $\mathcal{L}$ из группы Лоренца наши функции линейно преобразуются

$$\mathcal{F}_{ij}^{\nu}(\mathcal{L}x_1, \ldots \mathcal{L}x_4) = \sum_{1 \leq \nu' \leq e} A_{\nu\nu'}(\mathcal{L})\, \mathcal{F}_{ij}^{\nu'}(x_1, \ldots x_4)$$

с помощью некоторого представления $A(\mathcal{L})$ этой группы, разбивающегося на обычные тензорные и спинорные представления. Можно показать, что результаты теоремы претерпевают здесь следующее изменение.

Можно построить конечную систему обобщенных функций вещественной переменной z_6

$$\Phi_{\lambda}(z_1, \ldots z_5 ; z_6)$$

являющихся аналитическими функциями комплексных переменных $z_1, \ldots z_5$ и обладающих свойствами I и 2 (см. основную теорему), причем для вещественных $(p_1, \ldots p_4)$ из многообразия (I.2), для которых величины

$$z_1 = p_1^2 , \; z_2 = p_2^2 , \; z_3 = p_3^2 , \; z_4 = p_4^2 , \; z_5 = (\frac{p_1 + p_2}{2})^2$$

принадлежат области $\mathcal{D}_t$, где $t^2 = (\frac{p_1 + p_3}{2})^2$, имеет место представление вида:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{\nu}(p_1, \ldots p_4) = \sum_{\lambda} p_{i_1}^{\alpha_1} \ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\, \Phi_{\lambda}(z_1, \ldots z_5 ; z_6)$$

если $p_{10} + p_{30} \geqslant 0$, с конечным числом членов в сумме.

Отметим несколько важных для приложений частных случаев этой теоремы.

I. Пусть

$$2 \leq \gamma_i \leq 3 \quad , \quad -\gamma_i^2 \mu^2 \frac{M+\mu}{M+\mu-\gamma_i \mu} \leq \tau_i^\circ \leq \mu^2 \tag{I.I4}$$

и M/μ = экспериментальному отношению массы нуклона к массе π-мезона (M = 6,7I4μ). Тогда Δ^2_{min} = 0 (см. рассуждение в конце § 3) и, следовательно, промежуток изменения Δ^2 в (I.II) можно заменить на:

$$0 < \Delta^2 < \Delta^2_{max} \tag{I.I5}$$

2. Если минимум в (I.I2) реализуется в точке $t = \frac{1}{2}(M+\mu)$ и

$$\tau_i^\circ \geq -\gamma_i^2 \mu^2 \frac{M+\mu}{M+\mu-\gamma_i \mu} \tag{I.I6}$$

то выражение для Δ^2_{max} упрощается и принимает следующий вид:

$$\Delta^2_{max} = \frac{M}{M+\mu} \cdot \frac{2\mu^2 - \tau_1^\circ - \tau_2^\circ}{4} + \frac{(\mu^2-\tau_1^\circ)(\mu^2-\tau_2^\circ)}{2(2M+2\mu)} + \tag{I.I7}$$

$$+ \frac{2M+\mu}{2} \sqrt{\prod_{i=1}^{2} \frac{(\gamma_i^2\mu^2 - \tau_i)}{\gamma_i (2M+2\mu-\gamma_i\mu)}} \left[1 + \sqrt{\prod_{i=1}^{2} \left[1 + \frac{\mu^2-\tau_i^\circ}{\gamma_i^2\mu^2-\tau_i^\circ} \cdot \frac{\gamma_i(2M+2\mu-\gamma_i\mu)}{4(M+\mu)^2} \cdot \frac{(2M+\mu)^2-\tau_i^\circ}{2M+\mu} \right]} \right]$$

Для процессов I-6 при $\tau^\circ > -3\mu^2$ минимум в (I.II) фактически реализуется в точке $t = \frac{1}{2}(M+\mu)$ и, следовательно, Δ^2_{max} вычисляется по формуле (I.I7). Это приводит нас к формулам (0.I)-(0.5).

3. Если

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma \ , \ \tau_1^\circ = \tau_2^\circ = \tau^\circ \ , \quad \tau^\circ \geq -\gamma^2\mu^2 \frac{M+\mu}{M+\mu-\gamma\mu} \ .$$

то легко видеть, что Δ^2_{min} = 0. Формула (I.I2) в этом случае значительно упрощается:

$$\Delta^2_{max} = \min_{t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)} \Psi^2(t,\gamma,\tau^\circ) = \min_{t \geq \frac{1}{2}(M+\mu)} \left[\left(t + \frac{M^2-\tau^\circ}{4t}\right)^2 - M^2 + \frac{\mu(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau^\circ)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2} \right] \tag{I.I8}$$

В случае мезон-нуклонного рассеяния и комптон-эффекта минимум в (I.I8) реализуется в точке $t = \frac{1}{2}(M+\mu)$, что приводит к формулам (0.I) и (0.2). В случае равных масс ($M = \mu$, γ=2, $\tau^\circ = \mu^2$) минимум в (I.I8) реализуется в точке $t = \sqrt{3/2}\, M$, что приводит к значению $\Delta^2_{max} = 2M^2$, указанному в работе[6].

§ 2. Вспомогательная теорема

Доказательство основной теоремы опирается на теорему об аналитических свойствах запаздывающей и опережающей амплитуд процесса. Содержанием этого параграфа является доказательство этой вспомогательной теоремы, представляющей к тому же и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА

Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, $x=(x_0,x_1,\dots x_3)$, обладающие свойством запаздывания и опережения соответственно:

$$\mathcal{F}_r(x) = 0, \text{ если } x \lesssim 0; \quad \mathcal{F}_a(x) = 0, \text{ если } x \gtrsim 0 \tag{2.1}$$

Пусть, кроме того, их преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_i(p)$, $p=(p_0,p_1,\dots p_3)$ совпадают в области

$$t-\sqrt{\vec{p}^{\,2}+\gamma^2\mu^2} < p_0 < -t+\sqrt{\vec{p}^{\,2}+(M+\mu)^2} \tag{2.2}$$

Предполагаем, что

$$2t \geq M+\mu-\gamma\mu > 0 \quad , \quad \gamma > 1 \quad , \mu > 0 \tag{2.3}$$

Тогда существует аналитическая функция $\tilde{\Phi}(k)$ четырех комплексных переменных

$$k=(k_0,k_1,\dots k_3) = p+iq = (p_0+iq_0,\vec{p}+i\vec{q})$$

голоморфная в области $G_t(\gamma)$, где область $G_t(\gamma)$ есть совокупность точек k, удовлетворяющих условиям : либо $q^2>0$, либо при $q^2\leq 0$:

$$(p_0+t)^2 < \vec{p}^{\,2}+(M+\mu)^2 \quad , \quad (p_0-t)^2 < \vec{p}^{\,2}+\gamma^2\mu^2 \tag{2.4}$$

и

$$\vartheta_1(p_0,|\vec{p}|) \equiv -\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}-t^2+p^2+\sqrt{\vec{p}^{\,2}(4t^2-\beta^2)+(t\alpha-p_0\beta)^2} < q^2, \tag{2.5}$$

если $p_0+|\vec{p}| \leq t\frac{\alpha}{\beta}$

$$\vartheta_2(p_0,|\vec{p}|) \equiv \frac{t-p_0-|\vec{p}|}{t+p_0+|\vec{p}|}\cdot\left[(M+\mu)^2+\vec{p}^{\,2}-(p_0+t)^2\right] < q^2 \tag{2.6}$$

если

$$p_0+|\vec{p}| \geq t\frac{\alpha}{\beta}$$

где обозначено

$$\alpha = M+\mu+\gamma\mu \quad , \quad \beta = M+\mu-\gamma\mu$$

Функция $\tilde{\Phi}(k)$ такова, что при вещественных p из области (2.2).

$$\tilde{\Phi}(p) = \tilde{\mathcal{F}}_r(p) = \tilde{\mathcal{F}}_a(p)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В работах Иоста и Лемана [22] и Дайсона [10] найдено интегральное представление для причинного коммутатора. Применяя теорему Дайсона для нашего случая, получим

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(p) - \tilde{\mathcal{F}}_a(p) = \int \epsilon(p_0 - u_0)\varphi_i[u, (p-u)^2]\, du \tag{2.7}$$

где обобщенная функция $\varphi(u, \lambda^2)$ сосредоточена в области:

$$|u_0| + |\vec{u}| \le t \quad , \quad \lambda \geqslant \max\left[0, M+\mu - \sqrt{(t+u_0)^2 - \vec{u}^2}, \gamma\mu - \sqrt{(t-u_0)^2 - \vec{u}^2}\right] \tag{2.8}$$

В силу свойств (2.I) функции $\tilde{\mathcal{F}}_r(k)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_a(k)$ голоморфны соответственно в областях: $q_0 > |\vec{q}|$ и $q_0 < -|\vec{q}|$ имеют место предельные соотношения

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(p+iq) \to \tilde{\mathcal{F}}_r(p) \quad , \quad \tilde{\mathcal{F}}_a(p+iq) \to \tilde{\mathcal{F}}_a(p) \tag{2.9}$$

$$q \to 0, \; q_0 > |\vec{q}| \qquad\qquad q \to 0, \; q_0 < -|\vec{q}|$$

причем, стремление к пределу имеет место в слабом смысле.

Фиксируем вещественный вектор $\vec{p}$ и рассмотрим функции $\tilde{\mathcal{F}}_r(k_0, \vec{p})$ и $\tilde{\mathcal{F}}_a(k_0, \vec{p})$, являющиеся голоморфными функциями $k_0 = p_0 + iq_0$ соответственно в верхней и нижней полуплоскости; введенные функции ограничены полиномом некоторой степени m соответственно в областях $q_0 \geqslant \delta$ и $q_0 \leqslant -\delta$ при каждом $\delta > 0$. Как следует из доказательства леммы I работы [23], степень m мажорирующего полинома не зависит от $\vec{p}$ и δ, а зависит только от того класса $C(p, q; 4)$, которому принадлежат функции $\tilde{\mathcal{F}}_i$.

Принимая во внимание свойства функций $\tilde{\mathcal{F}}_i(k_0, \vec{p})$ и применяя теорему Коши, получим при $q_0 > 0$

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(k_0, \vec{p}) = \frac{(k_0 - iN)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\mathcal{F}}_r(\xi, \vec{p}) - \tilde{\mathcal{F}}_a(\xi, \vec{p})}{(\xi - k_0)(\xi - iN)^{n+1}}\, d\xi + \sum_{s=0}^{n} \frac{(k_0 - iN)^s}{s!} \cdot \frac{\partial^s \tilde{\mathcal{F}}_r(\xi, \vec{p})}{\partial \xi_s}\Big/_{\xi = iN} \tag{2.10}$$

где n - достаточно большое натуральное число (во всяком случае не меньшее числа m) и N - произвольное положительное число.

Учитывая представление (2.7), после несложных преобразований получим из (2.10)

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(k_0, \vec{p}) = \frac{(k_0 - iN)^{n+1}}{2\pi i} \iint \frac{\phi(k_0, u_0, N, \lambda^2, (\vec{p}-\vec{u})^2)\, \varphi(u, \lambda^2)\, du\, d\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^2 + (\vec{p}-\vec{u})^2}\left[(k_0 - u_0)^2 - (\vec{p}-\vec{u})^2 - \lambda^2\right]\left[(u_0 - iN)^2 - (\vec{p}-\vec{u})^2 - \lambda^2\right]^{n+1}} + \sum_{s=0}^{n} \frac{(k_0 - iN)^s}{s!} \tilde{\mathcal{F}}^s(iN, \vec{p}) \tag{2.11}$$

$$\phi(k_0, u_0, N, \lambda^2, (\vec{p}-\vec{u})^2) = \sum_{\tau_i = \pm 1} \tau_i \left[k_0 - u_0 - \tau_i \sqrt{\lambda^2 + (\vec{p}-\vec{u})^2}\right]\left[u_0 - iN + \tau_i \sqrt{\lambda^2 + (\vec{p}-\vec{u})^2}\right]^{n+1}$$

Интеграл в (2.11) можно интерпретировать как значение функционала (обобщенной функции) φ на функции из соответствующего класса $C(p, q; 4)$ (при достаточно большом n).

Из (2.11) следует, что функция $\tilde{\mathcal{F}}_r(k_0, \vec{p})$ допускает аналитическое продолжение как по комплексной переменной k_0, так и по вещественным переменным $\vec p$ на комплексные значения $\vec p$. Получающаяся при этом функция $\widetilde{\mathcal F}_\tau(\kappa)$ будет голоморфной для тех κ, для которых одновременно имеют место неравенства:

$$\left.\begin{aligned} &(k_0-u_0)^2-(\vec k-\vec u)^2-\lambda^2 \neq 0\\ &(N-u_0)^2-(\vec k-\vec u)^2-\lambda^2 \neq 0\\ &\qquad \varrho^2 < N^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{при всех } (u,\lambda^2) \text{ из области (2.8)} \qquad (2.12)$$

Так как N - произвольное положительное число и область (2.12) монотонно возрастает с увеличением N, то в (2.12) можно перейти к пределу при $N\to+\infty$. Таким образом, к области голоморфности функции $\widetilde{\mathcal F}_\tau(\kappa)$ относятся те точки κ, для которых выполнено неравенство

$$(k_0-u_0)^2-(\vec k-\vec u)^2-\lambda^2 \neq 0 \qquad (2.13)$$

при всех (u,λ^2) из области (2.8). Из условия (2.13) непосредственно следует, что точки κ, для которых $\varrho^2 > 0$, принадлежат области голоморфности функции $\widetilde{\mathcal F}_\tau(\kappa)$. Поэтому мы можем ограничить наше рассмотрение теми κ, для которых $\varrho^2 \leqslant 0$. Эти последние κ содержатся в силу (2.13) в области, определяемой условием:

$$Re\left[(k_0-u_0)^2-(\vec k-\vec u)^2-\lambda^2\right] = (p-u)^2-\varrho^2-\lambda^2 < 0 \qquad (2.14)$$

при всех (u,λ^2) из области (2.8).

Чтобы раскрыть условие (2.14), предположим для определенности, что $2t \geqslant M+\mu+\gamma\mu$. Принимая во внимание (2.8), запишем условие (2.14) в виде

$$\max_{|u_0|+|\vec u|\leq t} f(u_0,|\vec u|) < 0 \qquad (2.15)$$

где f - непрерывная функция своих аргументов.

$$f(u_0,\vec u)=\begin{cases}(p_0-u_0)^2-(|\vec p|-|\vec u|)^2-\varrho^2, & \text{если } (u_0,|\vec u|)\in \mathrm{I}\\ (p_0-u_0)^2-(|\vec p|-|\vec u|)^2-\varrho^2-\left[\gamma\mu-\sqrt{(t-u_0)^2-\vec u^2}\right]^2, & \text{если } (u_0,|\vec u|)\in \mathrm{II}\\ (p_0-u_0)^2-(|\vec p|-|\vec u|)^2-\varrho^2-\left[M+\mu-\sqrt{(t+u_0)^2-\vec u^2}\right]^2, & \text{если } (u_0,|\vec u|)\in \mathrm{III}\end{cases}$$

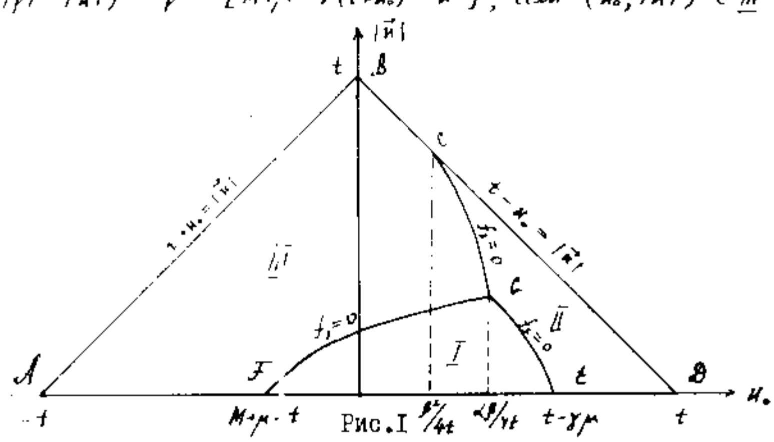


Рис.I

Линии FG, EG и CG имеют соответственно уравнения

$$f_1(u_0,|\vec{u}|) \equiv M+\mu-\sqrt{(t+u_0)^2-\vec{u}^2} = 0$$

$$f_2(u_0,|\vec{u}|) \equiv \gamma\mu-\sqrt{(t-u_0)^2-\vec{u}^2} = 0.$$

$$f_3(u_0,|\vec{u}|) \equiv f_1(u_0,|\vec{u}|)-f_2(u_0,|\vec{u}|) = 0.$$

Уравнение линии CG преобразуется к виду:

$$2\beta|\vec{u}| = \sqrt{(4t^2-\beta^2)(\beta^2-4u_0^2)}\quad,\quad \frac{\beta^2}{4t} \leq u_0 \leq \frac{\alpha\beta}{4t} \tag{2.16}$$

Замечая, что

$$f(-t,0) = (p_0+t)^2-\vec{p}^2-q^2-(M+\mu)^2,\quad f(t,0) = (p_0-t)^2-\vec{p}^2-q^2-\gamma^2\mu^2.$$

видим из (2.15), что области голоморфности в случае $q^2 \leq 0$ принадлежат только те точки K, для которых выполнены неравенства (2.4), эквивалентные неравенствам (2.2).

Очевидно, что внутри области I и внутри линии FE максимум функции f не реализуется. Из (2.2) следует, что этот максимум может быть только на границах областей II и III.

Внутри участков AF и ED максимум функции f не реализуется, ибо там она линейна; так как правее от линии AB и левее от линии CD функция f возрастает, то ее максимум не может достигаться также и внутри линий AB и CD.

Докажем, что в точках A и D максимум функции f не реализуется. Действительно, рассматривая для определенности точку A, имеем в силу (2.2)

$$\max_{0\leq\rho\leq 1} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u_0} f(u_0,(t+u_0)\rho)\Big|_{u_0=-t} = -p_0-t+\sqrt{\vec{p}^2+(M+\mu)^2} > 0.$$

Отсюда следует, что в окрестности точки A всегда найдется лежащее в области III направление, вдоль которого функция f возрастает.

Докажем теперь, что вдоль линии FG производная функции f по u_0 положительна, в то время как вдоль линии EG эта производная отрицательна. Действительно, рассматривая, например, случай линии FG, имеем в силу (2.2)

$$f = (p_0-u_0)^2-q^2-\left[|\vec{p}|-\sqrt{(t+u_0)^2-(M+\mu)^2}\right]^2,\quad M+\mu-t \leq u_0 \leq \frac{\alpha\beta}{4t}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_0} = -p_0-t+\frac{(t+u_0)|\vec{p}|}{\sqrt{(t+u_0)^2-(M+\mu)^2}} \geq -p_0-t+\frac{(4t^2+\alpha\beta)|\vec{p}|}{\sqrt{(4t^2+\alpha\beta)^2-16t^2(M+\mu)^2}} \geq -p_0-t+\sqrt{\vec{p}^2+(M+\mu)^2}>0$$

При этом мы приняли во внимание только те $\vec{p}^2$, которые в силу (2.2) удовлетворяют неравенству

$$\vec{p}^2 > \frac{(4t^2-\alpha^2)(4t^2-\beta^2)}{16t^2} \tag{2.17}$$

Из сказанного вытекает, что максимум функции f может достигаться либо на линии $\mathcal{BC}$, либо на линии CC. На линии $\mathcal{BC}$ имеем

$$f = (p_0-u_0)^2-(|\vec{p}|-t+u_0)^2-q^2-(M+\mu-2\sqrt{tu_0})^2 \quad , \quad 0 \le u_0 \le \frac{\beta^2}{4t}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_0} = -t-p_0-|\vec{p}|+(M+\mu)\sqrt{t/u_0}$$

Отсюда следует, что если выполнено неравенство

$$p_0+|\vec{p}| \ge t\frac{\alpha}{\beta} \tag{2.18}$$

то максимум функций f достигается на линии $\mathcal{BC}$ и равен $V_2(p_0,|\vec{p}|)-q^2$, что в силу (2.15) приводит к условиям (2.6). Принимая во внимание (2.16), на линии CC получим

$$f=(p_0-u_0)^2-\left[|\vec{p}|-\sqrt{\frac{4t^2-\beta^2}{4\beta^2}(\beta^2-4u_0^2)}\,\right]^2-q^2-\left[(M+\mu)\cdot\frac{\beta}{2}-\frac{2u_0t}{\beta}\right]^2, \quad \frac{\beta^2}{4t} \le u_0 \le \frac{\alpha\beta}{4t}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u_0} = t\frac{\alpha}{\beta}-p_0-\frac{2u_0|\vec{p}|}{\beta}\sqrt{\frac{4t^2-\beta^2}{\beta^2-4u_0^2}}$$

Если p удовлетворяет условиям (2.2) /и, следовательно, (2.17)/, то

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial f}{\partial u_0}\right|_{u_0=\frac{\alpha\beta}{4t}-0} = t\frac{\alpha}{\beta}-p_0-\frac{\alpha}{\beta}|\vec{p}|\sqrt{\frac{4t^2-\beta^2}{4t^2-\alpha^2}} < t-p_0-\sqrt{\vec{p}^2+\gamma^2\mu^2} < 0$$

Поэтому, если условие (2.18) не выполнено, то максимум функции f непрерывно реализуется на участке CC и равен $V_1(p_0,|\vec{p}|)-q^2$, что в силу (2.15) приводит к условиям (2.5).

Докажем теперь, что при $q^2=0$ неравенства (2.5)-(2.6) следуют из неравенств (2.4) или, что то же самое, - из неравенств (2.2). Для этого достаточно заметить, что неравенство (2.5) при $q^2=0$ может быть записано в виде

$$[(p_0+t)^2-\vec{p}^2-(M+\mu)^2][(p_0-t)^2-\vec{p}^2-\gamma^2\mu^2], \quad \text{если} \quad p_0+|\vec{p}| \le t\frac{\alpha}{\beta}$$

Таким образом доказано, что область $C_t(\gamma)$ содержит все вещественные точки (2.2).

Аналогичные рассуждения (с соответствующими упрощениями) приводят к той же самой области $C_t(\gamma)$ для случая, когда $2t \le M+\mu+\gamma\mu$. Повторяя подобные рассуждения для функции $\widetilde{\mathcal{F}}_a$, мы придем к аналитической функции $\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}}_a(\kappa)$, голоморфной в области $C_t(\gamma)$. Но, по доказанному, область $C_t(\gamma)$ содержит все вещественные точки (2.2) вместе с их (комплексными) окрестностями. Следовательно, в комплексной окрестности области (2.2) построенные функции $\widetilde{\mathcal{F}}_i(\kappa)$ голоморфны; по условию при вещественных p из области (2.2) эти функции совпадают как обобщенные и, следовательно, в силу их голоморфности совпадают в каждой точке. Поэтому функции $\widetilde{\mathcal{F}}_i(k)$; $i=t,a$ определяют фактически одну аналитическую функцию $\widetilde{\Phi}(k)$, голоморфную в области $\mathcal{C}_t$ и совпадающую при вещественных p из области (2.2) с функциями $\widetilde{\mathcal{F}}_i(p)$.

Теорема доказана полностью.

Отметим одно полезное для приложений следствие, установленное при доказательстве этой теоремы: в условиях теоремы функция $\widetilde{\Phi}(k)$ голоморфна в комплексной окрестности области (2.2).

Сформулированный результат был впервые установлен Н.Н.Боголюбовым (/4/ Математическое дополнение, теорема I); в дальнейшем этот результат был доказан другими методами в работах /22,5,6/. В /6/ такого типа теоремы названы теоремами " *edge of the wedge* ".

§ 3. Доказательство основной теоремы

Доказательство основной теоремы будем проводить по схеме доказательства теорем Ш и П в работе /5/, используя при этом вместо теоремы I из /5/ доказанную в § 2 вспомогательную теорему. Предварительно кратко изложим ту часть доказательства, которая в некоторой степени повторяет соответствующие рассуждения в работе /5/.

Ввиду трансляционной инвариантности обобщенных функций $\mathcal{F}_{ij}(x_1,\dots x_4)$ их можно рассматривать как обобщенные функции трех 4-векторов, например:

$$y_1 = x_1 - x_3 \ , \ y_2 = x_4 - x_2 \ , \ y_3 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$$

Это приводит нас к функциям

$$\Phi_{ij}(y_1,y_2,y_3) = \Phi_{ij}(x_1-x_3,\, x_4-x_2,\, x_1-x_2+x_3-x_4) = \mathcal{F}_{ij_1}(x_1,\dots x_4) \tag{3.1}$$

$$\widetilde{\Phi}_{ij}(q_1,q_2,q_3) = 2^4\, \widetilde{\mathcal{F}}_{ij_1}(q_1+q_3,\, -q_2-q_3,\, q_3-q_1,\, q_2-q_3) \tag{3.2}$$

где $j_1 = t$, если $j=a$ и $j_1=a$, если $j=t$. Положив $p_1 = q_1+q_3$, $p_2 = -q_2-q_3$, $p_3 = q_3-q_1$, $p_4 = q_2-q_3$, находим

$$q_3 = \frac{1}{2}(p_1+p_3)\,,\ p_1^2 = (q_1+q_3)^2,\ p_2^2 = (q_2+q_3)^2,\ p_3^2 = (q_3-q_1)^2,\ p_4^2 = (q_2-q_3)^2,\ (p_1+p_2)^2 = (q_1-q_2)^2 \tag{3.3}$$

В силу условий (I.4) и соотношений (3.3) функции $\widetilde{\Phi}_{ij}(q_1,\dots q_3)$ обращаются в нуль в области, где

$$q_3^2 < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2 \qquad \text{или} \qquad q_{30} < 0 \tag{3.4}$$

т.е. вне будущего светового конуса. Поэтому, а также на основании лоренцовской инвариантности функций $\widetilde{\Phi}_{ij}$ всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы вектор q_3 был равен:

$$q_3 = (t\,,\,0) \tag{3.5}$$

В этой системе координат обобщенные функции $\widetilde{\Phi}_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ будем записывать в виде $\widetilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$. Таким образом мы приходим к системе четырех обобщенных функций $f_{ij}(y_1, y_2, y_0)$ 9-ти переменных $y_{10}, \vec{y}_1, y_{20}, \vec{y}_2, y_0$, обладающих в силу (I.I) (I.3), (I.4) и (3.I)-(3.5) следующими свойствами:

I)

$$
\begin{aligned}
f_{rr} &= 0, \text{ если } y_1 \leqslant 0 \text{ или } y_2 \leqslant 0 \\
f_{ra} &= 0, \text{ если } y_1 \leqslant 0 \text{ или } y_2 \geqslant 0 \\
f_{ar} &= 0, \text{ если } y_1 \geqslant 0 \text{ или } y_2 \leqslant 0 \\
f_{aa} &= 0, \text{ если } y_1 \geqslant 0 \text{ или } y_2 \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

2)

$$\widetilde{f}_{rj} - \widetilde{f}_{aj} = 0, \ j = r, a, \text{ если } (q_{10}+t)^2 < \vec{q}_1^{\,2} + (M+\mu)^2, \ (q_{10}-t)^2 < \vec{q}_1^{\,2} + \gamma_1^2\mu^2 \tag{3.7}$$

$$\widetilde{f}_{ir} - \widetilde{f}_{ia} = 0, \ i = r, a, \text{ если } (q_{20}+t)^2 < \vec{q}_2^{\,2} + (M+\mu)^2, \ (q_{20}-t)^2 < \vec{q}_2^{\,2} + \gamma_2^2\mu^2 \tag{3.8}$$

3)

$$\widetilde{f}_{ij} = 0, \text{ если } t < \frac{M+\mu}{2}, \quad i, j = r, a. \tag{3.9}$$

4) Функции $\widetilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$ инвариантны относительно пространственных вращений и отражений векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$.

Из (3.6) и (3.7) заключаем, что для двух $(j = r, a)$ пар функций $\widetilde{f}_{rj}(q_1, q_2, t)$ и $\widetilde{f}_{aj}(q_1, q_2, t)$ относительно переменной q_1 выполнены условия вспомогательной теоремы. Применяя эту теорему, придем к функциям

$$\widetilde{\Phi}_j(\kappa_1, q_2, t), \quad j = r, a. \tag{3.10}$$

которые являются голоморфными относительно κ_1 в области $\mathcal{C}_t(\gamma_1)$ и обобщенными относительно (q_2, t). В силу (3.6), (3.8) и (3.9) построенные функции (3.10) опять удовлетворяют условиям вспомогательной теоремы по переменным q_2. Применяя снова эту теорему к функциям (3.10), построим функцию $\widetilde{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2, t)$, голоморфную по совокупности переменных (κ_1, κ_2) из области $\mathcal{C}_t(\gamma_1) \times \mathcal{C}_t(\gamma_2)$ и обобщенную относительно (вещественной) переменной t. Здесь мы воспользовались теоремой Гартогса (см., например,[7] гл.II), гласящей: если функция $f(z_1, \ldots z_n)$ голоморфна по каждой переменной при фиксированных остальных, то она голоморфна и по совокупности переменных $(z_1, \ldots z_n)$.

Полученная функция $\widetilde{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2, t)$ при вещественных $(\kappa_1, \kappa_2) = (q_1, q_2)$ из области (3.7)-(3.8) совпадает с функциями $\widetilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$.

Воспользуемся теперь условием инвариантности относительно пространственных вращений и отражений. В силу этого условия функция $\widetilde{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2, t)$ зависит от (κ_1, κ_2) лишь посредством пяти переменных:

$$\kappa_{10}, \ \kappa_{20}, \ \vec{\kappa}_1^{\,2}, \ \vec{\kappa}_2^{\,2}, \ \vec{\kappa}_1\vec{\kappa}_2$$

Вместо них можно ввести эквивалентную систему переменных $z(z_1, z_2, \ldots z_5)$, положив

$$z_1 = (\kappa_{10}+t)^2 - \vec{\kappa}_1^{\,2}, \ z_2 = (\kappa_{20}+t)^2 - \vec{\kappa}_2^{\,2}, \ z_3 = (\kappa_{10}-t)^2 - \vec{\kappa}_1^{\,2}, \ z_4 = (\kappa_{20}-t)^2 - \vec{\kappa}_2^{\,2}, \tag{3.11}$$

$$z_5 = (\kappa_{10} - \kappa_{20})^2 - (\vec{\kappa}_1 - \vec{\kappa}_2)^2.$$

так что
$$\widetilde{\varphi}(\kappa_1,\kappa_2;t) = \varphi(z_1,z_2,\ldots,z_5;t) \qquad (3.12)$$

Из (3.II) получаем

$$K_{10} = \frac{z_1 - z_3}{4t}, \quad K_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t}, \quad (\vec{K}_1-\vec{K}_2)^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2, \qquad (3.13)$$

$$\vec{K}_1^2 = t^2 - \frac{z_1+z_3}{2} + \left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2, \quad \vec{K}_2^2 = t^2 - \frac{z_2+z_4}{2} + \left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2$$

Таким образом, для доказательства основной теоремы достаточно в силу (I.6) показать, что каковы бы ни были числа t, τ и Δ^2 соответственно из промежутков $t \geqslant \frac{M+\mu}{2}$, $\tau \leqslant 0$ и из эллипса (I.7) найдется хотя бы одна (комплексная) точка (κ_1,κ_2), удовлетворяющая соотношениям

$$K_{j0} = \frac{M^2-\tau-\tau_j^\circ}{4t}, \quad \vec{K}_j^2 = t^2 - \frac{M^2+\tau+\tau_j^\circ}{2} + \left(\frac{M^2-\tau-\tau_j^\circ}{4t}\right)^2 \equiv \varphi^2(t,\tau+\tau_j^\circ), \quad (\vec{K}_1-\vec{K}_2)^2 = 4\Delta^2 + \left(\frac{\tau_1^\circ-\tau_2^\circ}{4t}\right)^2 \qquad (3.14)$$

$$j = 1,2$$

и принадлежащая области $\mathcal{C}_t(\gamma_1)\times\mathcal{C}_t(\gamma_2)$

Из (3.I4) следует, что комплексные векторы $\vec{K}_j = \vec{p}_j + i\vec{q}_j$ имеют ортогональные вещественные и мнимые части: $\vec{p}_j\vec{q}_j = 0$, j = I,2. Поэтому условия (3.I4) можно переписать в виде:

$$p_{i0} = \frac{M^2-\tau-\tau_i^\circ}{4t}, \quad q_{i0} = 0, \quad \vec{p}_i^2 - \vec{q}_i^2 = \varphi^2(t,\tau+\tau_i^\circ); \quad i=1,2. \qquad (3.15)$$

$$\vec{p}_1^2+\vec{p}_2^2-2|\vec{p}_1|\cdot|\vec{p}_2|\mu_1-\vec{q}_1^2-\vec{q}_2^2+2|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|\mu_2+2i|\vec{q}_1||\vec{p}_2|\nu_1+2i|\vec{p}_1|\cdot|\vec{q}_2|\nu_2 = 4\Delta^2+\left(\frac{\tau_1^\circ-\tau_2^\circ}{4t}\right)^2 \qquad (3.16)$$

где числа μ_i и ν_i, i = I,2 суть косинусы углов между соответствующими векторами, удовлетворяющие соотношениям:

$$\mu_1\nu_2+\nu_1\mu_2+\alpha_1\alpha_2 = 0, \quad \mu_i^2+\nu_i^2 = 1-\alpha_i^2, \quad |\mu_i|\leqslant 1, \quad |\nu_i|\leqslant 1, \quad |\alpha_i|\leqslant 1; \quad i=1,2. \qquad (3.17)$$

Исключая величины $|\vec{q}_i|$ из (3.I6), с помощью (3.I5) получим соотношение:

$$4\Delta^2 = \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)+\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)-\left(\frac{\tau_1^\circ-\tau_2^\circ}{4t}\right)^2 - 2i|\vec{p}_1|\sqrt{\vec{p}_2^2-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}\,\nu_2 +$$
$$+2\sqrt{\vec{p}_1^2-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)}\cdot\sqrt{\vec{p}_2^2-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}\,\mu_2 + 2i|\vec{p}_2|\sqrt{\vec{p}_1^2-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)}\,\nu_1 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\mu_1 \qquad (3.18)$$

Воспользуемся теперь вспомогательной теоремой из § 2. Выясним условия принадлежности к области $\mathcal{C}_t(\gamma)$ точек κ, удовлетворяющих условиям (3.I5), т.е. точек вида:

$$\kappa = \left[\frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t}, \; \vec{p}+i\vec{\lambda}\sqrt{\vec{p}^2-\varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)}\right], \qquad (3.19)$$

где $\vec{\lambda}$ - вещественный ортогональный к вектору $\vec{p}$ орт, а $\vec{p}$ - произвольный вещественный вектор такой, что[x)]

$$\max\left[0, \varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)\right] \le \vec{p}^{\,2} \tag{3.20}$$

В рассматриваемом случае $\varphi^2 \le 0$.

Из (I.9) следует, что неравенства (2.4) для точек (3.I9) всегда выполнены, если $\tau^\circ < \gamma^2\mu^2$. Условия (2.5) и (2.6) примут соответственно вид:

$$|\vec{p}| < \sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau^\circ) + \frac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau-\tau^\circ)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}} \equiv \mathcal{U}_1(t,\tau+\tau^\circ), \text{ если } \frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t} + |\vec{p}| \le t\,\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu} \tag{3.21}$$

$$\mathcal{U}_3(t,\tau+\tau^\circ) \equiv \frac{(2M+\mu)\mu}{4t} - \frac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau-\tau^\circ}\cdot\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau-\tau^\circ} <$$

$$< |\vec{p}| < \frac{(2M+\mu)\mu}{4t} + \frac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau-\tau^\circ}\cdot\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau-\tau^\circ} \equiv \mathcal{U}_2(t,\tau+\tau^\circ) \tag{3.22}$$

если

$$\frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t} + |\vec{p}| \ge t\,\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu}$$

Функция $\mathcal{U}_1(t,\tau)$ монотонно убывает с возрастанием τ. Поэтому условие

$$\min_{t \ge \frac{1}{2}(M+\mu)}\left[\left(t+\frac{M^2-\tau^\circ}{4t}\right)^2 - M^2 + \frac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau^\circ)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}\right] > 0 \tag{3.23}$$

обеспечивает положительность подкоренного выражения в (3.2I). Функция $\mathcal{U}_3(t,\tau)$ отрицательна при всех

$$t \ge \frac{1}{2}(M+\mu) \qquad \text{и} \qquad \tau \le \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

Поэтому ограничения снизу на $|\vec{p}|$ в (3.22) фактически нет.

Рассмотрим в 3-мерном пространстве переменных $(t,\tau,|\vec{p}|)$ три поверхности

$$|\vec{p}| = \mathcal{U}_1(t,\tau+\tau^\circ), \quad |\vec{p}| = \mathcal{U}_2(t,\tau+\tau^\circ), \quad |\vec{p}| = t\,\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu} - \frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t}$$

По построению (см. вспомогательную теорему) эти поверхности пересекаются по общей линии, проекция которой на плоскость $|\vec{p}| = 0$ дается уравнением

$$\mathcal{U}_1(t,\tau+\tau^\circ) = \mathcal{U}_2(t,\tau+\tau^\circ),$$

которое преобразуется к виду:

$$\tau+\tau^\circ = \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

---

x) При $\tau > \mu^2$ функция $\varphi^2(t,\tau)$ может стать отрицательной.

В силу сказанного условия (3.2I)-(3.22) можно переписать в форме

$$|\vec{p}| < \Psi(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) \tag{3.24}$$

где непрерывная функция Ψ определяется формулами (I.I0).

Таким образом, на основании (3.20) и (3.24) получен следующий результат: все точки (3.I9), для которых

$$\max\left[0,\ \varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)\right] \le \vec{p}^{\,2} < \Psi^2(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) \tag{3.25}$$

принадлежат области голоморфности $\mathcal{C}_t(\gamma)$.

Теперь выясним условия, которые обеспечивают непустоту области (3.25) при всех $\tau \le 0$ и $t \ge \frac{1}{2}(M+\mu)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\Psi^2(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) > 0 \quad , \quad \Psi^2(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau^\circ) > 0 \tag{3.26}$$

Из (I.9) и (I.I0) следует, что функции φ и Ψ убывают с возрастанием τ. Докажем, что $\Psi^2-\varphi^2$ убывает с возрастанием τ. Для первого выражения в (I.I0) это очевидно. Для второго выражения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Psi^2-\varphi^2\right) = \frac{1}{2t}\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right) + \frac{1}{8t^2}\,\frac{\tau-4t^2-(M+\mu)^2}{\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau}\cdot\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau}}\times$$

$$\times\left[(2M+\mu)\mu+\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau}\cdot\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau}\right], \text{ если } \quad \tau \le \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

Откуда

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Psi^2-\varphi^2\right) < -\frac{(2M+\mu)\mu}{8t^2} \qquad \text{если} \qquad \tau \le \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

Таким образом, условия (3.26) можно переписать в виде:

$$\Psi^2(t,\gamma,\tau^\circ) > 0 \quad , \quad \Psi^2(t,\gamma,\tau^\circ) - \varphi^2(t,\tau^\circ) > 0$$

Но эти последние неравенства обеспечиваются условием (3.23).

Итак, условие (3.23) обеспечивает непустоту области (3.25). Применим полученный результат к точкам K_i, удовлетворяющим соотношениям (3.I5). В силу (3.25) эти точки будут принадлежать области голоморфности $\mathcal{C}_t(\gamma_1)\times\mathcal{C}_t(\gamma_2)$ в том случае, если одновременно выполнены неравенства

$$\max\left[0,\ \varphi^2(t,\tau+\tau_i^\circ)\right] \le \vec{p}^{\,2} < \Psi^2(t,\gamma_i,\tau+\tau_i^\circ)\ ; \quad i=1,2\,. \tag{3.27}$$

Неравенства (I.5) обеспечивают непустоту области (3.27).

В силу изложенного к области голоморфности $\mathcal{D}_t$ функции Φ принадлежат те значения Δ^2 (при данном $\tau \leqslant 0$), которые могут быть представлены в виде (3.18) хотя бы при одном наборе чисел μ_i, ν_i, $|\vec{p}_i|$, $i=1,2$, удовлетворяющих соответственно условиям (3.17) и (3.27). Чтобы получить границу соответствующей области, необходимо, очевидно, положить в (3.18)

$$-\mu_1 = \mu_2 = \cos\delta \quad , \quad \nu_1 = \nu_2 = \sin\delta \quad , \quad |\vec{p}_i| = \psi(t, \gamma_i, \tau+\tau_i^\circ)$$

(условия (3.17) при этом будут выполнены при $\alpha_i = 0$). Таким образом, мы приходим к эллипсу (I.7).

Докажем теперь, что промежуток (I.II) принадлежит всем эллипсам (I.7). Ясно, что всем эллипсам (I.7) принадлежат вещественные Δ^2 из промежутка

$$\max_{\substack{t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu) \\ \tau \leqslant 0}} \left[A(t,\tau) - B(t,\tau) \right] < \Delta^2 < \min_{\substack{t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu) \\ \tau \leqslant 0}} \left[A(t,\tau) + B(t,\tau) \right] \tag{3.28}$$

Покажем, что минимум в правой части (3.28) реализуется при $\tau = 0$. Для этого достаточно установить, что при любом $t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu)$ функции A и B монотонно возрастают с убыванием τ при всех $\tau \leqslant 0$. Но это утверждение непосредственно следует из (I.8) и из установленных свойств функций ψ, φ, и $\psi^2 - \varphi^2$.

Основная теорема доказана полностью

Докажем теперь, что если параметры γ_i и τ_i° удовлетворяют соотношениям (I.14), то $\Delta^2_{min} = 0$. Так как

$$\lim_{t \to \infty} \left[A(t,\tau) - B(t,\tau) \right] = 0$$

то для доказательства достаточно установить неравенство

$$A(t,\tau) - B(t,\tau) \leqslant 0 \tag{3.29}$$

при всех $t \geqslant \frac{1}{2}(M+\mu)$ и $\tau \leqslant 0$. Неравенство (3.29) будет обеспечено, если мы докажем выполнение такого неравенства:

$$\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)\left[\psi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\right] - M^2\left(\frac{\tau_1^\circ - \tau_2^\circ}{4t}\right)^2 + \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\left[\psi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)\right] \tag{3.30}$$

$$+ 2\sqrt{\psi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)} \cdot \sqrt{\psi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)} \cdot \left[\left(t + \frac{M^2 - \tau - \tau_1^\circ}{4t}\right)\left(t + \frac{M^2 - \tau - \tau_2^\circ}{4t}\right) - M^2\right] \geqslant$$

При доказательстве основной теоремы было установлено, что функции φ, ψ и $\psi^2 - \varphi^2$ монотонно убывают с возрастанием τ. Условие $\tau_i^\circ \leqslant \mu^2$ влечет неотрицательность функции φ. Следовательно левая часть неравенства (3.30) монотонно убывает с возрастанием τ. Поэтому неравенство (3.30) достаточно установить при $\tau = 0$. Но тогда ограничение снизу на τ_i° в (I.14) показывает, что функции ψ вычисляются по первой из формул (I.I). Нетрудно проверить, что функции $\psi^2(t,\gamma,\tau)$ возрастают с возрастанием γ при рассматриваемых t и τ. Поэтому неравенство (3.30) достаточно доказать при $\gamma_1=\gamma_2=2$. Но тогда левая часть (3.30) будет симметричной функцией τ_1° и τ_2°. Учитывая свойство монотонности по τ_i°, заключаем, что неравенство (3.30) достаточно доказать при

$$\tau=0\,,\ \gamma_1=\gamma_2=2\,,\ \tau_1^\circ=\mu^2\,,\ -9\frac{M+\mu}{M-2\mu}\mu^2\leq\tau_2^\circ\leq\mu^2$$

При этих значениях параметров неравенство (3.30) примет вид

$$\left[\left(t+\frac{M^2-\mu^2}{4t}\right)\sqrt{4\mu^2-\tau_2^\circ}+\left(t+\frac{M^2-\tau_2^\circ}{4t}\right)\sqrt{3}\,\mu\right]^2\geq M^2\left(\sqrt{3}\,\mu+\sqrt{4\mu^2-\tau_2^\circ}\right)^2+\frac{M^2(\mu^2-\tau_2^\circ)^2}{\mu(2M+\mu)}\,\frac{4t^2\cdot(M-\mu)^2}{16t^2}$$

справедливость которого проверяется непосредственно.

§ 4. Анализ антиэрмитовой части амплитуды в области импульсов $p_3^2<\gamma_1^2\mu^2,\ p_4^2<\gamma_2^2\mu^2$

Выше мы рассматривали такие физические процессы, амплитуда которых выражалась или через блок фоторождения, или через блок комптон-эффекта. В целях единого описания удобно рассмотреть блок, в котором два конца являются реальными нуклонными концами $(p^2=p'^2=M^2)$, а другие два конца - бозонными, причем бозонные концы могут быть как фотонными, так и мезонными $(k^2=\tau_1\,,\ q^2=\tau_2)$. Параметры τ_1 и τ_2 принимают отрицательные и положительные значения. Антиэрмитова часть амплитуды (см. § 7) рассматриваемого блока может быть записана в форме:

$$(2\pi)^4\delta(k+p-q-p')A_{\nu\rho}\left(\frac{k+q}{2}\right)=\sqrt{\frac{p_0p_0'}{4m^2}}\iint dx\,dy\,e^{i(qx-ky)}\langle p',s'|\,[j_\rho(x),i_\nu(y)]\,|p,s\rangle \qquad (4.I)$$

Поле, соответствующее начальному концу, обозначим через $A_\nu(y)$, а конечному - через $\varphi_\rho(x)$. Ток $j_\rho(x)$ получен варьированием по полю $\varphi_\rho(x)$, а $i_\nu(y)$ - по полю $A_\nu(y)$. Поскольку мы будем рассматривать фотонные и мезонные концы, поля $\varphi_\rho(x)$ и $A_\nu(y)$ можно считать вещественными, а токи $j_\rho(x)$ и $i_\nu(y)$ эрмитовыми. В данном параграфе мы покажем, что в некоторой области импульсов p_3, p_4, антиэрмитова часть может быть представлена в виде суммы функций со следующими свойствами запаздывания:

$$D^{(1)}_{\nu\rho}(x_1,\dots x_4)=0,\ \text{если}\quad x_1\lesssim x_3\quad\text{или}\quad x_2\lesssim x_4$$

$$D^{(2)}_{\nu\rho}(x_1,\dots x_4)=0,\ \text{если}\quad x_2\lesssim x_3\quad\text{или}\quad x_1\lesssim x_4$$

$$D^{(1)}_{\rho\nu}(x_1,\dots x_4)=0,\ \text{если}\quad x_1\lesssim x_4\quad\text{или}\quad x_2\lesssim x_3$$

$$D^{(2)}_{\rho\nu}(x_1,\dots x_4)=0,\ \text{если}\quad x_2\lesssim x_4\quad\text{или}\quad x_1\lesssim x_3$$

Такое представление даст возможность в дальнейшем воспользоваться основной теоремой и установить некоторые свойства аналитичности антиэрмитовой части. Выводя нуклонные операторы, выражение (4.I) можно представить в виде:

$$(2\pi)^4\delta(p'-p+p_3+p_4)\,A_{\nu\mu}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)=\frac{1}{2}\bar{u}_{s'}(p')\int dx_1\ldots dx_4\,D(x_1\ldots x_4)\exp[i(-px_1+p'x_2+p_3x_3+p_4x_4)]u_s(p) \quad (4.2)$$

где

$$D(x_1,\ldots x_4)=\langle 0/\frac{\delta^2}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\,\delta\Psi(x_1)}[j_\mu(x_4),\,i_\nu(x_3)]\,/0\rangle$$

Функция $D(x_1,\ldots\ldots x_4)$ является трансляционно-оинвариантной функцией.

$$D(x_1+a,\,x_2+a,\,x_3+a,\,x_4+a)=D(x_1,x_2,x_3,x_4) \quad (4.3)$$

На основании этого свойства выражение (4.2) может быть записано в виде:

$$A_{\nu\mu}\left(\frac{\kappa+q}{2}\right)=\frac{1}{2}\bar{u}_{s'}(p')\,\widetilde{D}(-p,p'-\kappa,q)\,u_s(p) \quad (4.4)$$

где

$$(2\pi)^4\delta(p_1+\cdots+p_4)\,\widetilde{D}(p_1,\ldots p_4)=\int D(x_1,\ldots x_4)\exp[i(p_1x_1+\cdots\cdots+p_4x_4)]\,dx_1\ldots dx_4 \quad (4.5)$$

Исследуем зависимость $\widetilde{D}(p_1,\ldots p_4)$ от аргументов p_3 и p_4. Для этой цели представим $D(x_1,\ldots x_4)$ в форме:

$$D(x_1,\ldots x_4)=\sum_{1\le a\le 4}(1-P_{\nu\mu}P_{34})\,D^{a}(x_1,\ldots\ldots x_4) \quad (4.6)$$

где

$$D^{(1)}(x_1,\ldots x_4)=\langle 0/\frac{\delta j_\mu(x_4)}{\delta\bar{\Psi}(x_2)}\cdot\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\Psi(x_1)}/0\rangle$$

$$D^{(2)}(x_1,\ldots x_4)=-\langle 0/\frac{\delta j_\mu(x_4)}{\delta\Psi(x_1)}\;\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\bar{\Psi}(x_2)}/0\rangle \quad (4.7)$$

$$D^{(3)}(x_1,\ldots\ldots x_4)=\langle 0/\frac{\delta^2 j_\mu(x_4)}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\,\delta\Psi(x_1)}\cdot i_\nu(x_3)/0\rangle$$

$$D^{(4)}(x_1,\ldots\ldots x_4)=-\langle 0/i_\nu(x_3)\cdot\frac{\delta^2 j_\mu(x_4)}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\,\delta\Psi(x_1)}/0\rangle$$

P_{34} – оператор перестановки индексов 3 и 4, а $P_{\nu\mu}$ – оператор перестановки токов.

На основании (4.5) совершенно очевидно, что аналогичное разбиение имеет место и для функции $\widetilde{D}(p_1,\ldots p_4)$. Покажем теперь, что два последних члена $\widetilde{D}^{(3)}(p_1,\ldots p_4)$ и $\widetilde{D}^{(4)}(p_1,\ldots p_4)$ не дают вклада в выражение для $\widetilde{D}(p_1,\ldots\ldots p_4)$. В этом слегко убедиться на примере функции $D^{(3)}(x_1,\ldots x_4)$. Действительно, разлагая по полной системе векторов еостояний, функцию $D^{(3)}(x_1,\ldots x_4)$ можно записать в виде:

$$D^{(3)}(x_1,\ldots x_4)=\langle 0/\frac{\delta^2 j_\mu(x_4)}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\,\delta\Psi(x_1)}/0\rangle\langle 0/i_\nu(x_3)/0\rangle+$$
$$+\sum_n\int d\vec{\kappa}\,\langle 0/\frac{\delta^2 j_\mu(x_4)}{\delta\bar{\Psi}(x_2)\,\delta\Psi(x_1)}/n,\vec{\kappa}\rangle\langle n,\vec{\kappa}/i_\nu(x_3)/0\rangle \quad (4.8)$$

Можно показать, что матричные элементы от оператора электромагнитного тока равны нулю для вакуумного и одномезонного состояний:

$$\langle o / i_\nu(0) / o \rangle = 0 \quad , \quad \langle \pi / i_\nu(0) / o \rangle = 0 \quad , \text{ а} \tag{4.9a}$$

матричные элементы оператора мезонного тока равны нулю для вакуумного, одномезонного и двумезонного состояний:

$$\langle o / j_\rho(0) / o \rangle = 0 \ , \ \langle \pi / j_\rho(0) / o \rangle = 0 \ , \ \langle 2\pi / j_\rho(0) / o \rangle = 0 \tag{4.9в}$$

Представляя матричный элемент $\langle n, \vec{k} / i_\nu(x_3) / o \rangle$ в виде:

$$\langle n, \vec{k} / i_\nu(x_3) / o \rangle = e^{i K_n x_3} \langle n, \vec{k} / i_\nu(0) / o \rangle \tag{4.10}$$

мы убеждаемся в том, что в сумме (4.8) участвуют лишь состояния с $M_n > \gamma_1 \mu$ и, следовательно, в $D^{(3)}$ дают вклад состояния с импульсом

$$p_3^2 > \gamma_1^2 \mu^2$$

Таким образом

$$D^{(3)}(p_1, \dots p_4) = 0, \text{ если } \quad p_3^2 < \gamma_1^2 \mu^2 \tag{4.11}$$

Заметим, что если начальный бозонный конец является фотонным, то $\gamma_1 = 2$, а если мезонным, то $\gamma_1 = 3$. Аналогичные рассуждения могут быть проведены и для функции $\widetilde{D}^{(4)}(p_1, \dots p_4)$.

$$D^{(4)}(p_1, \dots p_4) = 0, \text{ если } \quad p_3^2 < (\gamma_1 \mu)^2 \tag{4.12}$$

В сумме (4.6) кроме функций $D^{(3)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и $D^{(4)}(x_1, \dots x_4)$ имеются функции, полученные из $D^{(3)}$ и $D^{(4)}$ перестановкой токов и индексов 3 и 4. Эти функции имеют следующий вид:

$$\langle o / \frac{\delta^2 i_\nu(x_3)}{\delta \overline{\psi}(x_2)\, \delta \psi(x_1)} j_\rho(x_4) / o \rangle \ , \quad \langle o / j_\rho(x_4) \frac{\delta^2 i_\nu(x_3)}{\delta \overline{\psi}(x_2)\, \delta \psi(x_1)} / o \rangle$$

Разлагая их по полной системе векторов состояний и учитывая, что матричные элементы от оператора мезонного тока равны нулю для вакуумного, одномезонного и двумезонного состояний, а матричные элементы электромагнитного тока равны нулю для вакуумного и одномезонного состояний, получим:

$$\begin{aligned} P_{x\rho} P_{34} \widetilde{D}^{(3)}(p_1, \dots p_4) &= 0, \text{ если } \quad p_4^2 < (\gamma_2 \mu)^2 \\ P_{x\rho} P_{34} \widetilde{D}^{(4)}(p_1, \dots p_4) &= 0, \text{ если } \quad p_4^2 < (\gamma_2 \mu)^2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Заметим, что $\gamma_2 = 3$ для мезонного конца и $\gamma_2 = 2$ для фотонного конца. Учитывая результаты (4.11)-(4.13), функция D может быть представлена в виде:

$$\tilde{D}(p_1, \ldots p_7) = \sum_{a=1,2} (1 - P_{37} P_{72}) \tilde{D}^{(a)}(p_1, \ldots p_7) \tag{4.14}$$

если $\qquad p_3^2 < \gamma_1^2 \mu^2 \quad , \quad p_7^2 < \gamma_2^2 \mu^2 .$

§ 5. Построение причинных функций $\mathcal{F}_{ra}, \mathcal{F}_{ar}, \mathcal{F}_{aa}$ и их свойства

Из (4.14) мы видим, что функция D представлена в виде суммы функций со свойствами запаздывания, приведенными ранее. Поскольку эти функции отличаются друг от друга перестановкой индексов и токов исследования аналитических свойств их вполне аналогично, поэтому мы рассмотрим одну из них.

Например: $\qquad \mathcal{F}_{rr}(x_1, x_2, x_3, x_7) = D^{(1)}(x_1, x_2, x_3, x_7)$

Чтобы воспользоваться основной теоремой, необходимо к функции $\mathcal{F}_{rr}$ достроить причинные функции $\mathcal{F}_{ra}, \mathcal{F}_{ar}, \mathcal{F}_{aa}$. Это построение легко осуществить, если использовать принцип причинности в форме Н.Н.Боголюбова. В качестве функций, удовлетворяющих условию (I.I) основной теоремы, можно взять:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{rr}(x_1, \ldots x_7) &= \langle 0 / \frac{\delta j_\rho(x_1)}{\delta \bar{\psi}(x_2)} \cdot \frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta \psi(x_7)} / 0 \rangle \\
\mathcal{F}_{ar}(x_1, \ldots x_7) &= \langle 0 / \frac{\delta j_\rho(x_1)}{\delta \bar{\psi}(x_2)} \cdot \frac{\delta \bar{\Lambda}(x_7)}{\delta A_\nu(x_3)} / 0 \rangle \\
\mathcal{F}_{ra}(x_1, \ldots x_7) &= \langle 0 / \frac{\delta \Lambda(x_2)}{\delta \varphi_\rho(x_1)} \cdot \frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta \psi(x_7)} / 0 \rangle \\
\mathcal{F}_{aa}(x_1, \ldots x_7) &= \langle 0 / \frac{\delta \Lambda(x_2)}{\delta \varphi_\rho(x_1)} \cdot \frac{\delta \bar{\Lambda}(x_7)}{\delta A_\nu(x_3)} / 0 \rangle
\end{aligned} \tag{5.I}$$

где

$$\Lambda(x) = i \frac{\delta S}{\delta \bar{\psi}(x)} \overset{+}{S} \quad , \quad \bar{\Lambda}(x) = i \frac{\delta S}{\delta \psi(x)} \overset{+}{S}$$

Первый индекс означает запаздывание или опережение по переменным (x_1, x_2), а второй индекс - по переменным (x_3, x_7) . Для того, чтобы показать, что функции $\mathcal{F}_{ij}$ удовлетворяют условиям (I.3), нам необходимо будет воспользоваться следующими очевидными тождествами:

$$\frac{\delta j_\rho(x_1)}{\delta \bar{\psi}(x_2)} - \frac{\delta \Lambda(x_2)}{\delta \varphi_\rho(x_1)} = i \left[j_\rho(x_1), \Lambda(x_2) \right] \quad , \quad \frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta \psi(x_7)} - \frac{\delta \bar{\Lambda}(x_7)}{\delta A_\nu(x_3)} = i \left[i_\nu(x_3), \bar{\Lambda}(x_7) \right] \tag{5.2}$$

С их помощью мы получим, например, для второго из условий (I.3)

$$\mathcal{F}_{22}(x_1,\dots x_4) - \mathcal{F}_{2a}(x_1,\dots x_4) = i\,\langle o / j_\rho(x_1)\Lambda(x_2)\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} - \Lambda(x_2) j_\rho(x_1)\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} / o\rangle$$

С помощью теоремы полноты первый из этих членов может быть представлен в виде:

$$\langle o / j_\rho(x_1)\Lambda(x_2)\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} / o\rangle = \sum_n{}' \int d\vec{K}\,\langle o / j_\rho(x_1) / n,\vec{K}\rangle\langle n,\vec{K} / \Lambda(x_2)\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} / o\rangle$$

а второй

$$\langle o / \Lambda(x_2) j_\rho(x_1)\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} / o\rangle = \sum_n{}' \int d\vec{K}\,\langle o / \Lambda(x_2) / n,\vec{K}\rangle\langle n,\vec{K} / j_\rho(x_1)\frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} / o\rangle$$

Поскольку матричные элементы оператора мезонного тока равны нулю для вакуумного, одномезонного и двумезонного состояний, а матричные элементы электромагнитного тока равны нулю для вакуумного и одномезонного состояний, мы видим, что Фурье-образ от первого члена равен нулю, если $p_1^2 < \gamma_2^2\mu^2$. Из соображений сохранения нуклонного заряда матричные элементы оператора нуклонного тока $\Lambda(x)$ равны нулю для безнуклонных состояний. Можно показать, что матричный элемент оператора $\Lambda(o)$ равен нулю и для однонуклонного состояния. Таким образом Фурье-образ второго члена равен нулю, если $p_2^2 < (M+\mu)^2$.

Итак,

$$\tilde{\mathcal{F}}_{22}(p_1,\dots p_4) - \tilde{\mathcal{F}}_{2a}(p_1,\dots p_4) = 0,\ \text{если}\quad p_2^2 < (M+\mu)^2 \quad\text{и}\quad p_1^2 < \gamma_{2}^2\mu^2 \tag{5.3}$$

Совершенно аналогично можно показать, что:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{a2}(p_1,\dots p_4) - \tilde{\mathcal{F}}_{aa}(p_1,\dots p_4) = 0,\ \text{если}\quad p_2^2 < (M+\mu)^2 \quad\text{и}\quad p_1^2 < \gamma_2^2\mu^2 \tag{5.4}$$

С помощью второго тождества (5.2) можно убедиться в том, что:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{1j}(p_1,\dots p_4) - \tilde{\mathcal{F}}_{aj}(p_1,\dots p_4) = 0,\ \text{если}\quad p_1^2 < (M+\mu)^2 \quad\text{и}\quad p_3^2 < \gamma_1^2\mu^2 \tag{5.5}$$

Нам осталось проверить выполнение условий (I.4). Разлагая выражение $\mathcal{F}_{ij}$ по полной системе состояний вектора энергии-импульса, можно убедиться, что функции $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}$ не удовлетворяют условию (I.4) из-за наличия однонуклонного промежуточного состояния. Действительно,

$$\mathcal{F}_{22}(x_1,\dots x_4) = \sum_n{}' \int d\vec{K}\,\langle o / \frac{\delta j_\rho(x_1)}{\delta\bar{\psi}(x_2)} / n,\vec{K}\rangle\langle n,\vec{K} / \frac{\delta i_\nu(x_3)}{\delta\psi(x_4)} / o\rangle \tag{5.6}$$

В силу закона сохранения нуклонного заряда в сумму (5.6) могут войти только состояния с одним нуклоном, одним нуклоном и одним мезоном и т.д.

$$\mathcal{F}_{rr}(x_1,\dots x_r) = \int d\vec{k}\, e^{ik(x_3-x_2)} \langle 0 / \frac{\delta j_\rho(x_r-x_2)}{\delta\bar\psi(0)} / 1,\vec{k}\rangle\langle 1,\vec{k} / \frac{\delta i_\nu(0)}{\delta\psi(x_1-x_3)} /0\rangle + \tag{5.7}$$

$$+\sum_{(M_n \geq M+\mu)} \int d\vec{k}_n\, e^{ik_n(x_3-x_2)} \langle 0 / \frac{\delta j_\rho(x_r-x_2)}{\delta\bar\psi(0)} / n,\vec{k}_n\rangle\langle n,\vec{k}_n / \frac{\delta i_\nu(0)}{\delta\psi(x_1-x_3)} /0\rangle$$

где

$$K_0 = \sqrt{M^2+\vec{k}^2}\ ,\ K_n^2 \geq (M+\mu)^2\ ,\ K_n^0 > 0$$

Легко видеть, что импульс промежуточного состояния равен:

117

$$K_n = -(P_1+P_3) \tag{5.8}$$

Совершенно очевидно, что Фурье-образ функции $\mathcal{F}_{rr}(x_1,\dots x_r)$ не удовлетворяет условию (I.4). Однако, если умножить Фурье-образ $\tilde{\mathcal{F}}_{rr}(P_1,\dots P_r)$ на выражение вида:

$$[(P_1+P_3)^2 - M^2] \tag{5.9}$$

то однонуклонное состояние будет исключено, а построенная таким образом функция будет удовлетворять условию (I.4). В координатном представлении это сведется к тому, что мы вместо функции $\mathcal{F}_{rr}(x_1,\dots x_r)$ будем рассматривать функцию

$$[M^2 + (\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3})^2]\mathcal{F}_{rr}(x_1,\dots x_r) \tag{5.10}$$

Аналогичная процедура должна быть проделана и с функциями

$$\mathcal{F}_{ra}(x_1,\dots x_r)\ ,\ \mathcal{F}_{ar}(x_1,\dots x_r)\ ,\ \mathcal{F}_{aa}(x_1,\dots x_r)$$

Итак, нами установлено, что функции

$$[M^2 + (\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3})^2]\mathcal{F}_{ij}(x_1,\dots x_r) \tag{5.11}$$

удовлетворяют всем условиям основной теоремы. Следовательно, Фурье-образ функции (5.10) может быть представлен на основании основной теоремы и примечания А в виде:

$$[M^2-(P_1+P_3)^2]\tilde{D}^{(1)}(P_1,\dots P_r) = \sum_\lambda P_{\zeta}^{\alpha_1}\dots P_{\zeta}^{\alpha_r}\, \phi_\lambda^{(1)}(P_1^2,\dots; (\tfrac{P_1+P_3}{2})^2)\ , \tag{5.12}$$

если

$$(P_1+P_3)^2 \geq (M+\mu)^2 \quad и \quad P_{10}+P_{30} \leq 0$$

Совершенно аналогичным путем легко получить:

$$[M^2-(P_1+P_r)^2]\tilde{D}^{(2)}(P_1,\dots P_r) = \sum_\lambda P_{\zeta}^{\alpha_1}\dots P_{\zeta}^{\alpha_r}\, \phi_\lambda^{(2)}(P_1^2,\dots; (\tfrac{P_1+P_r}{2})^2)\ , \tag{5.13}$$

если $(p_1+p_4)^2 \geqslant (M+\mu)^2$ и $p_{10}+p_{40} \geqslant 0$

$$\left[M^2-(p_1+p_4)^2\right] p_{\nu\rho}\, p_{34}\, \tilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_4) = \sum_\lambda p_{i_1}^{d_1}\dots p_{i_s}^{d_s}\, \phi'^{(1)}_\lambda\left(p_1^2,\dots;\left(\frac{p_1+p_4}{2}\right)^2\right), \tag{5.14}$$

если $(p_1+p_4)^2 \geqslant (M+\mu)^2$ и $p_{10}+p_{40} \leqslant 0$

$$\left[M^2-(p_1+p_3)^2\right] p_{\nu\rho}\, p_{34}\, \tilde{D}^{(2)}(p_1,\dots p_4) = \sum_\lambda p_{i_1}^{d_1}\dots p_{i_s}^{d_s}\, \phi'^{(2)}_\lambda\left(p_1^2,\dots;\left(\frac{p_1+p_3}{2}\right)^2\right), \tag{5.15}$$

если $(p_1+p_3)^2 \geqslant (M+\mu)^2$ и $p_{10}+p_{30} \geqslant 0$

Заметим, что в области, где неравенства, входящие в (5.12)-(5.15) не выполняются, функции равны нулю, т.е.

$$\left[M^2-(p_1+p_3)^2\right] \tilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_4) = 0 \quad , \text{ если } \quad (p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2$$

или $p_{10}+p_{30} > 0$.

$$\left[M^2-(p_1+p_4)^2\right] \tilde{D}^{(2)}(p_1,\dots p_4) = 0 \quad , \text{ если } \quad (p_1+p_4)^2 < (M+\mu)^2$$

или $p_{10}+p_{40} < 0$.

$$\left[M^2-(p_1+p_4)^2\right] p_{\nu\rho}\, p_{34}\, \tilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_4) = 0 \quad , \text{ если } \quad (p_1+p_4)^2 < (M+\mu)^2$$

или $p_{10}+p_{40} > 0$.

$$\left[M^2-(p_1+p_3)^2\right] p_{\nu\rho}\, p_{34}\, \tilde{D}^{(2)}(p_1,\dots p_4) = 0 \quad , \text{ если } \quad (p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2$$

или $p_{10}+p_{30} < 0$.

Согласно основной теоремы функции $\phi^{(1)}_\lambda$, $\phi'^{(2)}_\lambda$; $\phi'^{(1)}_\lambda$, $\phi^{(2)}_\lambda$ являются аналитическими относительно первых пяти переменных в области $\mathcal{D}_+$ и обобщенными относительно шестой переменной. Поскольку антиэрмитовая часть выражается через эти функции, она,как мы увидим позже, также обладает некоторыми аналитическими свойствами.

§ 6. Аналитические свойства антиэрмитовой части амплитуды

В настоящем параграфе с помощью представлений (5.I2)-(5.I6) будут изучены аналитические свойства антиэрмитовой части по переменной τ (см. основную теорему) и передачи импульса Δ^2. Эти свойства нам понадобятся для доказательства дисперсионных соотношений. При получении дисперсионных соотношений обычно пользуются Брейтовской системой, в которой сумма импульсов нуклона до и после реакции равна нулю $\vec p + \vec p\,' = 0$. Поэтому в дальнейшем мы будем работать в этой системе отсчета. Импульсы начального и конечного бозонов в этой системе могут быть (см. § 8) представлены в виде:

$$\vec K = \lambda \vec e - (1+\epsilon)\vec p \quad , \quad \vec q = \lambda \vec e + (1-\epsilon)\vec p \tag{6.I}$$

$$4\epsilon \vec p^{\,2} = \tau_2 - \tau_1 \quad , \quad \lambda = \sqrt{E^2 - (1-\epsilon)^2 \vec p^{\,2} - \tau_2} \ .$$

где $\vec e$ - единичный вектор, ортогональный импульсу нуклона $\vec p$, а E - энергия бозона.

Заметим, что в Брейтовской системе отсчета $\Delta^2 = \vec p^{\,2}$. С помощью формул (6.I) мы можем найти следующие выражения для величин, входящих в (5.I2)-(5.I6).

$$p_1^2 = (-p)^2 = M^2,\ p_2^2 = p'^2 = M^2,\ p_3^2 = (-k)^2 = \tau_1 \ ,\ p_4^2 = q^2 = \tau_2 \ ,\ (p_1+p_2)^2 = (-p+p')^2 = -4\vec p^{\,2}$$

$$(p_1+p_3)^2 = M^2 + 2\vec p^{\,2} + 2E\sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} + \frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2) \tag{6.2}$$

$$(p_1+p_4)^2 = M^2 + 2\vec p^{\,2} - 2E\sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} + \frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)$$

$$(p_{10}+p_{30}) = -E - \sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} \ , \quad (p_{10}+p_{40}) = E - \sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} \ ;$$

На основании (6.2) неравенства, входящие в (5.I2)-(5.I5), могут быть записаны в виде:

$$E \geqslant E_c \quad \text{и} \quad E \geqslant -\sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} \quad \text{вместе} \quad (p_1+p_3)^2 \geqslant (M+\mu)^2 \ \text{и} \ p_{10}+p_{30} \leqslant 0 \tag{6.3}$$

$$E \leqslant -E_c \quad \text{и} \quad E \geqslant \sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} \quad \text{вместе} \quad (p_1+p_4)^2 \geqslant (M+\mu)^2 \ \text{и} \ p_{10}+p_{40} \geqslant 0 \tag{6.4}$$

$$E \leqslant -E_c \quad \text{и} \quad E \leqslant \sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} \quad \text{вместе} \quad (p_1+p_4)^2 \geqslant (M+\mu)^2 \ \text{и} \ p_{10}+p_{40} \leqslant 0 \tag{6.5}$$

$$E \geqslant E_c \quad \text{и} \quad E \leqslant -\sqrt{M^2+\vec p^{\,2}} \quad \text{вместе} \quad (p_1+p_3)^2 \geqslant (M+\mu)^2 \ \text{и} \ p_{10}+p_{30} \geqslant 0 \tag{6.6}$$

где

$$\sqrt{M^2+\vec p^{\,2}}\, E_c = M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - \vec p^{\,2} - \frac{1}{4}(\tau_1+\tau_2)$$

Для вещественных значений τ_1 и τ_2 и $\vec p^{\,2}$, лежащих в области аналитичности $\mathcal{D}_1$ (см. основную теорему), величина E_c всегда положительна. Поэтому неравенства (6.4) взаимно исключают друг друга. Это приводит к тому, что функция $\widetilde{D}^{(3)}(p_1,\dots p_r)$ не дает вклада в полный Фурье-образ $\widetilde{D}(p_1,\dots p_r)$.

В силу того, что неравенства (6.6) также не совместимы, функция $p_{\nu\rho}p_{s\gamma}\widetilde{D}^{(2)}(p_1,\dots p_r)$ тоже не дает вклада в Фурье-образ $\widetilde{D}(p_1,\dots p_r)$. Таким образом в Фурье-образ $\widetilde{D}(p_1,\dots p_r)$ дают вклад лишь функции $\widetilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_r)$ и $p_{\nu\rho}p_{s\gamma}\widetilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_r)$. В нашей системе координат представления (5.12) и (5.14) для этих функций могут быть записаны в форме:

$$-2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,(E+E_p)\,\widetilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_r) = \sum_\lambda p_{i_1}^{\alpha_1}\dots p_{i_s}^{\alpha_s}\,\Phi_\lambda\!\left(M^2; M^2; \tau_1, \tau_2, -4\vec{p}^2; M^2+2\vec{p}^2+2p^0E+\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)\right) \tag{6.7}$$

если $E \geqslant E_c$

$$2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,(E-E_p)\,p_{\nu\rho}p_{s\gamma}\,\widetilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_r) = \sum_\lambda p_{i_1}^{\alpha_1}\dots p_{i_s}^{\alpha_s}\,\Phi'_\lambda\!\left(M^2; M^2; \tau_1, \tau_2, -4\vec{p}^2; M^2+2\vec{p}^2-2p^0E+\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)\right) \tag{6.8}$$

если $E \leqslant -E_c$

Заметим, что первая из этих функций равна нулю в области $E < E_c$, а вторая - в области $E > -E_c$. Подставляя в (4.14) выражения для функций $\widetilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_r)$ и $p_{\nu\rho}p_{s\gamma}\widetilde{D}^{(1)}(p_1,\dots p_r)$, полученные из (6.7) и (6.8), найдем:

$$\begin{aligned} &-2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,\widetilde{D}(p_1,\dots p_r) = \\ &= (E+E_p)^{-1}\sum_\lambda p_{i_1}^{\alpha_1}\dots p_{i_s}^{\alpha_s}\,\Phi_\lambda\!\left(M^2; M^2; \tau_1, \tau_2, -4\vec{p}^2; M^2+2\vec{p}^2+2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)\right) + \\ &+ (E-E_p)^{-1}\sum_\lambda p_{i_1}^{\alpha_1}\dots p_{i_s}^{\alpha_s}\,\Phi'_\lambda\!\left(M^2; M^2; \tau_1, \tau_2, -4\vec{p}^2; M^2+2\vec{p}^2-2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\tfrac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

При получении (6.9) мы предположили, что $E_c > E_p$. Это предположение не является каким-либо дополнительным ограничением, так как оно выполняется для всех вещественных значений $\tau_1, \tau_2, \vec{p}^2$, лежащих в области $\mathcal{D}_+$. Для целей дисперсионных соотношений необходимо установить, что функция $S_\pm A(E,\tau,\vec{p}^2)$ x) является аналитической по τ xx) в области

$$|\mathrm{Im}\,\tau| < \rho\mu^2, \quad \mathrm{Re}\,\tau \leqslant 0. \tag{6.10}$$

для всех значений E и $\vec{p}^2$, удовлетворяющих условиям:

$$E \geqslant E_c \qquad \text{и} \qquad \vec{p}^2 < \vec{p}^2_{max} \tag{6.11}$$

---

x) $S_\pm$ обозначает операцию симметризации или антисимметризации по вектору $\vec{e}$ (см. § 8).

xx) τ введено следующим образом:

$$\tau_1 = \tau + \tau_1^0, \quad \tau_2 = \tau + \tau_2^0.$$

Введем следующие обозначения:

$$F_{1\pm}\left(\tau+2E\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}},\tau,\Delta^2\right)=-\frac{S_\pm\,\bar{u}_{s'}(p')\sum\limits_{\lambda}\hat{O}_\lambda\,\phi_\lambda\left(M^2,M^2,\tau_1,\tau_2;4\Delta^2;\tau+2Ep^0+2\vec{p}^{\,2}+\frac{1}{2}(\tau_1^0+\tau_2^0)\right)u_s(p)}{4\,(E+E_p)\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}} \qquad (6.12)$$

$$F_{2\pm}\left(\tau-2E\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}},\tau,\Delta^2\right)=-\frac{S_\pm\,\bar{u}_{s'}(p')\sum\limits_{\lambda}\hat{P}'_\lambda\,\phi'_\lambda\left(M^2,M^2,\tau_1,\tau_2;4\Delta^2;\tau-2Ep^0+2\vec{p}^{\,2}+\frac{1}{2}(\tau_1^0+\tau_2^0)\right)u_s(p)}{4\,(E-E_p)\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}} \qquad (6.13)$$

Подставляя (6.9) в (4.4) и учитывая введенные выше обозначения, получим[x]:

$$S\,A(E,\tau,\Delta^2)=F_1\left(\tau+2E\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}},\tau,\Delta^2\right)+F_2\left(\tau-2E\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}},\tau,\Delta^2\right) \qquad (6.14)$$

Так как функции $F_i(y,\tau,\Delta^2)$ являются комбинациями функций $\phi_\lambda(z_1,\dots z_5;z_6)$ и $\phi'_\lambda(z_1,\dots z_5;z_6)$, то они будут обладать свойствами (1.6)-(1.13). Здесь мы отметим некоторые из них, которые в дальнейшем понадобится для доказательства дисперсионных соотношений.

а) $F_i(y,\tau,\Delta^2)$ – обобщенные функции переменной y.

в) $F_i(y,\tau,\Delta^2)$ – аналитические функции переменной τ, регулярные в области:

$$\mathrm{Re}\,\tau\le 0\ ,\quad |\mathrm{Im}\,\tau|<\rho\mu^2 \qquad (6.15)$$

с) $F_i(y,\tau,\Delta^2)=0$ для $y<2M\mu+\mu^2-2\vec{p}^{\,2}-\frac{1}{2}(\tau_1^0+\tau_2^0)$

d) $F_i(y,\tau,\Delta^2)$ – аналитические функции переменной Δ^2, регулярные внутри эллипса (1.7).

При вещественных значениях Δ^2 представление (6.14) справедливо, если

$$\Delta^2_{min}<\Delta^2<\Delta^2_{max}$$

Верхние границы Δ^2_{max} для различных процессов приведены во введении.

---

x) Функция A совпадает с антиэрмитовой частью амплитуды в области $E\geqslant E_c$.

§ 7. Амплитуды виртуальных процессов

В настоящем параграфе мы найдем выражение для амплитуды блока с двумя виртуальными бозонными концами. Поскольку построение амплитуды того или иного блока вполне аналогично, мы более подробно рассмотрим вывод амплитуды для блока с одним виртуальным фотонным концом и одним реальным π - мезонным концом и укажем те изменения, которые необходимо сделать, чтобы охватить все рассматриваемые здесь виртуальные процессы.

Обозначим оператор поглощения мезона через $a_p^{(-)}(\vec q)$, а оператор поглощения и рождения электрона через $b_\tau^{(-)}(\vec p_e')$ и $b_\tau^{*(+)}(\vec p_e)$ соответственно. Матричный элемент процесса $p+e\to p'+e'+\pi'$ может быть записан в виде:

$$S_{if} = (2\pi)^{3/2} \langle p', s' | b_{\tau'}^{(-)}(\vec p_e')\, a_p^{(-)}(\vec q)\, S\, b_\tau^{*(+)}(\vec p_e) | p, s \rangle \tag{7.1}$$

где $p, s\,(p', s')$ - импульс и спин начального (конечного) нуклона, а $p_e, \tau\,(p_e', \tau')$ - импульс и спин начального (конечного) электрона.

Перенося оператор $b_{\tau'}^{(-)}$ направо, а $b_\tau^{*(+)}$ налево, получаем:

$$S_{if} = \frac{m_e}{\sqrt{p_e^0 p_e'^0}}\, \bar u^{\tau'}(\vec p_e') \int e^{i(p_e' x - p_e y)}\, dx\, dy\, \langle p', s', \pi | \frac{\delta^2 S}{\delta \bar\psi_e(x)\, \delta \psi_e(y)} | p, s \rangle\, u^\tau(\vec p_e) \tag{7.2}$$

Спиноры нормированы так, что $\bar u u = 1$.

Учитывая стабильность однонуклонного состояния, имеем в низшем по e приближении:

$$\langle p', s', \pi | \frac{\delta^2 S}{\delta \bar\psi_e(x)\, \delta \psi_e(y)} | p, s \rangle_e = ie\,\delta(x-y)\, g^{\mu\nu} \gamma^\nu \int D^c(x-z) \langle p', s', \pi | j_\nu(z) | p, s \rangle_e\, dz \tag{7.3}$$

D^c - причинная функция Грина фотона.

Подставляя (7.3) в (7.2) и переставляя оператор поглощения $\varphi_p^{(-)}(q)$ с оператором $j_\nu(z)$, получим:

$$S_{if} = \frac{e\, m_e}{\sqrt{2 p_e^0 p_e'^0 q^0}} \cdot \frac{g^{\mu\nu}}{k^2}\, \bar u^{\tau'} \gamma^\mu u^\tau \int e^{iqx - iky} \langle p', s' | \frac{\delta j^\nu(y)}{\delta \varphi_p(x)} | p, s \rangle\, dx\, dy \tag{7.4}$$

Стоящий в (7.4) интеграл отличается от аналогичного интеграла, входящего в матричный элемент фоторождения мезона /I7/, лишь тем, что здесь

$$k^2 = -m_\gamma^2$$

Из требования трансляционной инвариантности этот интеграл должен содержать $\delta(p+k-p'-q)$. Мы будем рассматривать псевдовектор $T_{\nu p}^{ret}$, компоненты которого определяются выражением:

$$(2\pi)^4\, \delta(p+k-p'-q)\, T_{\nu p}^{ret} = -\sqrt{\frac{p^0 p'^0}{m^2}} \int e^{iqx - iky}\, dx\, dy\, \langle p', s' | \frac{\delta j_\nu(y)}{\delta \varphi_p(x)} | p, s \rangle \tag{7.5}$$

Вектор

$$e^{\nu} = \bar{u}^{r'}\gamma^{\nu}u^{r} \tag{7.6}$$

можно назвать поляризацией виртуального фотона. Наконец, величину

$$\mathcal{T} = (Te) \tag{7.7}$$

мы будем называть амплитудой виртуального фоторождения. Заметим, что T и e удовлетворяют требованию градиентной инвариантности:

$$(TK) = 0 \quad , \quad (eK) = 0 \ . \tag{7.8}$$

Наряду с запаздывающей амплитудой процесса нам необходимо ввести опережающую амплитуду. Так же, как и для обычного фоторождения она может быть введена следующим образом:

$$(2\pi)^4\delta(p+k-p'-q)\, T^{adv}_{\nu\rho} = -\sqrt{\frac{p_0 p_0'}{m^2}}\int e^{iqx-iky}\langle p',s'|\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta A_\nu(y)}|p,s\rangle\, dx\, dy \tag{7.9}$$

Опережающая амплитуда (см. гл. Ш) связана с матричным элементом от оператора $\overset{+}{S}$.

Амплитуды (7.6) и (7.9) получены для блока виртуального фоторождения. Для блока с двумя виртуальными бозонными концами (бозонные концы могут быть как мезонными, так и фотонными) запаздывающая и опережающая амплитуды имеют вид, аналогичный (7.6) и (7.9) с той лишь разницей, что поле $A_\nu(y)$ является начальным бозонным полем, а $\varphi_\rho(x)$ – конечным бозонным полем, причем импульсы бозонов равны:

$$k^2 = \tau_1^0 \ , \quad q^2 = \tau_2^0 \ . \tag{7.10}$$

§ 8. Аналитические свойства амплитуд виртуальных процессов в фиктивной области

Для исследования аналитических свойств амплитуды перейдем к специальной системе координат, в которой сумма импульсов нуклона до и после реакции равна нулю:

$$\vec{p} + \vec{p}\,' = 0 \tag{8.1}$$

Используя законы сохранения энергии и импульса и учитывая (7.10), получим:

$$\vec{k} = \lambda\vec{e} - (1+\epsilon)\vec{p} \ , \quad \vec{q} = \lambda\vec{e} + (1-\epsilon)\vec{p} \tag{8.2}$$

$$4\epsilon\vec{p}^{\,2} = \tau_2^0 - \tau_1^0 \ , \quad \lambda = \sqrt{E^2 - (1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2} - \tau_2^0}$$

где $\vec{e}$ – единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{p}$, а E – энергия начального или конечного бозонов.

Перейдем в фиктивную область. Для этого предположим, что квадраты 4-х мерных векторов k и q равны следующим значениям:

$$K^2=\tau_1^\circ+\tau\ ,\ q^2=\tau_2^\circ+\tau \qquad \text{причем} \qquad \tau<-\vec{p}^{\,2}(1-\epsilon)^2-\tau_2^\circ \tag{8.3}$$

Будем считать, что векторы K, q, p и p' попрежнему связаны соотношением:

$$K+p=q+p' \tag{8.4}$$

Используя (8.3) и (8.4), получим

$$\vec{K}=\lambda\vec{e}-(1+\epsilon)\vec{p}\ ,\quad \vec{q}=\lambda\vec{e}+(1-\epsilon)\vec{p}$$
$$4\epsilon\vec{p}^{\,2}=\tau_2-\tau_1\ ,\quad \lambda=\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau} \tag{8.5}$$

Заметим, что при $\tau=0$ формулы (8.5) совпадают с формулами (8.2). Совершенно очевидно, что поскольку $\tau<-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ$, то $\lambda^2>E^2$. Это обстоятельство является очень важным, так как в этом случае

$$\mathrm{Im}\,E>\left|\mathrm{Im}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\right|\ ,\quad \mathrm{Im}\,E\neq 0 \tag{8.6}$$

Используя свойства трансляционной инвариантности, выражения (7.5) и (7.9) могут быть записаны в виде:

$$T^{ret}_{\alpha,\omega}(E,\tau)=-\int exp\left[i\left(Ex_0-\vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\right)+i\epsilon\vec{p}\vec{x}\right]F^{ret}_{\alpha,\omega}(x)\,dx$$
$$T^{adv}_{\alpha,\omega}(E,\tau)=-\int exp\left[i\left(Ex_0-\vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\right)+i\epsilon\vec{p}\vec{x}\right]F^{adv}_{\alpha,\omega}(x)\,dx \tag{8.7}$$

Напомним, что согласно принципу причинности

$$F^{ret}_{\alpha,\omega}(x)=0,\ \text{если}\ x\lesssim 0$$
$$F^{adv}_{\alpha,\omega}(x)=0,\ \text{если}\ x\gtrsim 0 \tag{8.8}$$

Так как в (8.7) интегрирование ведется по области

$$x_0>|\vec{x}|\ ,\ x_0>0$$

то при нашем выборе τ

$$\mathrm{Im}\,E>\left|\mathrm{Im}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\right| \tag{8.9}$$

и, следовательно, функция $S_\pm T^{ret}(E,\tau)$ будет аналитической в верхней полуплоскости комплексной переменной E.

Символ $S_\pm$ обозначает операцию симметризации или антисимметризации по вектору $\vec{e}$.

Аналогично можно доказать, что $S_\pm T^{adv}(E,\tau)$ является аналитической функцией в нижней полуплоскости комплексной переменной E. Можно показать, что при некоторых условиях ST^{ret} и ST^{adv} совпадают друг с другом на некотором участке действительной оси E. Чтобы доказать это утверждение, необходимо исследовать поведение разности $\mathcal{S}\,T(E,\tau)$ для вещественных значений E.

$$\mathcal{S}\,T_{\alpha,\omega}\left(\frac{k+q}{2}\right) = \mathcal{S}\,T^{ret}_{\alpha,\omega} - \mathcal{S}\,T^{adv}_{\alpha,\omega} = -\mathcal{S}\int e^{\frac{i}{2}(k+q)x}\left(F^{ret}_{\alpha,\omega}(x) - F^{adv}_{\alpha,\omega}(x)\right)dx$$

учитывая, что:

$$\frac{\delta i_\nu(y)}{\delta \varphi_\rho(x)} - \frac{\delta j_\rho(x)}{\delta A_\nu(y)} = i\left[\,i_\nu(y),\, j_\rho(x)\right] \qquad (8.\,.)$$

имеем:

$$F^{ret}_{\alpha,\omega}(x) - F^{adv}_{\alpha,\omega}(x) = i\,\langle p',s'/\left[\,i_\nu\left(-\frac{x}{2}\right),\, j_\rho\left(\frac{x}{2}\right)\right]/p,s\rangle \qquad (8.1\,)$$

Выражение (8.I2) можно разложить по полной системе состояний оператора энергии-импульса нуклонного и мезонного полей.

$$\langle p',s'/j_\rho\left(\frac{x}{2}\right) i_\nu\left(-\frac{x}{2}\right)/p,s\rangle = \sum_n \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_n\,\langle p',s'/j_\rho(0)/n,\vec{k}_n\rangle\langle n,\vec{k}_n/i_\nu(0)/p,s\rangle\, e^{-ik_nx+\frac{i}{2}(p+p')x}$$

(8.1\,)

$$\langle p',s'/i_\nu\left(-\frac{x}{2}\right) j_\rho\left(\frac{x}{2}\right)/p,s\rangle = \sum_n \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}_n\,\langle p',s'/i_\nu(0)/n,\vec{k}_n\rangle\langle n,\vec{k}_n/j_\rho(0)/p,s\rangle\, e^{ik_nx-\frac{i}{2}(p+p')x}$$

Подставляя (8.I3) и (8.I2) в (8.I0) и интегрируя сперва по x, а затем по $\vec{K}_n$, получим:

$$\mathcal{S}\,T_{\alpha,\omega}\left(\frac{k+q}{2}\right) = 2\pi i\sum_n \mathcal{S}\,\langle p',s'/j_\rho(0)/n,\vec{k}+\vec{p}\rangle\langle n,\vec{k}+\vec{p}/i_\nu(0)/p,s\rangle\,\delta\left(k_0+p_0-\sqrt{M_n^2+(\vec{k}+\vec{p})^2}\right)$$

(8.I4)

$$-2\pi i\sum_n \mathcal{S}\,\langle p',s'/i_\nu(0)/n,\vec{p}'-\vec{k}\rangle\langle n,\vec{p}'-\vec{k}/j_\rho(0)/p,s\rangle\,\delta\left(k_0-p_0'+\sqrt{M_n^2+(\vec{k}-\vec{p}')^2}\right)$$

Учитывая формулы (8.5), выражение (8.I4) в Брейтовской системе может быть записано в виде:

$$\mathcal{S}\,T_{\alpha,\omega}(E,\tau) = 2\pi i\sum_n \mathcal{S}\,\langle p',s'/j_\rho(0)/n,\lambda\vec{e}-\epsilon\vec{p}\rangle\langle n,\lambda\vec{e}-\epsilon\vec{p}/i_\nu(0)/p,s\rangle\,\delta\left(E-\sqrt{M_n^2+\lambda^2+\epsilon^2\vec{p}^2}+p^0\right)$$

(8.I5)

$$-2\pi i\sum_n \mathcal{S}\,\langle p',s'/i_\nu(0)/n,-\lambda\vec{e}+\epsilon\vec{p}\rangle\langle n,-\lambda\vec{e}+\epsilon\vec{p}/j_\rho(0)/p,s\rangle\,\delta\left(E+\sqrt{M_n^2+\lambda^2+\epsilon^2\vec{p}^2}-p^0\right)$$

Отделяя член с промежуточным однонуклонным состоянием и проводя элементарные преобразования с δ-функциями, получим:

$$\mathcal{S}\,T_{\alpha,\omega}(E,\tau) = \mathcal{S}\,f_{\alpha,\omega}(E,\tau) + 2\pi i\,\mathcal{S}\,A(p,\tau)\,\delta(E+E_p) - 2\pi i\,\mathcal{S}\,B(p,\tau)\,\delta(E-E_p) \qquad (8.\,)$$

где

$$\mathcal{S}\,f_{\alpha,\omega}(E,\tau) = 2\pi i\sum_{n>1}\left|1+\frac{E_{pn}}{p_0}\right|\mathcal{S}\,\langle p',s'/j_\rho(0)/n,\lambda\vec{e}-\epsilon\vec{p}\rangle\langle n,\lambda\vec{e}-\epsilon\vec{p}/i_\nu(0)/p,s\rangle\,\delta(E-E_{pn}) -$$

$$-2\pi i\sum_{n>1}\left|1+\frac{E_{pn}}{p_0}\right|\mathcal{S}\,\langle p',s'/i_\nu(0)/n,-\lambda\vec{e}+\epsilon\vec{p}\rangle\langle n,-\lambda\vec{e}+\epsilon\vec{p}/j_\rho(0)/p,s\rangle\,\delta(E+E_{pn}) \qquad (8.I7)$$

$$S\,B(p,\tau) = \left(1 - \frac{E_p}{p_0}\right)\sum_{s''} S \langle p', s' | i_\nu(0) | -\lambda\vec{e} + \epsilon\vec{p}, s'' \rangle \langle -\lambda\vec{e} + \epsilon\vec{p}, s'' | j_\rho(0) | p, s \rangle$$
$$S\,A(p,\tau) = \left(1 - \frac{E_p}{p_0}\right)\sum_{s''} S \langle p', s' | j_\rho(0) | \lambda\vec{e} - \epsilon\vec{p}, s'' \rangle \langle \lambda\vec{e} - \epsilon\vec{p}, s'' | i_\nu(0) | p, s \rangle \tag{8.18}$$

$$2\sqrt{M^2 + \vec{p}^{\,2}}\, E_{pn}(\tau) = M_n^2 - M^2 - 2\vec{p}^{\,2} - \tau - \frac{1}{2}(\tau_1^0 + \tau_2^0) \tag{8.19}$$

$$\sqrt{M^2 + \vec{p}^{\,2}}\, E_p = \vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}(\tau_1^0 + \tau_2^0)$$

Если сделать обычное предположение, что между M и $M+\mu$ нет никаких связанных состояний мезон-нуклонной системы, т.е.

$$M_n \geqslant M + \mu \quad , \quad n > 1 \ .$$

то для импульсов рассеивателя:

$$\vec{p}^{\,2} < \frac{1}{2} M\mu + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}(\tau_1^0 + \tau_2^0) \tag{8.20}$$

однонуклонные полюса $\pm E_p$ лежат ниже границы непрерывного спектра E_c, определяемой формулой

$$\sqrt{M^2 + \vec{p}^{\,2}}\, E_c = M\mu - \vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}(\tau_1^0 + \tau_2^0) \tag{8.21}$$

Итак, нами установлено, что если

$$\tau < -\vec{p}^{\,2}(1-\epsilon)^2 - \tau_2^0$$

то $S\,T^{ret}(E,\tau)$ будет аналитической функцией в верхней полуплоскости E, а $S\,T^{adv}(E,\tau)$ в нижней полуплоскости E. С другой стороны, если выполнено условие:

$$\vec{p}^{\,2} < \frac{1}{2} M\mu + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}(\tau_1^0 + \tau_2^0)$$

то всегда существует на действительной оси E отрезок $(-E_q, E_q)$, на котором $S\,T^{ret}(E,\tau)$ и $S\,T^{adv}(E,\tau)$ совпадают.

$$S\,T^{ret}(E,\tau) = S\,T^{adv}(E,\tau) \quad , \quad \mathrm{Im}\, E = 0 \quad , \quad |E| < E_q \tag{8.22}$$

Таким образом, совокупность функций $S\,T^{ret}(E,\tau)$ и $S\,T^{adv}(E,\tau)$ представляет собой функцию

$$S\,\widetilde{T}(E,\tau) = \begin{cases} S\,T^{ret}(E,\tau) & \mathrm{Im}\, E > 0 \\ S\,T^{adv}(E,\tau) & \mathrm{Im}\, E < 0 \ . \end{cases} \tag{8.23}$$

аналитическую во всей комплексной плоскости переменной E за исключением линий разреза, идущих вдоль вещественной оси,

$$-\infty < \mathrm{Re}\, E < -E_c \quad , \quad E_c < \mathrm{Re}\, E < \infty \quad , \quad \mathrm{Im}\, E = 0 \ . \tag{8.24}$$

и также имеющую простые полюса в точках $E = \pm E_p$ и возрастающую на бесконечности не быстрее полинома степени n .

Таким образом, к функции

$$g(E,\tau) = (E-E_o)^{-n-1} S\widetilde{T}(E,\tau) \qquad (8.25)$$

где

$$\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\ |E_o| < M\mu - \vec{p}^2 + \frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{2}\tau - \frac{1}{4}(\tau_1^\circ + \tau_2^\circ)\ ,\ E_o \neq E_p$$

можно применить теорему Коши и получить следующие дисперсионные соотношения:

$$S\widetilde{T}(E,\tau) = \frac{(E-E_o)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{|E'|\geq E_c}^{\infty} \frac{\int f(E',\tau)\,dE'}{(E'-E_o)^{n+1}(E'-E)} + \sum_{0\leq \tau\leq n} C_\tau(\tau,\vec{p},E_o)E^\tau$$

$$- \frac{SA(p,\tau)}{E+E_p}\left(\frac{E_o-E}{E_o+E_p}\right)^{n+1} - \frac{SB(p,\tau)}{E_p-E}\left(\frac{E-E_o}{E_p-E_o}\right)^{n+1} \qquad (8.26)$$

Дисперсионные соотношения (8.26) получены нами лишь для фиктивной области значений τ.

$$\tau < -\max\left[\vec{p}^2(1-\epsilon)^2 + \tau_2^\circ, 2\vec{p}^2\right] \qquad (8.27)$$

§ 9. Аналитическое продолжение по переменной τ.

Чтобы перейти от фиктивных значений τ к интересующему нас значению $\tau = 0$, нам необходимо совершить аналитическое продолжение. Для этой цели мы воспользуемся представлением (6.14) и свойствами (6.15). Представление (6.14) даст возможность доказать дисперсионные соотношения и для нужного нам значения $\tau = 0$.

Возьмем какое-либо отрицательное τ, удовлетворяющее условию (8.27), тогда для данного τ будут одновременно выполняться как дисперсионные соотношения (8.26), так и представление (6.14). Подставляя (6.14) в (8.26), мы получим:

$$S\widetilde{T}(E,\tau) = \Phi(E,\tau) - \frac{SA(p,\tau)}{E+E_p(\tau)}\cdot\left(\frac{E_o-E}{E_o+E_p}\right)^{n+1} - \frac{SB(p,\tau)}{E_p(\tau)-E}\cdot\left(\frac{E-E_o}{E_p-E_o}\right)^{n+1} + \sum_{0\leq\tau\leq n} C_\tau(\tau,\vec{p},E_o)E^\tau \qquad (9.1)$$

где

$$\Phi(E,\tau) = \frac{(E-E_o)^{n+1}}{2\pi i}\int \frac{dE''\, F_1(2E''\sqrt{M^2+\vec{p}^2},\tau)}{\left(E''-E-\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\right)\left(E''-E_o-\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\right)^{n+1}} + \frac{(E-E_o)^{n+1}}{2\pi i}\int\frac{dE''\, F_2(2E''\sqrt{M^2+\vec{p}^2},\tau)}{\left(-E''-E+\frac{\tau}{2p_o}\right)\left(-E''-E_o+\frac{\tau}{2p_o}\right)^{n+1}} \qquad (9.2)$$

Функция $\Phi(E,\tau)$ будет аналитической функцией E в области, где ни один из знаменателей

$$\left(E''-E-\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\right) \quad , \quad \left(-E''-E+\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\right)$$

не обращается в нуль, т.е. при условии

$$Im\left(\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}} \pm E\right) \neq 0 \tag{9.3}$$

Совершенно очевидно, что условие (9.3) будет всегда выполнено, если потребовать:

$$|Im\,\tau| < 2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,|Im\,E| \tag{9.4}$$

При выполнении неравенства (9.4) $\Phi(E,\tau)$ будет аналитической функцией по переменной E. Рассмотрим аналитические свойства функции $\Phi(E,\tau)$ по переменной τ. Так как $F_i(y,\tau)$ являются аналитическими функциями τ в области:

$$Re\,\tau \leq 0 \quad , \quad |Im\,\tau| < \rho\mu^2 \tag{9.5}$$

то функция $\Phi(E,\tau)$ также будет аналитической в этой области, если ни один из знаменателей

$$\left(E'-E_o-\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\right)^{n+1} , \quad \left(-E'-E_o+\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\right)^{n+1} \tag{9.6}$$

в области (9.5) не обращается в нуль. Если в качестве E_o мы выберем некоторое действительное число, то для любых комплексных τ из области (9.5) ни один из знаменателей не обратится в нуль и функция $\Phi(E,\tau)$ будет аналитической для всех комплексных τ из области (9.5). Для вещественных τ из области (9.5) знаменатели (9.6) также не обратятся в нуль, если E_o выбрано следующим образом:

$$2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\cdot|E_o| < 2M\mu+\mu^2-2\vec{p}^2\cdot\tau-\frac{1}{2}(\tau_1^\circ+\tau_2^\circ) \tag{9.7}$$

τ – вещественное число.

Но так как $\tau \leq 0$, а $\vec{p}^2 < \vec{p}^2_{max}$, то неравенство (9.7) будет выполнено, если потребовать:

$$2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,|E_o| < 2M\mu+\mu^2-2\vec{p}^2_{max}-\frac{1}{2}(\tau_1^\circ+\tau_2^\circ) \tag{9.8}$$

Таким образом, при надлежащем выборе E_o функция $\Phi(E,\tau)$ будет аналитической и для вещественных τ из области (9.5). Суммируя результаты, полученные выше, мы можем сказать, что если E_o ограничено неравенством (9.8), то интегралы (9.2) определяют функцию $\Phi(E,\tau)$, аналитическую в области:

$$Re\,\tau \leq 0 \quad , \quad |Im\,\tau| < \rho\mu^2 \quad , \quad |Im\,\tau| < 2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,|Im\,E| \tag{9.9}$$

Но, с другой стороны, легко убедиться, что функция $S\widetilde{T}(E,\tau)$ регулярна в области:

$$|\mathrm{Im}\, E| > |\mathrm{Im}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\,| \tag{9.10}$$

для всех значений $\vec{p}^{\,2} < \vec{p}^{\,2}_{max}$

Таким образом, разность

$$\left\{ S\tilde{T}(E,\tau) - \Phi(E,\tau) \right\} (E_p^2(\tau) - E^2) \tag{9.11}$$

должна быть аналитической функцией переменных E, τ в общей части областей (9.9) и (9.10), т.е.

$$\begin{gathered} \mathrm{Re}\,\tau \le 0 \;, \quad |\mathrm{Im}\,\tau| < \rho\mu^2 \;, \quad |\mathrm{Im}\,\tau| < 2\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\,|\mathrm{Im}\,E| \\ |\mathrm{Im}\,E| > |\mathrm{Im}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\,| \end{gathered} \tag{9.12}$$

Но для вещественных

$$\tau < -\max\left[(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}+\tau_2^\circ\,,\ 2\vec{p}^{\,2}\right]$$

эта разность согласно дисперсионному соотношению (8.26) является полиномом по E:

$$-SA(p,\tau)(E-E_p)\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_p}\right)^{n+1} + S\,B(p,\tau)(E-E_p)\left(\frac{E-E_0}{E_p-E_0}\right)^{n+1} + (E^2-E_p^2(\tau))\sum_{0\le\tau\le n} C_\tau(\tau,\vec{p},E_0)E^\tau \tag{9.13}$$

В силу единственности аналитического продолжения она будет полиномом по E и во всей области (9.12). Следовательно, функции $A(p,\tau), B(p,\tau)$, $C_\tau(\tau,\vec{p},E_0)$ могут быть аналитически продолжены на некоторую область комплексных значений τ. Можно показать, что эта область включает в себя по крайней мере всю область

$$\mathrm{Re}\,\tau \le 0 \;, \quad |\mathrm{Im}\,\tau| < \rho\mu^2 \tag{9.14}$$

Действительно, возьмем любое $\overset{*}{\tau}_\pm = \tau_2 \pm i\eta$, лежащее в области (9.14). Для данного $\overset{*}{\tau}_+$ выберем $\overset{*}{E}_+ = E_2 + iE_i$ так, чтобы пара $\overset{*}{\tau}_+, \overset{*}{E}_+$ лежала в области (9.12). Это можно осуществить, если выбрать $\overset{*}{E}$ так, чтобы выполнялись условия:

$$|\mathrm{Im}\,\tau| < 2\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\,|\mathrm{Im}\,E| \;, \quad |\mathrm{Im}\,E| > |\mathrm{Im}\sqrt{E^2-(1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2}-\tau_2^\circ-\tau}\,| \tag{9.15}$$

Легко убедиться, что условия (9.15) выполняются, если E_2 и E_i выбраны следующим образом:

$$E_i = \frac{1}{2}\cdot\frac{\eta}{E_2} \;, \quad E_2 < M \;, \quad E_2^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{\eta^2}{E_2^2} - \tau_2 - \tau_2^\circ - (1-\epsilon)^2\vec{p}^{\,2} > 0 \tag{9.16}$$

Неравенства (9.16) накладывают ограничения на $\vec{p}^{\,2}$ снизу.

Таким образом, для любой точки $\overset{*}{\tau}_\pm$ из области (9.14) $\mathrm{Im}\,\overset{*}{\tau} \ne 0$ всегда можно найти такое $\overset{*}{E}_\pm$, что пары $\overset{*}{\tau}_\pm$ и $\overset{*}{E}_\pm$ будут лежать в области (9.12). Отсюда следует, что функции $A(p,\tau)$,

$B(\eta,\tau)$ и $C_2(\tau,\vec{p},E_0)$ будут аналитическими по τ во всей области (9.14) с возможной линией разреза вдоль вещественной оси τ. Можно показать, что в действительности этой линии разреза нет. Действительно, выберем вещественное τ_2 следующим образом:

$$\tau_2 < 0$$

и положим

$$\tau_\pm = \tau_2 \pm i\eta \quad , \quad E_\pm = E_2 \pm iE_i \quad , \quad 2E_iE_2 = \eta \quad , \quad \eta > 0 \tag{9.17}$$

η - достаточно малое число.

Если мы выберем E_2 таким образом, чтобы выполнялись неравенства (9.16), то пары точек E_+, τ_+, и τ_-, E_- войдут в область (9.12). Поскольку в область (9.12) входят и такие τ, у которых $\Im m\, \tau = 0$, то в силу непрерывности имеем:

$$\lim_{\eta\to 0} \phi(E_\pm,\tau_\pm) = \lim_{\epsilon\to 0} \phi(E_2 \pm i\epsilon, \tau_2) \tag{9.18}$$

Используя (9.2) и (9.18) легко получить следующее важное соотношение:

$$\lim_{\eta\to 0} \left\{ \phi(E_+,\tau_+) - \phi(E_-,\tau_-) \right\} = F_1(2E_2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\tau_2,\tau_2) + F_2(-2E_2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\tau_2,\tau_2) \tag{9.19}$$

Принимая во внимание (8.16) и (6.14), выражение (9.19) можно записать в форме:

$$\lim_{\eta\to 0} [\phi(E_+,\tau_+) - \phi(E_-,\tau_-)](E_2^2 - E_p^2) = ST(E_2,\tau_2)(E_2^2 - E_p^2) \tag{9.20}$$

С другой стороны, так как E_+, τ_+ и E_-, τ_- входят в область (9.12), то для таких пар точек можно воспользоваться выражениями (8.7), которые в этом случае имеют смысл и при $\eta \to 0$ сходятся к функциям $ST^{ret}(E_2,\tau_2)$, $ST^{adv}(E_2,\tau_2)$ Таким образом, получим следующее предельное соотношение:

$$\lim_{\eta\to 0} [S\widetilde{T}(E_+,\tau_+) - S\widetilde{T}(E_-,\tau_-)] = ST(E_2,\tau_2) \tag{9.21}$$

Умножая (9.21) на $(E_2^2 - E_p^2)$ и комбинируя с (9.20), получим:

$$(E_2^2 - E_p^2(\tau_2))\lim_{\eta\to 0}[S\widetilde{T}(E_+,\tau_+) - \phi(E_+,\tau_+)] = (E_2^2 - E_p^2(\tau_2))\lim_{\eta\to 0}[S\widetilde{T}(E_-,\tau_-) - \phi(E_-,\tau_-)] \tag{9.22}$$

Но так как пары точек (E_+,τ_+) и (E_-,τ_-) лежат в области (9.12), то функция, стоящая в обеих частях соотношения (9.22), совпадает с полиномом по E.

Обозначая этот полином через $P_\tau(E)$, соотношение (9.22) можно переписать в виде:

$$\lim_{\eta\to 0} P_{\tau_+}(E_+) = \lim_{\eta\to 0} P_{\tau_-}(E_-) \tag{9.23}$$

или в силу непрерывности:

$$\lim_{\eta \to 0} \rho_{\tau+}(E_\tau) = \lim_{\eta \to 0} \rho_{\tau-}(E_\tau) \tag{9.24}$$

но это означает, что функция $\rho_\tau(E)$ является непрерывной при переходе τ через вещественную ось. Поскольку $\rho_\tau(E)$ является аналитической функцией τ выше и ниже вещественной оси, то она в силу (9.24) остается аналитической функцией и для точек вещественной оси, т.е. линия разреза отсутствует. Следовательно, функции $A(\rho,\tau)$ и $B(\rho,\tau)$ и $C_\tau(\tau,\vec{p},E_0)$ являются аналитическими по τ в области:

$$Re\,\tau \le 0 \quad , \ |Im\,\tau| < \rho\mu^2. \tag{9.25}$$

Но это означает, что в дисперсионных соотношениях (8.26) последние три члена являются аналитическими функциями по τ и E в области:

$$Re\,\tau \le 0 \quad , \ |Im\,\tau| < \rho\mu^2 \ , \ Im\,E \ne 0 \tag{9.26}$$

Поскольку функция $\Phi(E,\tau)$ аналитична в области (9.9), которая содержится в области (9.26), то вся правая часть дисперсионных соотношений (8.26) является также аналитической функцией в области (9.9). Поэтому мы можем расширить область определения функции $S\widetilde{T}(E,\tau)$ так, чтобы она совпадала с правой частью во всей области (9.9). Но так как в область (9.9) входит и необходимая нам точка τ = 0, то соотношения (8.26) будут справедливы и при τ = 0.

Чтобы перейти к действительным значениям E, положим $E=E_\tau \pm i\epsilon$ и устремим ϵ к нулю. Тогда учитывая, что для расширенной функции $S\widetilde{T}(E,\tau)$ имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\epsilon \to 0} S\widetilde{T}(E \pm i\epsilon) = S\,T^{\substack{ret\\adv}}(E) \tag{9.27}$$

получим:

$$S\,T^{\substack{ret\\adv}}(E) = \pm \frac{1}{2} S\,T(E) + \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} P\int\limits_{|E'|>E_\tau}^{\infty} \frac{S f(E')dE'}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} + \sum_{0\le \tau \le n} C_\tau(\vec{p},E_0)E^\tau - \tag{9.28}$$

$$- \left(\frac{E_0-E}{E_0+E_\rho}\right)^{n+1} \frac{SA(\rho)}{E_\rho+E} - \left(\frac{E-E_0}{E_\rho-E_0}\right)^{n+1} \frac{SB(\rho)}{E_\rho-E}$$

Эрмитова и антиэрмитова части амплитуды процесса определяются следующими соотношениями:

$$D_{\alpha,\omega}(E) = \frac{1}{2}\left(T^{ret}_{\alpha,\omega}(E) + T^{adv}_{\alpha,\omega}(E)\right) \ , \quad A_{\alpha,\omega}(E) = \frac{1}{2i}\left(T^{ret}_{\alpha,\omega}(E) - T^{adv}_{\alpha,\omega}(E)\right) \tag{9.29}$$

С помощью (9.28) и (9.29) легко получить дисперсионные соотношения, связывающие эрмитову и антиэрмитову части амплитуды процесса.

$$S D_{\alpha,\omega}(E) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi} \int\limits_{|E'|\geq E_c}^{\infty} \frac{S A_{\alpha,\omega}(E')\,dE'}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} + \sum_{0\leq z\leq n} C_z(\vec{p},E_0)E^z - \tag{9.30}$$

$$- \left(\frac{E_0 - E}{E_0 + E_p}\right)^{n+1} \cdot \frac{S A(p)}{E_p + E} - \left(\frac{E - E_0}{E_p - E_0}\right)^{n+1} \cdot \frac{S B(p)}{E_p - E}$$

Отрицательная область энергий в дисперсионных соотношениях (9.30) может быть исключена, если использовать следующее свойство симметрии A :

$$A_{\alpha,\omega}(E) = - P_{ss'} \overset{*}{A}_{\alpha,\omega}(-E)$$

$P_{ss'}$ – оператор перестановки спиновых состояний нуклона.

Глава II. ПРИЧИННЫЕ АМПЛИТУДЫ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ

§ I. Принцип причинности

Одним из фундаментальных принципов современной квантовой теории поля является принцип причинности. Н.Н.Боголюбову удалось сформулировать этот принцип в виде некоторого явного условия на матрицу рассеяния. В настоящем параграфе мы подробно остановимся на формулировке принципа причинности. При этом мы покажем, что наряду с обычной формой условия причинности [32] можно дать несколько другую форму, вполне эквивалентную первой, но более удобную при построении опережающей причинной амплитуды. Следуя работам [3,3a], мы повторим рассуждения, которые обычно делаются при формулировке условия причинности в форме Н.Н.Боголюбова.

Условие причинности означает тот физически очевидный факт, что всякое событие, происшедшее в системе, влияет на развитие системы лишь в будущем и не может оказать влияния на поведение системы во времена, предшествовавшие данному событию.

Пусть наша система состоит из квантованных спинорного и мезонного полей и пусть наряду с квантованными полями существует внешний источник бозонного поля φ, тогда матрица рассеяния может рассматриваться как функционал внешнего поля φ. Чтобы сформулировать условие причинности в явном виде, рассмотрим сначала случай, когда внешнее поле $\varphi(x)$ может быть представлено в виде суммы двух функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \tag{I.1}$$

причем $\varphi_1(x)$ отлична от нуля в области G_1, лежащей в прошлом относительно времени t, а $\varphi_2(x)$ отлична от нуля в области G_2, которая лежит в будущем относительно момента времени t. В этом случае матрица рассеяния может быть записана в виде:

$$S(\varphi_1+\varphi_2) = S(\varphi_2)\, S'(\varphi_1) \tag{I.2}$$

что является фактически формулировкой принципа причинности в случае, когда $G_2 > G_1$. Рассмотрим далее два случая, в которых внешнее поле $\varphi(x)$ может быть представлено в виде:

$$\varphi'(x) = \varphi_2'(x) + \varphi_1(x) \quad , \quad \varphi''(x) = \varphi_2''(x) + \varphi_1(x) \tag{I.3}$$

В обоих этих случаях внешние поля в области G_1, считаются одинаковыми. Составляя выражение $S(\varphi'')\overset{+}{S}(\varphi')$, легко убедиться, используя свойство унитарности матрицы рассеяния, что:

$$S(\varphi'')\overset{+}{S}(\varphi') = S(\varphi_2'')\overset{+}{S}(\varphi_2') \tag{I.4}$$

т.е. произведение $S(\varphi'')\overset{+}{S}(\varphi')$ не зависит от поведения внешнего поля $\varphi(x)$ в области G_1. Если положить:

$$\varphi'(y) = \varphi(y) \quad , \quad \varphi''(y) = \varphi(y) + \delta\varphi(y) \tag{I.5}$$

где $\delta\varphi(y)$ - бесконечно малая вариация функции $\varphi(y)$, отличная от нуля в области $y^{\circ} > t$, то матрица рассеяния

$$S(\varphi'') = S(\varphi) + \delta S(\varphi) \tag{I.6}$$

причем

$$\delta S(\varphi) = \int\limits_{y^{\circ} > t} \frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} \delta\varphi(y)\, dy$$

Совершенно очевидно, что выражение

$$S(\varphi'')\overset{+}{S}(\varphi') = 1 + \delta S(\varphi)\overset{+}{S}(\varphi) \tag{I.7}$$

не зависит от поведения внешнего поля $\varphi(x)$ в области

$$x_0 < t$$

Это условие в дифференциальной форме может быть записано в виде:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)}\overset{+}{S}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y \tag{I.8}$$

(запись $x \sim y$ означает, что точки x и y разделены пространственно-подобным интервалом).

Далее мы увидим, что условие причинности в форме (I.8) удобно для построения запаздывающей амплитуды процесса. Поскольку нам в дальнейшем будет необходимо построение опережающей амплитуды процесса, мы приведем ниже несколько другую форму этого условия.

Чтобы получить условие причинности в другой форме, мы опять рассмотрим два случая, в которых внешнее поле $\varphi(x)$ может быть представлено в виде:

$$\varphi'(x) = \varphi_2(x) + \varphi_1'(x) \quad , \quad \varphi''(x) = \varphi_2(x) + \varphi_2''(x) \tag{I.9}$$

В отличие от (I.3) в данном случае поля считаются одинаковыми в области G_2 . Составляя выражение $\overset{+}{S}(\varphi'')S(\varphi')$, легко убедиться, что:

$$\overset{+}{S}(\varphi'')S(\varphi') = \overset{+}{S}(\varphi_2'')S(\varphi_1') \tag{I.10}$$

т.е. произведение $\overset{+}{S}(\varphi'')S(\varphi')$ не зависит от поведения внешнего поля $\varphi(x)$ в области G_2 . Повторяя рассуждения, аналогичные (I.5)-(I.7), получим условие причинности в форме/44,46/:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta \overset{+}{S}}{\delta\varphi(y)} S\right) = 0 \quad \text{при} \quad x \gtrsim y \tag{I.11}$$

Легко установить, что условие (I.8) связано с условием (I.II) следующим соотношением:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta\overset{+}{S}}{\delta\varphi(y)}S\right) = -\overset{+}{S}\frac{\delta}{\delta\varphi(y)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(x)}\overset{+}{S}\right)S \tag{I.I2}$$

Вводя определение бозонных токов $j_\rho(x)$ и $\Lambda_\rho(x)$

$$j_\rho(x) = i\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\overset{+}{S} = -iS\frac{\delta\overset{+}{S}}{\delta\varphi_\rho(x)}; \quad \Lambda_\rho(x) = i\frac{\delta\overset{+}{S}}{\delta\varphi_\rho(x)}S = -i\overset{+}{S}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)} \tag{I.I3}$$

условие причинности (I.8) и (I.II) можно записать в виде:

$$\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')} = 0,\ \text{если}\quad x' \lesssim x \tag{I.I4а}$$

$$\frac{\delta\Lambda_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')} = 0,\ \text{если}\quad x' \gtrsim x \tag{I.I4в}$$

Совершенно очевидно, что условие причинности как в форме (I.8), так и в форме (I.II) имеет место и в случае фермионного внешнего поля.

§ 2. Построение запаздывающей и опережающей амплитуд процесса

В этом параграфе мы займемся построением запаздывающей и опережающей амплитуд процессов, когда в начале реакции имеется фермион и один бозон, а в конце реакции - фермион и n - бозонов.

Обозначим импульс начального и конечного фермиона через p и p', а импульсы начального и конечного бозонов через q и $q_1, \ldots, q_n$ соответственно. Для простоты будем считать, что все бозоны одинаковы. Тогда матричный элемент процесса может быть записан в виде:

$$S_{\alpha,\omega}(q;q_1,\ldots q_n) = (2\pi)^{\frac{3}{2}(n+1)} \langle p',s'|\varphi^{(-)}_{\rho_n}(q_n)\ldots\varphi^{(-)}_{\rho_1}(q_1)\,S\,\varphi^{(+)}_\rho(q)|p,s\rangle \tag{2.I}$$

Здесь $|p,s\rangle$ обозначает амплитуду состояния рассеивателя, а индексы α и ω, относящиеся соответственно к начальному и конечному состояниям, включают в себя все квантовые числа, характеризующие систему, за исключением импульсов начального и конечных бозонов. Переставляя в (2.I) оператор рождения $\varphi^{(+)}_\rho(q)$ на крайнее левое место и учитывая стабильность состояния

$$\overset{+}{S}|p,s\rangle = |p,s\rangle$$

получим

$$S_{\alpha,\omega}(q;q_1,\ldots q_n) = -\frac{i(2\pi)^{\frac{3n}{2}}}{\sqrt{2q^0}}\int e^{-iqx}dx \quad \langle p',s'|\varphi^{(-)}_{\rho_n}(q_n)\ldots\varphi^{(-)}_{\rho_1}(q_1)\,j_\rho(x)|p,s\rangle$$

откуда после перестановки операторов поглощения на крайнее правое место имеем:

$$S_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots q_n) = -\frac{i}{\sqrt{2^{n+1}q^0 q_1^0\dots q_n^0}}\int dx\,dx_1\dots dx_n\, e^{iq_1x_1+\dots+iq_nx_n-iqx} \langle p',s'|\frac{\delta^n j_\beta(x)}{\delta\varphi_{\beta_1}(x_1)\dots\dots\delta\varphi_{\beta_n}(x_n)}|p,s\rangle \tag{2.2}$$

На основании соображений трансляционной инвариантности

$$\langle p',s'|\frac{\delta^n j_\beta(x)}{\delta\varphi_{\beta_1}(x_1)\dots\delta\varphi_{\beta_n}(x_n)}|p,s\rangle = e^{i(p'-p)x}\langle p',s'|\frac{\delta^n j_\beta(0)}{\delta\varphi_{\beta_1}(x_1-x)\dots\delta\varphi_{\beta_n}(x_n-x)}|p,s\rangle \tag{2.3}$$

выражение (2.2) может быть записано в виде:

$$S_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots q_n) = \frac{i(2\pi)^4}{\sqrt{2^{n+1}q^0q_1^0\dots q_n^0}}\,\delta(p+q-p'-q_1-\dots-q_n)\,T^{ret}_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots q_n) \tag{2.4}$$

где

$$T^{ret}_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots q_n) = -\int e^{iq_1x_1+\dots+iq_nx_n}dx_1\dots dx_n\,\langle p',s'|\frac{\delta^n j_\beta(0)}{\delta\varphi_{\beta_1}(x_1)\dots\delta\varphi_{\beta_n}(x_n)}|p,s\rangle$$

Учитывая условие причинности (I.I4a), легко видеть, что интегрирование в (2.4) ведется по области:

$$x_1>0\ ,\ x_2>0\ ,\ \dots\dots\dots\dots\ ,x_n>0\ . \tag{2.5}$$

Опережающая амплитуда связана с матричным элементом следующего вида

$$\overset{+}{S}_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots\dots q_n) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n+1)}\langle p',s'|\varphi^{(-)}_{\beta_n}(q_n)\dots\dots\dots\varphi^{(-)}_{\beta_1}(q_1)\,\overset{+}{S}\,\varphi^{(+)}_{\beta}(q)|p,s\rangle \tag{2.6}$$

Отсюда, принимая во внимание (I.I3) и используя такую же технику, как и при выводе (2.4), получим:

$$\overset{+}{S}_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots\dots q_n) = -i\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{2^{n+1}q^0q_1^0\dots q_n^0}}\,\delta(p+q-p'-q_1-\dots\dots-q_n)\,T^{adv}_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots q_n) \tag{2.7}$$

где

$$T^{adv}_{\alpha,\omega}(q;q_1,\dots q_n) = \int e^{i(q_1x_1+\dots+q_nx_n)}\langle p',s'|\frac{\delta^n \Lambda_\beta(0)}{\delta\varphi_{\beta_1}(x_1)\dots\dots\delta\varphi_{\beta_n}(x_n)}|p,s\rangle$$

Согласно (I.I4в) интегрирование в (2.7) ведется по области

$$x_1<0\ ,\ x_2<0\ ,\ \dots\dots\dots\dots\ ,x_n<0\ . \tag{2.8}$$

Как обычно, амплитуду процесса можно разбить на дисперсивную и абсорбтивную части. Под абсорбтивной частью мы понимаем ту часть амплитуды процесса, в которую дают вклад лишь реальные промежуточные состояния. Тогда как в дисперсивную часть дают вклад лишь виртуальные состояния.

С помощью функций $T^{ret}_{\alpha,\omega}$ и $T^{adv}_{\alpha,\omega}$ дисперсивная и абсорбтивная части могут быть определены следующим образом:

$$D_{\alpha,\omega}(q;k_1\cdots k_n) = \frac{1}{2}\left(T^{ret}_{\alpha,\omega}(q;k_1\cdots k_n) + T^{adv}_{\alpha,\omega}(q;k_1\cdots k_n)\right) \tag{2.9}$$

$$A_{\alpha,\omega}(q;k_1\cdots k_n) = \frac{1}{2i}\left(T^{ret}_{\alpha,\omega}(q;k_1\cdots k_n) - T^{adv}_{\alpha,\omega}(q;k_1\cdots k_n)\right)$$

§ 3. Кинематика реакции типа $a+b \to a'+c+d$

Для получения дисперсионных соотношений необходимо провести кинематический анализ реакции. Под кинематическим анализом мы понимаем нахождение независимых инвариантов, функцией которых является амплитуда процесса, а также выбор переменной (инварианта), по которой будут рассматриваться аналитические свойства амплитуды. Выбор переменной, относительно которой рассматриваются аналитические свойства амплитуды, необходимо проводить таким образом, чтобы оставшиеся инварианты не зависели от этой переменной.

В настоящем параграфе мы проведем кинематический анализ реакции $a+b \to a'+c+d$ как в общем случае, так и в некоторых важных частных случаях:

а) Случай одинаковых энергий родившихся бозонов.

Согласно закону сохранения энергии-импульса системы имеем:

$$p+q = p'+q'+q'' \tag{3.1}$$

В дальнейшем будем работать в системе отсчета:

$$\vec{p}+\vec{p}\,'=0 \tag{3.2}$$

Вместо векторов q', q'' введем векторы Q, Δ, определив их следующим образом:

$$Q=\frac{1}{2}(q'+q'') \quad , \quad \Delta=\frac{1}{2}(q'-q'') . \tag{3.3}$$

Легко видеть, что вектор Q является времени подобным. Фиксируя 4-мерный квадрат вектора

$$Q^2 = m_Q^2 \tag{3.4}$$

закон сохранения энергии-импульса (3.1) в выбранной нами системе отсчета может быть записан в виде:

$$\vec{q}-2\vec{Q} = -2\vec{p} \quad , \quad (\vec{q}-2\vec{Q})(\vec{q}+2\vec{Q}) = 4m_Q^2 - m^2 . \tag{3.5}$$

где m - масса начального бозона.

Отсюда после элементарных вычислений находим:

$$\vec{q} = \lambda\vec{e} - (1+\epsilon)\vec{p}\ , \quad 2\vec{Q} = \lambda\vec{e} + (1-\epsilon)\vec{p} \tag{3.6}$$

где $\vec{e}$ - единичный вектор, ортогональный вектору $\vec{p}$,

$$4\epsilon\vec{p}^2 = 4m_q^2 - m^2\ , \qquad \frac{\lambda^2}{4} = E^2 - m_q^2 - \frac{1}{4}(1-\epsilon)^2\vec{p}^2 \tag{3.7}$$

через E мы обозначили нулевую компоненту вектора Q . Для простоты мы рассмотрим реакции, в которых рождаются бозоны с одинаковыми массами

$$q'^2 = q''^2 - m_1^2 \tag{3.8}$$

Учитывая (3.4) и (3.8), находим:

$$\Delta^2 = -m_q^2 + m_1^2\ , \qquad Q\Delta = 0 \tag{3.9}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать свойства аналитичности амплитуды процесса относительно переменной E. Из-за ортогональности векторов $\vec{Q}$ и $\vec{\Delta}$ следует, что вектор $\vec{\Delta}$, вообще говоря, является функцией энергии E. Выберем направление вектора $\vec{\Delta}$ таким образом, чтобы он был ортогонален векторам $\vec{p}$ и $\vec{e}$. Тогда из условий (3.9) следует, что:

$$\Delta_0 = 0\ , \quad \vec{\Delta}^2 = m_q^2 - m_1^2\ , \quad m_q^2 \geq m_1^2 \tag{3.10}$$

Итак, в выбранной нами системе отсчета амплитуда процесса будет являться функцией переменных $E, \vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}$, причем при изменении переменной E вектора $\vec{e}, \vec{p}, \vec{\Delta}$ фиксированы. Выше мы провели кинематический анализ случая одинаковых энергий родившихся бозонов в предположении, что вектор $\vec{\Delta}$ ортогонален векторам $\vec{p}$ и $\vec{e}$. Этот случай интересен тем, что с кинематической точки зрения он эквивалентен неупругому процессу, в котором участвуют два фермиона и два бозона $a + b \to a' + d$.

Дисперсионные соотношения для данного случая рассеяния являются наиболее простыми. Выше мы сделали предположение, что вектор $\vec{\Delta}$ ортогонален векторам $\vec{p}$ и $\vec{e}$. Это предположение обеспечивало независимость вектора $\vec{\Delta}$ от энергии E. Как мы увидим ниже, независимость вектора $\vec{\Delta}$ может быть достигнута и в общем случае рассеяния. Действительно, общее решение векторных соотношений (3.5) можно записать в виде:

$$\vec{q} = \lambda\vec{e} - (1+\epsilon)\vec{p} + t\vec{n}\ , \quad 2\vec{Q} = \lambda\vec{e} + (1-\epsilon)\vec{p} + t\vec{n} \tag{3.11}$$

где $\vec{e}$, $\vec{n}$, $\vec{p}/|\vec{p}|$ - взаимно ортогональные единичные векторы (вектор $\vec{n}$ выбран в плоскости $(\vec{p}, \vec{\Delta})$),

$$4\epsilon\vec{p}^2 = 4m_q^2 - m^2\ , \quad \lambda^2 = 4E^2 - (1-\epsilon)^2\vec{p}^2 - t^2 - m^2 \tag{3.12}$$

параметр t , входящий в выражение (3.11), может быть определен из условия (3.9)

$$t = \frac{m_q^2 - \vec{p}^2 - \frac{1}{4}m^2}{|\vec{p}|}\, ctg\,(\widehat{\vec{p}\vec{\Delta}}) \tag{3.13}$$

в) Общий случай рассеяния.

При исследовании общего случая рассеяния представляется удобным фиксировать произвольным образом отношение энергий рожденных бозонов [72]

$$\frac{q_0'}{q_0''} = \frac{\nu'}{\nu''} \tag{3.14}$$

где ν' и ν'' - произвольные положительные числа. Без ограничения общности рассмотрения удобно положить

$$\nu'\nu'' = 1 \tag{3.15}$$

Вместо векторов q' и q'' введем векторы Q, Δ, определив их следующим ооразом:

$$Q = \frac{1}{2}\left\{\nu''(1-\eta)q' + \nu'(1+\eta)q''\right\}, \quad \Delta = \frac{1}{2}(\nu''q' - \nu'q''), \quad Q\Delta = 0. \tag{3.16}$$

где

$$\eta = \frac{1}{4}\left[\nu''^2\left(\frac{m_1}{\Delta}\right)^2 - \nu'^2\left(\frac{m_2}{\Delta}\right)^2\right]$$

m_1, m_2 - массы рожденных бозонов.

При нашем выоре векторов Q и Δ легко убедиться, что они ортогональны и что вектор $\Delta\ (\Delta_0 = 0)$ является пространственно-подобным, а вектор Q - времени подобным.

Фиксируя (как и ранее 4-мерный квадрат вектора

$$Q^2 = m_q^2 \tag{3.17}$$

Закон сохранения энергии-импульса (3.I) в выбранной нами системе отсчета $\vec{p} + \vec{p}' = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\vec{q} - 2\alpha\vec{Q} = -2\vec{p} + 2\beta\vec{\Delta}, \quad (\vec{q} - 2\alpha\vec{Q})(\vec{q} + 2\alpha\vec{Q}) = 4\gamma^2 M_q^2. \tag{3.18}$$

где

$$2\alpha = \frac{\nu' + \nu''}{\nu'\nu''}, \quad 2\beta = \left[\frac{(1+\eta)}{\nu''} - \frac{(1-\eta)}{\nu'}\right]$$

Отсюда после элементарных вычислений находим:

$$\vec{q} = \lambda\vec{e} - (1+\epsilon_1)\vec{p} - \epsilon_2\vec{n} + \beta\vec{\Delta}, \quad 2\alpha\vec{Q} = \lambda\vec{e} + (1-\epsilon_1)\vec{p} - \epsilon_2\vec{n} - \beta\vec{\Delta}. \tag{3.19}$$

где $\vec{e}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}/|\vec{p}|$ взаимно ортогональные единичные векторы (вектор $\vec{n}$ выбран в плоскости $(\vec{p}, \vec{\Delta})$), а

$$\lambda^2 = 4\alpha^2E^2 - 4\alpha^2 m_q^2 - (1-\epsilon_1)^2\vec{p}^2 - \epsilon_2^2 + 2\beta(1-\epsilon_1)(\vec{p}\vec{\Delta}) - 2\beta\epsilon_2(\vec{\Delta}\vec{n}) \tag{3.20}$$

E - попрежнему нулевая компонента вектора Q .

Величины ϵ_1 и ϵ_2 , входящие в выражение (3.19), определяются из соотношений (3.16) и (3.18). Для реакции двойного комптон-эффекта $\gamma+p\to 2\gamma+p'$ кинематические формулы (3.19)-(3.20) существенно упрощаются (q = 0) и принимают следующий вид:

$$Q^2=-\Delta^2=m_e^2 \quad , \quad q'=\frac{Q+\Delta}{\nu''} \quad , \quad q''=\frac{Q-\Delta}{\nu'} \tag{3.21}$$

$$\vec{q}=\lambda\vec{e}-(1+\epsilon_1)\vec{p}-\epsilon_2\vec{n}+\beta\vec{\Delta} \, , \quad 2\alpha\vec{Q}=\lambda\vec{e}+(1-\epsilon_1)\vec{p}-\epsilon_2\vec{n}-\beta\vec{\Delta} \tag{3.22}$$

где

$$\epsilon_1\vec{p}^2=m_e^2+\beta(\vec{p}\vec{\Delta}) \quad , \quad \epsilon_2(\vec{\Delta}\vec{n})=(1-\epsilon_1)(\vec{p}\vec{\Delta})-\beta m_e^2 \, .$$

В качестве переменной, по которой мы в дальнейшем будем рассматривать аналитические свойства амплитуды реакции, выберем переменную E следующим образом:

$$q_0'=\nu' E \quad , \quad q_0''=\nu'' E \, . \tag{3.23}$$

Совершенно очевидно, что переменные $\vec{p}, \vec{\Delta}$, ν', E независимы. Важно отметить следующее обстоятельство, что в разложении векторов $\vec{q}', \vec{q}'', \vec{q}$ по направлениям $\vec{e}, \vec{p}, \vec{n}$ составляющие на $\vec{p}$ и $\vec{n}$ фиксированы и не зависят от E, а составляющая на направление вектора $\vec{e}$ является функцией E.

Граница между наблюдаемой (импульсы вещественны, энергия положительна) и ненаблюдаемой областями определяется как в случае а), так и в случае в) переменной λ следующим образом, если переменная λ такова, что

$$\lambda^2 \geqslant 0 \quad , \tag{3.24}$$

то импульсы вещественны, и мы имеем наблюдаемую область, а если

$$\lambda^2 < 0 \quad , \tag{3.25}$$

то легко видеть, что векторы $\vec{q}'$, $\vec{q}''$ и $\vec{q}$ становятся комплексными и, следовательно, область - ненаблюдаемая.

Поскольку λ является функцией E, мы можем легко определить пороговое значение E_p из условия:

$$\lambda^2=0 \, . \tag{3.26}$$

Подставляя (3.22) в (3.20) и проводя некоторые элементарные преобразования, получим:

$$\lambda^2=(\nu'+\nu'')^2E^2-(\nu'+\nu'')^2m_e^2-\frac{1}{\sin^2(\widehat{\vec{p}\vec{\Delta}})}\left[\frac{\vec{p}^2-m_e^2}{|\vec{p}|}-(\nu'-\nu'')\frac{(\vec{\Delta}\vec{p})}{|\vec{p}|}\right]^2 \tag{3.27}$$

откуда пороговое значение энергии для двойного комптон-эффекта равно:

$$(\nu'+\nu'')^2 E_p^2 = (\nu'+\nu'')^2 m_a^2 + \frac{1}{\sin^2(\vec{p}\,\vec{\Delta})} \left[\frac{\vec{p}^{\,2} - m_a^2}{|\vec{p}\,|} - (\nu'-\nu'') \frac{(\vec{\Delta}\vec{p})}{|\vec{p}\,|} \right]^2 \tag{3.28}$$

c) Кинематика фиктивного процесса.

Для рассмотрения аналитических свойств амплитуды неупругого процесса типа $a+b \to a'+c+d$ нам необходимо будет рассмотреть кинематику фиктивного процесса, когда 4-х импульсы частиц определены следующими соотношениями:

$$q'^2 = q''^2 = \frac{\tau - m_\Delta^2}{ch^2\xi}\ , \quad q^2 = 4\tau - 4M_m^2\ , \quad -\vec{p}^{\,2} + p_0^2 = p'^2 = M^2, \quad M_m^2 = \mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2 - m^2 \tag{3.29}$$

τ – некоторый параметр, который будет определен ниже.

Вместо переменных ν' и ν'', связанных соотношением $\nu'\nu'' = 1$, удобно ввести независимую переменную ξ следующим образом:

$$\nu' = e^{\xi}\ , \quad \nu'' = e^{-\xi} \tag{3.30}$$

На основании (3.29) и (3.30) вектора Δ и Q могут быть записаны в виде:

$$Q = \frac{1}{2}\left[(1-\eta)e^{-\xi}q' + (1+\eta)e^{\xi}q''\right], \quad \Delta = \frac{1}{2}\left(e^{-\xi}q' - e^{\xi}q''\right). \tag{3.31}$$

где

$$\eta = \left(\frac{\tau}{m_\Delta^2} - 1\right) th\,\xi$$

В данном параграфе нами приняты следующие обозначения:

$$Q^2 = m_a^2\ , \quad \Delta^2 = -m_a^2 \tag{3.32}$$

причем

$$m_a^2 ch^2\xi = \tau + \frac{\tau^2}{m_\Delta^2} sh^2\xi$$

Будем считать, что векторы q', q'', q, p и p' связаны соотношением:

$$p + q = p' + q' + q'' \tag{3.33}$$

В системе отсчета, где сумма импульсов нуклона до и после реакции равна нулю, закон сохранения энергии и импульса системы может быть записан в виде:

$$\left(\frac{\vec{q} - 2ch\xi\,\vec{Q}}{2}\right)\left(\frac{\vec{q} + 2ch\xi\,\vec{Q}}{2}\right) = \frac{\tau^2}{m_\Delta^2} th^2\xi + M_m^2\ , \quad \frac{\vec{q} - 2ch\xi\,\vec{Q}}{2} = -\vec{p} + \frac{\tau}{m_\Delta^2} th\,\xi\,\vec{\Delta} \tag{3.34}$$

откуда после элементарных вычислений находим:

$$\frac{1}{2}\vec{q} = ch\xi\,\lambda\vec{e} + t\vec{\Delta} + s\vec{\tau} \quad , \quad \vec{Q} = \lambda\vec{e} + \ell\vec{\tau} \quad , \quad m_\Delta^2 t = \tau\, sh\xi - (\vec{p}\vec{\Delta}) .$$

$$-2S|\vec{p}|\sin\alpha = M_m^2 - \vec{p}^2\cos 2\alpha + 2p\frac{\tau}{m_\Delta} sh\xi\cos\alpha$$

$$-2\ell|\vec{p}|\,ch\xi\sin\alpha = M_m^2 - \vec{p}^2 + 2p\frac{\tau}{m_\Delta} sh\xi\cos\alpha$$

$$\vec{q}\,' = e^{\xi}\{\vec{Q} + (1+\eta)\vec{\Delta}\} \quad , \quad \vec{q}\,'' = e^{-\xi}\{\vec{Q} - (1-\eta)\vec{\Delta}\} .$$

$\vec{e},\ \dfrac{\vec{\Delta}}{m_\Delta},\ \vec{\tau}$ – взаимно ортогональные единичные орты.

$$\lambda^2 = \omega^2 - m_a^2 - \ell^2 \ , \quad Q_0 = \omega \ , \quad (\vec{p}\vec{\Delta}) = p\, m_\Delta\cos\alpha . \tag{3.37}$$

Реальный случай рассеяния $a + b \to a' + c + d$ может быть получен из предыдущих формул, если положить:

$$\tau = \tau_0 = \mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2 . \tag{3.38}$$

В дальнейшем при анализе особенностей антиэрмитовой части амплитуды нам необходимо будет выразить $(\vec{p}-\vec{q}\,')^2,\ (\vec{p}-\vec{q}\,'')^2,\ (\vec{p}\,'-\vec{q})^2$ в переменных $\omega, \vec{p}^2, \xi, m_\Delta, \alpha$. Используя кинематические формулы (3.35) и (3.36), легко получить:

$$\begin{aligned}
(\vec{p}-\vec{q}\,')^2 &= \vec{p}^2 + e^{2\xi}\omega^2 - \frac{\tau - m_\Delta^2}{ch^2\xi} + \frac{e^{\xi}}{ch\xi}(M_m^2 - \vec{p}^2) - 2p\,m_\Delta\frac{\cos\alpha}{ch\xi} \\
(\vec{p}-\vec{q}\,'')^2 &= \vec{p}^2 + e^{-2\xi}\omega^2 - \frac{\tau - m_\Delta^2}{ch^2\xi} + \frac{e^{-\xi}}{ch\xi}(M_m^2 - \vec{p}^2) + 2p\,m_\Delta\frac{\cos\alpha}{ch\xi} \\
(\vec{p}\,'-\vec{q})^2 &= -\vec{p}^2 + 4ch^2\xi\,\omega^2 + 2(M_m^2 - 2\tau)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Для дальнейшего нам будет необходимо выбрать τ таким образом, чтобы выражение

$$m_a^2 + \ell^2 = \tau\,\frac{m_\Delta^2 + \tau\, sh^2\xi}{m_\Delta^2\, ch^2\xi} + \left[\frac{M_m^2 - \vec{p}^2 + 2p\frac{\tau}{m_\Delta} sh\xi\cos\alpha}{2p\, ch\xi\sin\alpha}\right]^2 \tag{3.40}$$

было меньше нуля.

Это условие может быть переписано в виде:

$$\left(\frac{\tau}{m_\Delta}\right)^2 sh^2\xi + \left(\frac{\tau}{m_\Delta}\right)\left[\frac{M_m^2 - \vec{p}^2}{|\vec{p}|} sh\xi\cos\alpha + m_\Delta\sin^2\alpha\right] + \frac{(M_m^2 - \vec{p}^2)^2}{4\vec{p}^2} < 0 . \tag{3.41}$$

Чтобы существовала некоторая область значений τ, при которых выполнялось неравенство (3.4I), необходимо и достаточно, чтобы:

$$sh\,\xi < \frac{2m_s\cdot|\vec{p}|}{M_m^2-\vec{p}^{\,2}}\cos^2\frac{\alpha}{2} \tag{3.42}$$

для положительных значений ξ и

$$sh\,|\xi| < \frac{2m_s\cdot|\vec{p}|}{M_m^2-\vec{p}^{\,2}}\sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{3.43}$$

для отрицательных значений ξ.

В дальнейшем мы будем считать, что τ лежит между корнями уравнения (3.4I)

$$\tau_1 < \tau < \tau_2 \tag{3.44}$$

При таком выборе τ величина λ будет вещественной для любых действительных значений ω.

Глва III. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ ТИПА ($a+b\to a'+c+d$)

Введение

В I главе мы рассматривали реакции типа $a+b\to a'+c+d$, в которых наряду с сильно взаимодействующими частицами участвуют электроны, μ -мезоны или слабо взаимодействующие частицы. Примерами таких процессов являются:

$$p+e\to p'+e'+\pi\ ,\quad p+e\to p'+e'+\gamma\ ,\quad p+\gamma\to p'+e^{+}+e^{-}$$

и т.д. Как было показано, рассмотрение таких процессов сводится к изучению некоторых блоков с двумя фермионными и двумя бозонными концами, один из которых (или оба) являются виртуальными. Доказав существование дисперсионных соотношений для "блоковых элементов", мы тем самым показали возможность изучения неупругих процессов типа

$$p+e\to p'+e'+\pi\ ,\quad p+e\to p'+e'+\gamma\ ,\quad p+\gamma\to p'+e^{+}+e^{-}$$

и т.д, с помощью метода дисперсионных соотношений. Другими примерами неупругих процессов вида $a+b\to a'+c+d$ являются реакции:

$$p+\pi\to p'+\pi'+\pi''\ ,\quad p+\gamma\to p'+\pi'+\pi''\ ,\quad p+\gamma\to p'+\gamma'+\gamma''$$

и т.д., в которых участвуют сильно взаимодействующие частицы и γ - кванты.

В настоящей главе получены дисперсионные соотношения для этих процессов. Эти соотношения дают возможность исследовать неупругие процессы вида $a+b\to a'+c+d$ с той же полнотой описания, как и в случае исследования методом дисперсионных соотношений неупругих процессов типа фоторождения, виртуального фоторождения и т.д. Первые шаги в исследовании сложных процессов $p+\pi\to p'+\pi'+\pi''$, $p+\gamma\to p'+\pi'+\pi''$ были сделаны с помощью метода Чу-Лоу. Однако этот метод является несовершенным, поскольку он не учитывает движения нуклона. Попытка учесть отдачу нуклона (в рамках этого метода) встречается с серьезным затруднением, поскольку при этом приходится работать с матричными элементами не на энергетической поверхности. Метод дисперсионных соотношений в случае фиксированного нуклонного источника дает результаты, аналогичные результатам Чу-Лоу и позволяет без труда (кроме технических усложнений) учесть отдачу нуклона.

Вопрос обоснования дисперсионных соотношений для неупругих процессов типа $a+b\to a'+c+d$ является весьма сложным. В настоящей главе мы дадим доказательство дисперсионных соотношений для процессов типа $\gamma+p\to\gamma'+\gamma''+p'$, $\pi+p\to p'+\gamma'+\gamma''$, когда ненаблюдаемая область отсутствует, а также на примере реакции $p+\pi\to p'+\pi'+\pi''$ дадим доказательство дисперсионных соотношений и при наличии ненаблюдаемой области. При этом мы сделаем предположение о существовании некоторой теоремы об аналитическом продолжении антиэрмитовой части амплитуды, подобной той, которая была доказана при исследовании виртуальных процессов.

В § I и § 2 данной главы дается анализ антиэрмитовой части амплитуды процесса. При этом показывается, что в области энергий $|E| < E_c$ (граница непрерывного спектра) в антиэрмитову часть амплитуды дают вклад лишь однонуклонные состояния, а в область $|E| > E_c$ – состояния, содержащие как нуклоны, так и мезоны. На основании этих результатов вычисляется вклад в дисперсионный интеграл от области $|E| < E_c$. Этот вклад является неоднородным членом дисперсионных соотношений. Показано, что неоднородный член дисперсионных соотношений является суммой произведений вершинного оператора на 4-вершинный оператор.

В § 3 рассматриваются аналитические свойства запаздывающей и опережающей амплитуд и дается строгое доказательство дисперсионных соотношений, которые не содержат ненаблюдаемой области энергий. В этом случае доказательство дисперсионных соотношений становится простым и состоит из следующих основных этапов.

Вначале с помощью принципа причинности строятся запаздывающая и опережающая амплитуды процесса, первая из которых связана с прямым процессом, а вторая – с обратным. Эти функции определены для вещественных значений энергии, лежащих выше порога реакции. Затем строятся функции $\Phi^z(\rho, E)$ и $\Phi^a(\rho, E)$, аналитические в верхней и нижней полуплоскости E соответственно и совпадающие друг с другом на некотором участке действительной оси. Эти функции определяют единую функцию Φ, аналитическую во всей плоскости комплексной переменной E, за исключением линий разреза на действительной оси $|E| > E_c$. На берегах линий разреза предельные значения функций $\Phi^z(\rho,E)$ и $\Phi^a(\rho,E)$ при ρ, стремящемся к нулю, связаны с запаздывающей и опережающей амплитудами соответственно. Дисперсионные соотношения возникают как следствие теоремы Коши, примененной к этой функции.

В § 4 дан общий метод построения дисперсионных соотношений для реакций типа $(a+b \to a'+c+d)$ при наличии ненаблюдаемой области энергии. Для определенности мы будем рассматривать процесс $\pi + p \to p' + \pi' + \pi''$. Рассмотрение других процессов типа $a+b \to a'+c+d$ вполне аналогично. Метод получения дисперсионных соотношений является общим и может быть распространен и на более сложные процессы рассеяния, когда в начале реакции имеется фермион и один бозон, а в конце – фермион и n-бозонов. Вопросы получения дисперсионных соотношений для процессов типа $a+b \to a'+c+d$ рассматривались также в работе Kibble /35/.

Эта работа так же, как и работы /48-50/, является развитием метода дисперсионных соотношений на неупругие процессы вида $a+b \to a'+c+d$. Однако, при выводе дисперсионных соотношений для мнимой массы в работе Kibble делается необоснованное утверждение об области аналитичности выражения (6.2). В связи с этим рассуждения об аналитическом продолжении дисперсионных соотношений теряют доказательную силу (Kibble § 7).

§ I. Разложение антиэрмитовой части амплитуды по полной системе векторов состояний

В настоящем параграфе, используя свойства трансляционной инвариантности, а также предположение, что оператор энергии-импульса обладает полной системой векторов состояний, мы разложим антиэрмитову часть амплитуды процесса $a+b\to a'+c+d$ по физическим состояниям, содержащим нуклоны и мезоны.

На основании результатов гл.II § 2 антиэрмитова часть амплитуды рассматриваемого процесса может быть записана в виде:

$$A_{\alpha,\omega}(q;q',q'') = \frac{1}{2i}\left(T^{ret}_{\alpha,\omega}(q;q',q'') - T^{adv}_{\alpha,\omega}(q;q',q'')\right) \tag{I.I}$$

где

$$T^{ret}_{\alpha,\omega}(q;q',q'') = -\iint e^{i(q'x'+q''x'')}dx'dx''\, \langle p',s'| \frac{\delta^2 j_\rho(o)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\,\delta\varphi_{\rho''}(x'')}|p,s\rangle \tag{I.2}$$

$$T^{adv}_{\alpha,\omega}(q;q',q'') = \iint e^{i(q'x'+q''x'')}dx'dx'\, \langle p',s'| \frac{\delta^2 \Lambda_\rho(o)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\,\delta\varphi_{\rho''}(x'')}|p,s\rangle$$

Рассмотрим выражение

$$A_{q;q';q''} = -\frac{i}{\sqrt{8p_0q_0'q_0''}}\iiint e^{i(q'x'+q''x''-qx)}dx\,dx'dx''\,\langle p',s'|\frac{\delta^2 j_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\delta\varphi_{\rho''}(x'')}+\frac{\delta^2\Lambda_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\delta\varphi_{\rho''}(x'')}|p,s\rangle \tag{I.3}$$

Из сравнения (I.3) с (I.I) легко видеть

$$A_{q;q';q''} = -\frac{(2\pi)^4\, 2}{\sqrt{8p_0q_0'q_0''}}\,\delta(p+q-p'-q'-q'')\,A_{\alpha,\omega}(q;q',q'') \tag{I.4}$$

Учитывая равенство

$$\Lambda_\rho(x) = -\overset{+}{S}\, j_\rho(x)\, S \tag{I.5}$$

а также стабильность состояний $|s,p\rangle$, $|s',p'\rangle$, легко получить:

$$\langle p', s' | \frac{\delta^2 j_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\delta\varphi_{\rho''}(x'')} | p, s \rangle + \langle p', s' | \frac{\delta^2 \Lambda_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\delta\varphi_{\rho''}(x'')} | p, s \rangle =$$

$$= i \langle p', s' | \mathcal{D}_{\rho,\rho''}(x,x'') j_{\rho'}(x') + \mathcal{D}_{\rho,\rho'}(x,x') j_{\rho''}(x'') + j_\rho(x) \mathcal{D}_{\rho',\rho''}(x',x'') -$$
$$- \mathcal{D}_{\rho',\rho''}(x',x'') j_\rho(x) - j_{\rho'}(x') \mathcal{D}_{\rho,\rho''}(x,x'') - j_{\rho''}(x'') \mathcal{D}_{\rho,\rho'}(x,x') | p, s \rangle \qquad (I.6)$$

где

$$\mathcal{D}_{\rho,\rho'}(x,x') = \frac{1}{2}\left(\frac{\delta j_\rho(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')} + \frac{\delta j_{\rho'}(x')}{\delta\varphi_\rho(x)} \right)$$

Подставляя (I.6) в (I.3) и учитывая (I.4), антиэрмитова часть амплитуды может быть представлена в следующем виде:

$$A_{\alpha,\omega}(q;q',q'') =$$

$$= \pi \sum_n \int d\vec{k}_n \Big\{ \delta(p'+q'-k_n) V_{q'}(n,p') D_{q;q''}(p,n) - \delta(p-q'-k_n) D_{q;q''}(n,p') V_{q'}(p,n) + \qquad (I.7)$$
$$+ \delta(p'+q''-k_n) V_{q''}(n,p') D_{q;q'}(p,n) - \delta(p-q''-k_n) D_{q;q'}(n,p') V_{q''}(p,n) +$$
$$+ \delta(p+q-k_n) D_{-q';q''}(n,p') V_q(p,n) - \delta(p'-q-k_n) V_q(n,p') D_{-q';q''}(p,n) \Big\}$$

где

$$(2\pi)^4 \delta(p-q'-k_n) D_{q;q''}(n,p') = \iint e^{iq'x''-iqx} \langle p', s' | \mathcal{D}_{\rho,\rho''}(x,x'') | n \rangle dx\, dx'' \qquad (I.8)$$

$$V_{q'}(n,p') = \langle p', s' | j_{\rho'}(0) | n \rangle$$

При получении (I.7) были использованы свойства трансляционной инвариантности матричных элементов, а также предположение, что оператор энергии-импульса обладает полной системой векторов состояний. Проводя интегрирование в (I.7), получим:

$$A_{\alpha,\omega}(q;q',q'') =$$

$$= \pi \sum_{n} \Big\{ V_{q'}(n,p')\, D_{q;q''}(p,n)\, \delta\big(p_0'+q_0'-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}\,'+\vec{q}\,')^2}\big) -$$

$$- D_{q;q''}(n,p')\, V_{q'}(p,n)\, \delta\big(p_0-q_0'-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,')^2}\big) + \qquad (I.9)$$

$$+ V_{q''}(n,p')\, D_{q;q'}(p,n)\, \delta\big(p_0'+q_0''-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}\,'+\vec{q}\,'')^2}\big) - D_{q;q'}(n,p')\, V_{q''}(p,n)\, \delta\big(p_0-q_0''-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,'')^2}\big) +$$

$$+ D_{-q';q''}(n,p')\, V_{q}(p,n)\, \delta\big(p_0+q_0-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}+\vec{q})^2}\big) - V_{q}(n,p')\, D_{-q';q''}(p,n)\, \delta\big(p_0'-q_0-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}\,'-\vec{q})^2}\big) \Big\}.$$

§ 2. Анализ антиэрмитовой части амплитуды процесса $\gamma+p \to \gamma'+\gamma''+p'$

В настоящем параграфе мы дадим анализ антиэрмитовой части амплитуды двойного комптон-эффекта (I.9) для общего случая рассеяния. (Кинематика этого случая рассмотрена в пункте "в" § 3 гл.П).

В антиэрмитову часть амплитуды дают вклад физические состояния, содержащие нуклоны и мезоны. Реальность этих состояний обусловлена наличием δ-функций, которые выражают закон сохранения энергии-импульса системы. Выражение для антиэрмитовой части амплитуды имеет смысл лишь для области энергий, где $E \geqslant E_p$ (порог процесса). Чтобы исследовать область $E < E_p$, мы будем считать, что величины $\vec{Q}$ и E независимы. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать выражение для A и в области $E < E_p$.

Перейдем теперь к рассмотрению δ-особенностей антиэрмитовой части амплитуды (I.9). Легко видеть, что для $M_n = M$ (однонуклонные состояния) δ-функции имеют особенности при значениях энергии, даваемых корнями следующих уравнений:

$$h_1(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p}) = \big[\nu'(Q^2+\Delta^2) - 2p\Delta + 2\vec{p}\vec{Q}\big]^2 - 4E^2(\vec{p}^{\,2}+M^2) = 0$$

$$h_2(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p}) = \big[\nu''(Q^2+\Delta^2) + 2p\Delta + 2\vec{p}\vec{Q}\big]^2 - 4E^2(\vec{p}^{\,2}+M^2) = 0 \qquad (2.I)$$

$$h_3(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p}) = \big[(\nu'+\nu'')^2Q^2 + (\nu'-\nu'')^2\Delta^2 - 2(\nu'-\nu'')p\Delta + 2(\nu'+\nu'')\vec{p}\vec{Q}\big]^2 - 4(\nu'+\nu'')^2E^2(\vec{p}^{\,2}+M^2) = 0 .$$

Полагая, что в интервале $M \leq M_n \leq M+\mu$ нет связанных состояний и учитывая электромагнитное взаимодействие в низшем приближении по e, получим следующие значения для границ непрерывных спектров:

$$\pm \nu' E_{1c} = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 + (\nu'\vec{Q}-\vec{p})^2 + (\nu'\vec{\Delta}-\vec{p})^2 - \vec{p}^2}$$

$$\pm \nu'' E_{2c} = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 + (\nu''\vec{Q}-\vec{p})^2 + (\nu''\vec{\Delta}-\vec{p})^2 - \vec{p}^2} \qquad (2.2)$$

$$\pm (\nu'+\nu'') E_{3c} = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 + [(\nu'+\nu'')\vec{Q}-\vec{p}]^2 + [(\nu'-\nu'')\vec{\Delta}-\vec{p}]^2 - \vec{p}^2}$$

Как видно из этих формул границы непрерывных спектров зависят от вектора $\vec{Q}$. Их минимальные значения даются следующими выражениями:

$$\pm \nu' E_{1c}^{min} = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 + (\nu'\vec{\Delta}-\vec{p})^2 - \vec{p}^2}$$

$$\pm \nu'' E_{2c}^{min} = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 + (\nu''\vec{\Delta}-\vec{p})^2 - \vec{p}^2} \qquad (2.3)$$

$$\pm (\nu'+\nu'') E_{3c}^{min} = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 + [(\nu'-\nu'')\vec{\Delta}-\vec{p}]^2 - \vec{p}^2}$$

Таким образом, для любых значений $\vec{Q}$ существуют такие p, Δ и ν', что

$$|E_{ic}^{min}| \geqslant E_\gamma > 0 \qquad (i = 1,2,3) \qquad (2.4)$$

Это означает, что на некотором отрезке действительной оси вклад в антиэрмитову часть могут давать лишь однонуклонные полюса. Введем функции $\tilde{T}^{ret}_{adv}(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p})$, определив их следующим образом:

$$\tilde{T}^{ret}_{adv}(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p}) = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \quad T^{ret}_{adv}(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p}) \qquad (2.5)$$

Тогда функция

$$\tilde{A}_{\alpha,\omega}(E,\vec{Q},\vec{p},\vec{\Delta}) = \frac{1}{2i}\left(\tilde{T}^{ret}_{\alpha,\omega} - \tilde{T}^{adv}_{\alpha,\omega}\right) \qquad (2.6)$$

На основании (2.I) и (2.4) обращается в нуль в интервале $(-E_\gamma, E_\gamma)$. Вводя переменные Q и Δ, выражения для функций T^{ret} и T^{adv} можно записать в виде:

$$T^{ret}_{adv}(E,\vec{Q},\vec{\Delta},\vec{p}) = \iint e^{iQx+i\Delta y} \; T^{ret}_{adv}(x,y)\,dx\,dy \qquad (2.7)$$

где

$$T^{ret}(x,y) = -2^{-4} \langle p',s' | \frac{\delta^2 j_\nu(0)}{\delta A_{\sigma'}\left(\frac{x+y}{2\nu'}\right)\delta A_{\sigma''}\left(\frac{x-y}{2\nu''}\right)} | p,s \rangle$$

$$T^{adv}(x,y) = 2^{-\nu} \langle p', s' | \frac{\delta^2 \Lambda_\nu(0)}{\delta A_{\sigma'}\left(\frac{x+y}{2\nu'}\right) \delta A_{\sigma''}\left(\frac{x-y}{2\nu''}\right)} | p, s \rangle \tag{2.8}$$

Умножая выражение (2.7) на произведение функций h , получим:

$$\widetilde{T}^{ret}_{adv}(E, \vec{Q}, \vec{\Delta}, \vec{p}) = \iint e^{iQx + i\Delta y} \; \widetilde{T}^{ret}_{adv}(x,y)\, dx\, dy \tag{2.9}$$

где

$$\widetilde{T}^{ret}_{adv}(x,y) = \hat{h}_1 \cdot \hat{h}_2 \cdot \hat{h}_3 \; T^{ret}_{adv}(x,y) \tag{2.10}$$

$$\hat{h}_1 = \left[-\nu'(\Box_x^2 + \Box_y^2) + 2i(\vec{p}\vec{\nabla}_y) + 2i(\vec{p}\vec{\nabla}_x)\right]^2 + 4(\vec{p}^2 + M^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$$

$$\hat{h}_2 = \left[-\nu''(\Box_x^2 + \Box_y^2) - 2i(\vec{p}\vec{\nabla}_y) + 2i(\vec{p}\vec{\nabla}_x)\right]^2 + 4(\vec{p}^2 + M^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$$

$$\hat{h}_3 = \left[-(\nu'+\nu'')^2\Box_x^2 - (\nu'-\nu'')^2\Box_y^2 + 2i(\nu'-\nu'')(\vec{p}\vec{\nabla}_y) + 2i(\nu'+\nu'')(\vec{p}\vec{\nabla}_x)\right]^2 + 4(\nu'+\nu'')^2(\vec{p}^2 + M^2)\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$$

Подставляя (2.9) в (2.6), получим:

$$\widetilde{A}_{\alpha,\omega}(E, \vec{Q}, \vec{\Delta}, \vec{p}) = \iint e^{iQx + i\Delta y}\, \widetilde{A}_{\alpha,\omega}(x,y)\, dx\, dy \tag{2.11}$$

Так как величины E и $\vec{Q}$ предполагаются независимыми, то, применяя преобразование Фурье, выражение (2.II) можно представить в виде:

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{Q}\vec{x}}\, \widetilde{A}_{\alpha,\omega}(E, \vec{Q}, \vec{\Delta}, \vec{p})\, d\vec{Q} = \int e^{iEx_0 + i\Delta y}\, A_{\alpha,\omega}(x_0, \vec{x}; y)\, dx_0\, dy$$

Учитывая, что $\widetilde{A}_{\alpha,\omega}(E, \vec{Q}, \vec{\Delta}, \vec{p})$ обращается в нуль в интервале $(-E_f, E_f)$, получим:

$$\int e^{iEx_0 + i\Delta y}\, \widetilde{A}_{\alpha,\omega}(x_0, \vec{x}; y)\, dx_0\, dy = 0 \tag{2.12}$$

если

$$|E| < E_f \quad , \quad \operatorname{Im} E = 0 .$$

§ 3. Аналитические свойства амплитуды двойного комптон-эффекта и дисперсионные соотношения

В настоящем параграфе мы исследуем аналитические свойства амплитуды двойного комптон-эффекта и дадим строгое доказательство дисперсионных соотношений для общего случая рассеяния (пункт "в" § 3 гл.П). Следует подчеркнуть, что метод доказательства дисперсионных соотношений, изложенный в этом параграфе, не является общим, поскольку он существенно основывается на условии отсутствия в дисперсионных соотношениях ненаблюдаемой области энергий.

Введем функции $\Phi^{r}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)$ и $\Phi^{a}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)$ следующим образом:

$$\Phi^{r,a}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) = S_{\pm}\iint dx\,dy\ \widetilde{T}^{ret}_{adv}(x,y)\exp\left[iEx_0 - i\vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-E_p^2} - i(\vec{p}\vec{x})\eta - i(\vec{\Delta}\vec{x})\xi - i\vec{\Delta}\vec{y} - \rho\vec{x}^2\right] \tag{3.1}$$

где

$$\rho > 0\,, \quad \eta = \frac{1}{\nu'+\nu''}\left[1-\epsilon_1 + \frac{(\vec{\Delta}\vec{p})}{(\vec{\Delta}\vec{n})}\frac{\epsilon_2}{\vec{p}^2}\right], \quad \xi = -\frac{1}{\nu'+\nu''}\left[\beta + \frac{\epsilon_2}{(\vec{\Delta}\vec{n})}\right] \tag{3.2}$$

$S_{\pm}$ – операция симметризации или антисимметризации по $\vec{e}$. При введении функций Φ^{r} и Φ^{a} мы восстановили связь между E и $\vec{Q}$

$$E^2 - \vec{Q}^2 = m_Q^2 \tag{3.3}$$

причем вместо $\vec{Q}$ мы подставили выражение (3.22 гл.П)

$$\vec{Q} = \vec{e}\sqrt{E^2-E_p^2} + \eta\vec{p} + \xi\vec{\Delta} \tag{3.4}$$

Функции Φ^{r} и Φ^{a}, благодаря экспоненциальному множителю $\exp(-\rho\vec{x}^2)$ являются аналитическими в верхней (нижней) полуплоскостях энергии E соответственно. На основании (2.12) следует, что:

$$\Phi^{r}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) = \Phi^{a}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) \tag{3.5}$$

при

$$|E| < E_q\,, \quad \operatorname{Im} E = 0$$

Тогда существует функция

$$\Phi(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) = \begin{cases} \Phi^{r}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) & \text{при } \operatorname{Im} E > 0 \\ \Phi^{a}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) & \text{при } \operatorname{Im} E < 0\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

аналитическая во всей плоскости энергии за исключением линий разреза

$$-\infty < Re\,E < -E_\gamma \quad , \quad E_\gamma < Re\,E < \infty \quad , \quad Im\,E = 0 \qquad (3.7)$$

при этом значения ϕ на верхних берегах разрезов равны ϕ^{r}, а на нижних ϕ^{a}.

В работе[25] показано, что функции типа (3.I) возрастают на бесконечности $(/E/\to\infty)$ не быстрее полинома. Обозначим через $n+8$ степень этого полинома. Тогда, применяя теорему Коши к функции:

$$(E-E_0)^{-n-9}\,\phi(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)$$

где E_0 - вещественный параметр, причем $/E_0/ < E_\gamma$ получим следующее соотношение:

$$\phi(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho) = \frac{(E-E_0)^{n+9}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-E_\gamma}\frac{\phi(E'+i0,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)-\phi(E'-i0,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+9}}\,dE' \qquad (3.8)$$

$$+\frac{(E-E_0)^{n+9}}{2\pi i}\int_{E_\gamma}^{\infty}\frac{\phi(E'+i0,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)-\phi(E'-i0,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},\rho)}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+9}}\,dE' + P_n(E)$$

В том случае, когда ненаблюдаемая область отсутствует (гл.Ш § I)

$$E_\gamma > E_\rho$$

интегрирование в (3.8) проводится по наблюдаемой области. Но так как функции ϕ^{r} и ϕ^{a} определены в наблюдаемой области и для ρ = 0, то мы можем в интегралах положить ρ = 0. При этом совершенно очевидно, что правая часть выражения (3.8) будет аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного E за исключением линий разреза (3.7). Но из выражения (3.8) следует, что при ρ = 0 правая часть определяет функцию $\phi(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},0)$, аналитическую во всей плоскости E за исключением линий разреза (3.7).

Но функция $\phi(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta},0)$ отличается от функции

$$S_\pm\,G(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta}) = \begin{cases} S_\pm\,T^{ret}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta}) & \text{при } Im\,E > 0 \\ S_\pm\,T^{adv}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta}) & \text{при } Im\,E < 0 \end{cases} \qquad (3.9)$$

лишь множителями, обращающимися в нуль в точках

$$E = \pm E_1\,, \quad E = \pm E_2\,, \quad E = \pm E_3\,.$$

Полюса $\pm E_1, \pm E_2, \pm E_3$ определяются из уравнений (2.I), когда связь между E и $\vec{Q}$ восстановлена

$$\pm(\nu'+\nu'')\sqrt{\vec{p}^2+M^2}\,E_1 = m_q^2-\vec{p}^2-2\nu''(\vec{p}\vec{\Delta})$$
$$\pm(\nu'+\nu'')\sqrt{\vec{p}^2+M^2}\,E_2 = m_q^2-\vec{p}^2+2\nu\,(\vec{p}\vec{\Delta}) \qquad (3.10)$$

$$\pm(\nu'+\nu'')\sqrt{\vec{p}^2+M^2}\,E_1 = -\vec{p}^2 - m_q^2$$

Граница непрерывного спектра E_γ определяется из (2.3) таким образом, чтобы границы спектров E_{ic}^{min} удовлетворяли условию:

$$E_{ic}^{min} \geqslant E_\gamma \qquad (\, i = 1,2,3) \tag{3.11}$$

Совершенно очевидно, что условие (2.7) будет выполнено, если E_γ выбрать равным:

$$(\nu'+\nu'')E_\gamma = -p_0 + \sqrt{(M+\mu)^2 - \vec{p}^2} \tag{3.12}$$

Условие отсутствия ненаблюдаемой области в дисперсионных соотношениях имеет следующий вид:

$$E_\gamma \geqslant E_p \tag{3.13}$$

Это условие накладывает некоторые ограничения на возможные значения переменных $\vec{p}, \vec{\Delta}, \nu'$. Подставляя в (3.13) выражения (3.28 гл.П) и (3.12) получим, что если:

$$\vartheta = \sqrt{(M+\mu)^2 - \vec{p}^2} - p_0 > \frac{(\vec{p}^2 + m_q^2)}{|\vec{p}|} \tag{3.14}$$

то для любых значений углов между векторами $\vec{p}$ и $\vec{\Delta}$ найдется соответствующее значение разности $(\nu'-\nu'')$, лежащее между $(\nu'-\nu'')_1$ и $(\nu'-\nu'')_2$, при которой ненаблюдаемая область отсутствует.

$$2|\vec{p}|\,m_q(\nu'-\nu'')_{1,2} = \cos(\widehat{\vec{p}\vec{\Delta}})\cdot(\vec{p}^2 - m_q^2) \pm |\vec{p}|\sin(\widehat{\vec{p}\vec{\Delta}})\sqrt{\vartheta^2 - (\vec{p}^2+m_q^2)^2/\vec{p}^2} \tag{3.15}$$

Заметим, что если

$$\sqrt{(M+\mu)^2 - \vec{p}^2} - p_0 > |\vec{p}| \tag{3.16}$$

то всегда существует некоторый интервал возможных значений m_q, при которых неравенства (3.14) выполняются.

Итак, выше мы установили, что если выполнено условие (3.13), то функция $S_\pm\, \mathcal{C}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta})$ является аналитической в верхней и нижней полуплоскостях E с линией разреза вдоль вещественной оси $|E| > E_\gamma$ и простыми полюсами в точках $\pm E_1, \pm E_2, \pm E_3$. Применяя к функции

$$(E-E_0)^{-n-1}\, S_\pm\, \mathcal{C}(E,\vec{e},\vec{p},\vec{\Delta}) \tag{3.17}$$

интегральную теорему Коши, получим:

$$S_{\pm} \mathcal{C}(E,\vec{\varepsilon},\vec{p},\vec{\Delta}_{i}) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int\limits_{|E'|\geq E_f}^{\infty} \frac{S_{\pm} T^{ret}(E') - S_{\pm} T^{adv}(E')}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} dE' +$$

$$+ \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma} \left[\left(\frac{E_0 - E}{E_0 - E_i}\right)^{n+1} \frac{S_{\pm} R_i(\vec{p},\vec{\Delta},\vec{\varepsilon})}{E_i - E} + \left(\frac{E_0 - E}{E_0 + E_i}\right)^{n+1} \frac{S_{\pm} \Omega_i(\vec{p},\vec{\Delta},\vec{\varepsilon})}{E_i + E} \right] \tag{3.18}$$

где

$$R_\alpha = -\frac{1}{\nu}\left(1 - \frac{\nu E_3}{p_0}\right) V_q(p'',p') D_{q';q''}(p,p'') \tag{3.19}$$

$$R_\beta = \frac{1}{\nu''}\left(1 + \frac{\nu'' E_2}{p_0}\right) V_{q''}(p'',p') D_{q;q'}(p,p'')$$

$$R_\gamma = \frac{1}{\nu'}\left(1 + \frac{\nu' E_1}{p_0}\right) V_{q'}(p'',p') D_{q;q''}(p,p'')$$

$$\Omega_\alpha = -\frac{1}{\nu}\left(1 - \frac{\nu E_3}{p_0}\right) D_{q';q''}(p'',p') V_q(p,p'') \tag{3.20}$$

$$\Omega_\beta = \frac{1}{\nu''}\left(1 + \frac{\nu'' E_2}{p_0}\right) D_{q;q'}(p'',p') V_{q''}(p,p'')$$

$$\Omega_\gamma = \frac{1}{\nu'}\left(1 + \frac{\nu' E_1}{p_0}\right) D_{q;q''}(p'',p') V_{q'}(p,p'')$$

Неоднородный член в выражении (3.18) возникает из-за однонуклонных полюсов E_i ,лежащих в области $|E|<E_f$. В формулах (3.19) и (3.20) операторы $V_{q'}, V_{q''}, V_q$ являются обычными вершинными операторами (с одним фотонным и двумя нуклонными концами), а операторы $D_{q;q''}$, $D_{q;q'}$ и т.д. 4-вершинными (с двумя фотонными и двумя нуклонными концами).

В выражении (3.18) E принимает лишь комплексные значения. Используя предельные соотношения:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{C}(E+i\epsilon) = T^{ret}(E) \,, \quad \lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{C}(E-i\epsilon) = T^{adv}(E)$$

совершим переход к действительным значениям E.

$$S_{\pm} D_{\alpha,\omega}(E) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi} P \int\limits_{|E'|\geq E_f}^{\infty} dE' \frac{S_{\pm} A_{\alpha,\omega}(E')}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} + P_n(E)$$

$$+ \sum_{i=\alpha,\beta,\gamma} \left[\left(\frac{E_0 - E}{E_0 - E_i}\right)^{n+1} \frac{S_{\pm} R_i(\vec{p},\vec{\Delta},\vec{\varepsilon})}{E_i - E} + \left(\frac{E_0 - E}{E_0 + E_i}\right)^{n+1} \frac{S_{\pm} \Omega_i(\vec{p},\vec{\Delta},\vec{\varepsilon})}{E_i + E} \right] \tag{3.21}$$

где $D_{\alpha,\omega}(E)$ и $A_{\alpha,\omega}(E)$ эрмитова и антиэрмитова части амплитуды. Заметим, что так как в интервале

$E_p \leqslant E_q < E_c$ антиэрмитова часть равна нулю, то в (3.2I) интегрирование фактически ведется от E_c. Отрицательная область энергий в дисперсионных соотношениях (3.2I) может быть исключена путем использования свойства симметрии антиэрмитовой части:

$$A_{\alpha;\omega}(E) = -P_{ss'}\overset{*}{A}_{\alpha;\omega}(-E)$$

$P_{ss'}$ – оператор перестановки спиновых состояний нуклона.

§ 4. Дисперсионные соотношения для неупругих процессов при наличии ненаблюдаемой области энергии

Ранее нами были получены и обоснованы дисперсионные соотношения для тех реакций типа $a+b \to a'+c+d$, в которых ненаблюдаемая область (при определенных условиях) отсутствует.

В настоящем параграфе мы дадим общий метод построения дисперсионных соотношений для реакций типа $a+b \to a'+c+d$ при наличии ненаблюдаемой области энергии.

а) Дисперсионные соотношения для фиктивного процесса. Фурье-образы запаздывающего и опережающего матричных элементов процесса $\pi+p \to \pi'+\pi''+p'$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} T^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) &= -\iint\limits_{G} e^{i(Qx+\Delta y)} F^{ret}(x,y)\,dx\,dy \\ T^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) &= \iint\limits_{G'} e^{i(Qx+\Delta y)} F^{adv}(x,y)\,dx\,dy \end{aligned} \tag{4.1}$$

где области интегрирования G и G' определяются неравенствами:

$$\begin{aligned} G:&\quad x>0\ ,\quad -(1-\eta)x < y < (1+\eta)x \\ G':&\quad x<0\ ,\quad (1+\eta)x < y < -(1-\eta)x \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для рассматриваемого ранее фиктивного процесса (гл. II § 3, пункт "с") эти амплитуды принимают вид:

$$\begin{aligned} T^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) &= -\iint\limits_{G} e^{i\{\omega x_0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{\omega^2-m_q^2-e^2} - e(\vec{\tau}\vec{x}) - \vec{\Delta}\vec{y}\}}\,dx\,dy\; F^{ret}(x,y) \\ T^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) &= \iint\limits_{G'} e^{i\{\omega x_0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{\omega^2-m_q^2-e^2} - e(\vec{\tau}\vec{x}) - \vec{\Delta}\vec{y}\}}\,dx\,dy\; F^{adv}(x,y) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Когда τ изменяется в интервале $\tau_1 < \tau < \tau_2$ x)

$$|\mathrm{Im}\,\omega| > |\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2 - m_4^2 - e^2}| \qquad (4.4)$$

и, следовательно, функции $S_{\pm} T^{ret}(\omega,\tau)$ будут аналитическими в верхней полуплоскости комплексной переменной ω, а $S_{\pm} T^{adv}(\omega,\tau)$ - в нижней полуплоскости.

Покажем, что функции ST^{ret} и ST^{adv} представляют одну и ту же аналитическую функцию, т.е. что функция:

$$ST(\omega,\tau) = \begin{cases} ST^{ret}(\omega,\tau), & \mathrm{Im}\,\omega > 0 \\ ST^{adv}(\omega,\tau), & \mathrm{Im}\,\omega < 0 \end{cases} \qquad (4.5)$$

является аналитической функцией на всей комплексной плоскости ω за исключением конечного числа точек и линий разреза на действительной оси. Для этой цели рассмотрим разность:

$$2iSA(\omega,\tau) = ST^{ret}(\omega,\tau) - ST^{adv}(\omega,\tau) \qquad (4.6)$$

при вещественных значениях ω.

Повторяя рассуждения § I, получим:

$$\begin{aligned} SA(\omega,\tau) = \pi\sum_n S\,\{ & V_{q'}(n,p')\,D_{q;q''}(p,n)\,\delta\big(p_0 + e^{\xi}\omega - \sqrt{M_n^2 + (\vec p - \vec q')^2}\big) \\ & - D_{q;q''}(n,p')\,V_{q'}(p,n)\,\delta\big(p_0 - e^{\xi}\omega - \sqrt{M_n^2 + (\vec p - \vec q')^2}\big) \\ & + V_{q''}(n,p')\,D_{q;q'}(p,n)\,\delta\big(p_0 + e^{-\xi}\omega - \sqrt{M_n^2 + (\vec p - \vec q')^2}\big) \\ & - D_{q;q'}(n,p')\,V_{q''}(p,n)\,\delta\big(p_0 - e^{-\xi}\omega - \sqrt{M^2 + (\vec p - \vec q'')^2}\big) \\ & + D_{-q';q''}(n,p')\,V_q(p,n)\,\delta\big(p_0 + 2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\omega - \sqrt{M_n^2 + (\vec p' - q)^2}\big) \\ & - V_q(n,p')\,D_{-q';q''}(p,n)\,\delta\big(p_0 - 2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\omega - \sqrt{M_n^2 + (\vec p' - \vec q)^2}\big)\ \} \end{aligned} \qquad (4.7)$$

---

x) В работе Kibble /35/ сделано утверждение, что выражение (6.2) (аналогичное выражению (4,3) в данной работе) является аналитической функцией ω и τ в области, где имеет место неравенство

$$\mathrm{Im}\,\omega > |\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2 - \tau}|$$

Это утверждение является неочевидным и требует специального исследования, поскольку в указанной области интеграл (6.2) может терять смысл. Область аналитичности выражения (6.2) на самом деле определяется неравенством

$$\mathrm{Im}\,\omega > |\mathrm{Im}\,\lambda(\omega,\tau)$$

(В данном примечании мы пользуемся обозначениями Kibble).

Используя кинематические формулы § 3 пункт "с" гл.П, легко показать, что особенности δ -функций выражения (4.7) будут в точках

$$\pm 2 ch\xi \sqrt{M^2+\vec{p}^2}\ \omega_1(n) = (1-th\xi)(m_\Delta^2-\tau) + M_m^2 - \vec{p}^2 - 2e^{-\xi} m_\Delta p \cos\alpha + e^{-\xi} ch\xi (M_n^2 - M^2)$$

$$\pm 2 ch\xi \sqrt{M^2+\vec{p}^2}\ \omega_2(n) = (1+th\xi)(m_\Delta^2-\tau) + M_m^2 - \vec{p}^2 + 2e^{\xi} m_\Delta p \cos\alpha + e^{\xi} ch\xi (M_n^2 - M^2) \tag{4.8}$$

$$\pm 2 ch\xi \sqrt{M^2+\vec{p}^2}\ \omega_3(n) = M_m^2 - \vec{p}^2 - 2\tau + \frac{1}{2}(M_n^2 - M^2)$$

(верхний знак (+) соответствует δ -функциям I,Ш,У, а нижний (-) δ -функциям П,IУ,УI).

При $M_n = M$ отсюда находим шесть полюсов $\pm\omega_1, \pm\omega_2, \pm\omega_3$, которые возникают из однонуклонных состояний. Границы непрерывных спектров соответствующих δ -функций получаются из (4.8) при

$$M_n = M+\mu$$

Можно показать, что для некоторой области значений $\xi, \alpha, \vec{p}^2, m_\Delta^2$ величина

$$\omega_c \equiv \omega_{c_3} = \frac{M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - M_m^2 - \vec{p}^2 - 2\tau}{2 ch\xi \sqrt{M^2+\vec{p}^2}} \tag{4.9}$$

является нижней границей непрерывного спектра выражения (4.7), а полюса однонуклонных состояний лежат до непрерывного спектра

$$|\omega_\ell| < \omega_c \qquad \ell = 1,2,3.$$

Отделяя вклад однонуклонных состояний, выражение для антиэрмитовой части (4.7) можно представить в виде:

$$\mathcal{S}A(\omega,\tau) = \pi \sum_{\ell=1}^{3} \left\{ g_\ell(\tau)\,\delta(\omega-\omega_\ell) - h_\ell(\tau)\,\delta(\omega+\omega_\ell) \right\} + \mathcal{F}(\omega,\tau) \tag{4.10}$$

где

$$g_1(\tau) = S/e^{-\xi} + \frac{\omega_1}{p_0} / V_{q'}(p'',p') D_{q;q''}(p,p''),\quad h_1(\tau) = S/e^{-\xi} + \frac{\omega_1}{p_0} / D_{q;q''}(p'',p') V_{q'}(p,p'')$$

$$g_2(\tau) = S/e^{\xi} + \frac{\omega_2}{p_0} / V_{q''}(p'',p') D_{q;q'}(p,p''),\quad h_2(\tau) = S/e^{\xi} + \frac{\omega_2}{p_0} / D_{q;q'}(p'',p') V_{q''}(p,p'') \tag{4.11}$$

$$g_3(\tau) = S/\frac{1}{2ch\xi} + \frac{\omega_3}{p_0} / D_{-q';q''}(p'',p') V_q(p,p''),\quad h_3(\tau) = S/\frac{1}{2ch\xi} + \frac{\omega_3}{p_0} / V_q(p'',p') D_{-q';q''}(p,p'')$$

Теперь ясно, что ST^{ret} и ST^{adv} действительно представляют собой одну и ту же аналитическую функцию ST (4.5), регулярную в области $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ с линиями разреза вдоль действительной оси при $-\infty < \omega < -\omega_c$ и $\omega_c < \omega < \infty$ и полюсами первого порядка в точках $\pm\omega_\ell$.

В работе[23] показано, что функции типа (4.3) возрастают на бесконечности при $\omega \to \infty$ не быстрее полинома. Обозначим через n степень этого полинома. Тогда, применяя теорему Коши к функции

$$g(\omega,\tau) = (\omega-\omega_0)^{-n-1}\, ST(\omega,\tau)\ , \quad |\omega_0| < \omega_c\ , \quad \omega_0 \neq \omega_\ell$$

легко получить следующие дисперсионные соотношения:

$$ST(\omega,\tau) = \frac{(\omega-\omega_0)^{n+1}}{\pi}\int\limits_{|\omega'|\geq\omega_c}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(\omega',\tau)}{(\omega'-\omega_0)^{n+1}(\omega'-\omega)}\,d\omega' + \frac{P(\omega,\tau)}{\prod\limits_{\ell=1}^{3}(\omega_\ell^2-\omega^2)} \tag{4.12}$$

где $P(\omega,\tau)$ - полином от ω, $n+6$ степени:

$$\frac{P(\omega,\tau)}{\prod\limits_{\ell=1}^{3}(\omega_\ell^2-\omega^2)} = \sum_{\ell=1}^{3}\left\{\left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0-\omega_\ell}\right)^{n+1}\cdot\frac{g_\ell(\tau)}{\omega_\ell-\omega} + \left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0+\omega_\ell}\right)^{n+1}\cdot\frac{h_\ell(\tau)}{\omega_\ell+\omega}\right\} + \sum_{k=0}^{n} C_k(\omega_0,\tau)\,\omega^k \tag{4.13}$$

Следует отметить, что эти соотношения получены нами лишь для фиктивных значений τ .

в) Аналитическое продолжение по переменной τ . Чтобы осуществить переход в (4.12) от значений τ , лежащих в интервале (τ_1,τ_2), к значению $\tau=\tau_0=\mu^2 ch^2\xi + m_0^2$ (реальный случай), необходимо совершить аналитическое продолжение по переменной τ . Для этой цели мы воспользуемся следующей теоремой[x]:

ТЕОРЕМА

Для вещественных ω , τ и $\lambda(\omega,\tau)$ функция $\mathcal{F}(\omega,\tau)$ (определяемая выражением (4.10)) может быть представлена в виде:

$$\mathcal{F}(\omega,\tau) = \sum_{\ell=1}^{3}\left\{ F_{\ell+}(\xi_{\ell+},\tau) + F_{\ell-}(\xi_{\ell-},\tau)\right\} \tag{4.14}$$

где

$$\xi_{\ell\pm} = \beta_\ell\tau \pm 2\,ch\,\xi\,\rho_0\,\omega$$
$$\beta_1 = 1-th\,\xi\ , \quad \beta_2 = 1+th\,\xi\ , \quad \beta_3 = 2\ . \tag{4.15}$$

---

x) Здесь мы предполагаем существование теоремы, подобной той, которая была доказана для виртуальных процессов.

Функции $F_{\ell\pm}(\xi,\tau)$ удовлетворяют следующим свойствам:

а) $F_{\ell\pm}(\xi,\tau)$ – обобщенные функции переменной ξ .

в) $F_{\ell\pm}(\xi,\tau)$ – аналитические функции переменной τ , регулярные в области:

$$\mathcal{E}: \left\{ \tau_1 < Re\,\tau < \tau_0 + \rho\mu^2 , \; |Im\,\tau| < \rho\mu^2 . \right. \tag{4.16}$$

с) $F_{\ell\pm}(\xi,\tau) = 0$, если $\xi_\ell < \nu_\ell\,(2M\mu+\mu^2) + M_m^2 - \bar{p}^2 + \gamma_\ell$, (4.17)

где

$$\nu_1 = e^{-\xi} ch\,\xi \;, \quad \nu_2 = e^{\xi} ch\,\xi \;, \quad \nu_3 = 1/2 \;, \quad \gamma_3 = 0 \;. \tag{4.18}$$

$$\gamma_1 = (1 - th\,\xi)\,m_\Delta^2 - 2e^{-\xi} p\, m_\Delta \cos\alpha \;; \quad \gamma_2 = (1 + th\,\xi)\,m_\Delta^2 + 2e^{\xi} p\, m_\Delta \cos\alpha$$

Отметим, что неравенства (4.I7) эквивалентны следующим неравенствам для ω :

$$\omega < \omega_{c_\ell}$$

где ω_{c_ℓ} являются границами непрерывных спектров δ -функций выражения (4.7). Воспользуемся сформулированной теоремой и подставим (4.I4) в (4.I2). После замены переменных получим:

$$\left\{ S\,T(\omega,\tau) - N(\omega,\tau) \right\} \prod_{\ell=1}^{3} (\omega_\ell^2 - \omega^2) = P(\omega,\tau) \tag{4.19}$$

где

$$N(\omega,\tau) = \frac{(ch\,\xi\cdot p_0)^{n+1}}{\pi} (\omega - \omega_0)^{n+1} \times$$
$$\times \sum_{\ell=1}^{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{F_{\ell,+}(\xi,\tau)}{(\xi - \beta_\ell\tau - 2p_0\omega\, ch\,\xi)} + \frac{F_{\ell,-}(\xi,\tau)}{(\xi - \beta_\ell\tau + 2p_0\omega\, ch\,\xi)} \right] \frac{d\xi}{(\xi - \beta_\ell\tau + 2p_0\omega_0\, ch\,\xi)^{n+1}} \tag{4.20}$$

Функция $N(\omega,\tau)$ является аналитической функцией ω и τ (при нашем выборе ω_0) в пересечении областей $\mathcal{G} \cap \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ дается (4.I6), а область $\mathcal{G}$ определяется неравенством

$$|Im\,\tau| < p_0\, ch\,\xi\, |Im\,\omega| \tag{4.21}$$

С другой стороны, мы установили ранее, что функция $ST(\omega,\tau)$ регулярна в области

$$\mathcal{D}: \quad |Im\,\omega| > |Im\,\lambda(\omega,\tau)| \tag{4.22}$$

Следовательно, функция

$$\left\{ S\,T(\omega,\tau) - N(\omega,\tau) \right\} \prod_{\ell=1}^{3} (\omega_\ell^2 - \omega^2)$$

аналитична в пересечении $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}\cap\mathcal{D}$. Но для вещественных значений τ, ограниченных неравенством

$$\tau_1 < \tau < \tau_2$$

она согласно дисперсионному соотношению (4.I9) является полиномом по ω. В силу единственности аналитического продолжения она будет полиномом по ω и во всей области аналитичности $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}\cap\mathcal{D}$. Следовательно, коэффициенты полинома $P(\omega,\tau)$ могут быть аналитически продолжены на некоторую область комплексных значений τ. Покажем, что эта область включает в себя область $\mathcal{E}$. Возьмем любое $\tau_\pm$ из области $\mathcal{E}$, для которого $\Im\, \tau \neq 0$

$$\tau_\pm = \tau_2 \pm i\delta \tag{4.23}$$

$$0 < \delta < \rho\mu^2 , \quad \tau_2 < \mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2 + \rho\mu^2 .$$

Для данного $\tau_\pm$ выберем $\omega_\pm$ следующим образом

$$\omega_\pm = \omega_2 \pm i \frac{b}{c}\omega_2 \delta$$

где

$$b \equiv \frac{1}{ch^2\xi \, \sin^2\alpha} \cdot \left\{ \frac{sh^2\xi}{m_\Delta^2}\tau_2 + \frac{\sin^2\alpha}{2} + \frac{M_m^2 - \vec{p}^{\,2}}{2m_\Delta|\vec{p}|} sh\xi \cos\alpha \right\}$$

$$c \equiv \frac{1}{ch^2\xi \, \sin^2\alpha} \left\{ \frac{sh^2\xi}{m_\Delta^2}(\tau_2^2 - \delta^2) + \left(\sin^2\alpha + \frac{M_m^2 - \vec{p}^{\,2}}{m_\Delta \cdot |\vec{p}|} sh\xi \cos\alpha\right)\tau_2 + \frac{(M_m^2 - \vec{p}^{\,2})^2}{4\vec{p}^{\,2}} \right\}$$

$$c < \omega_2^2 < b^2(\vec{p}^{\,2} + M^2)\, ch^2\xi \quad ^{x)}$$

Покажем, что при таком выборе $\omega_\pm$ точки $(\omega_\pm, \tau_\pm)$ принадлежат пересечению $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}\cap\mathcal{D}$. $\tau_\pm$ принадлежат области $\mathcal{E}$ по построению. Проверим сначала, что, например, (ω_+, τ_+) лежат в области $\mathcal{D}$. Согласно (4.22) область $\mathcal{D}$ определяется неравенством

$$(\Im\,\omega)^2 > (\Im\,\lambda(\omega,\tau))^2 \tag{4.26}$$

Принимая во внимание соотношение

$$2\left(\Im \sqrt{u+iv}\right)^2 = \sqrt{u^2+v^2} - u$$

---

x) Можно показать, что существует некоторая область значений параметров $\xi, \alpha, \rho, m_\Delta$, при которых

$$c < b^2(\vec{p}^{\,2} + M^2)\, ch^2\xi , \quad \omega_c < b^2(\vec{p}^{\,2} + M^2)\, ch^2\xi$$

и вместе с этим однонуклонные полюса $\pm\omega_c$ лежат до непрерывного спектра ω_c (4.9). Как известно, аналогичные ограничения возникают и при доказательстве дисперсионных соотношений для упругого рассеяния.

и учитывая, что

$$\operatorname{Re}\lambda^2 = \omega_\tau^2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\delta^2\right)-c\,,\quad \operatorname{Im}\lambda^2 = 2b\delta\left(\frac{\omega_\tau^2}{c}-1\right)$$

из (4.26) получим:

$$\omega_\tau^2\left(1+\frac{b^2}{c^2}\delta^2\right)-c > \sqrt{\left[\omega_\tau^2\left(1+\frac{b^2}{c^2}\delta^2\right)-b\right]^2-4b^2\delta^2\left(\frac{\omega_\tau^2}{c}-1\right)} \qquad (4.27)$$

Легко видеть, что неравенство (4.27) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\omega_\tau^2 > c \qquad (4.28)$$

что совпадает с первым неравенством (4.25)

Таким образом, мы показали, что пара (ω_+,τ_+) принадлежит области $\mathcal{D}$. Аналогично можно показать, что $(\omega_-,\tau_-)\in\mathcal{D}$. Проверим, что $(\omega_\pm,\tau_\pm)\in\mathcal{G}$. В силу (4.21) это означает, что

$$c < \rho_0 b\,\omega_\tau\,\mathrm{ch}\,\xi \qquad (4.29)$$

Но так как согласно (4.28)

$$\frac{\omega_\tau}{c} > \frac{1}{\omega_\tau}$$

Неравенство (4.29) можно заменить более сильным неравенством

$$\omega_\tau < b\rho_0\,\mathrm{ch}\,\xi$$

что тождественно второму неравенству (4.25).

Итак, мы показали, что точки $(\omega_\pm,\tau_\pm)\in\mathcal{E}\cap\mathcal{G}\cap\mathcal{D}$. Отсюда следует, что коэффициенты полинома $P(\omega,\tau)$ будут аналитическими по τ во всей области $\mathcal{E}$ с возможной линией разреза вдоль вещественной оси τ. Покажем, что такая линия разреза на самом деле не существует. Для этого заметим, что в силу непрерывности $\mathcal{N}(\omega,\tau)$

$$\lim_{\delta\to+0}\mathcal{N}(\omega_\pm,\tau_\pm) = \lim_{\epsilon\to+0}\mathcal{N}(\omega_\tau\pm i\epsilon,\tau_\tau) \qquad (4.30)$$

Используя (4.20) и (4.30), получим:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\mathcal{N}(\omega_+,\tau_+)-\mathcal{N}(\omega_-,\tau_-)\right\} = 2i\sum_{\ell=1}^{3}\left\{F_{\ell+}(\beta_\ell\tau_\tau+2\rho_0\omega_\tau\,\mathrm{ch}\,\xi,\tau_\tau)+F_{\ell-}(\beta_\ell\tau_\tau-2\rho_0\omega_\tau\,\mathrm{ch}\,\xi,\tau_\tau)\right\} = \qquad (4.31)$$
$$= 2i\,\mathcal{F}(\omega_\tau,\tau_\tau)$$

С другой стороны, так как $(\omega_\pm,\tau_\pm)\in\mathcal{D}$, то на основании (4.3) имеем:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{ST'(\omega_+,\tau_+) - ST'(\omega_-,\tau_-)\right\} = ST'^{\,ret}(\omega_z,\tau_z) - ST'^{\,adv}(\omega_z,\tau_z) = 2i\,\mathcal{F}(\omega_z,\tau_z) \qquad (4.32)$$

Комбинируя (4.3I) и (4.32), получим:

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{ST'(\omega_+,\tau_+) - N(\omega_+,\tau_+)\right\} = \lim_{\delta\to+0}\left\{ST'(\omega_-,\tau_-) - N(\omega_-,\tau_-)\right\}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta\to+0} P(\omega_z,\tau_+) = \lim_{\delta\to+0} P(\omega_z,\tau_-) \qquad (4.38)$$

т.е. что функция $P(\omega,\tau)$ непрерывна при переходе τ через вещественную ось. Из этого следует, что линия разреза вдоль вещественной оси τ отсутствует и значит $P(\omega,\tau)$ является аналитической функцией во всей области $\mathcal{E}$. Ранее было установлено, что функция $N(\omega,\tau)$ аналитична в области $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}$. Теперь мы показали, что вся правая часть (4.I2) также является аналитической функцией в этой области. Это означает, что мы можем расширить область определения функции ST' так, чтобы она совпадала с правой частью (4.I2). во всей области $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}$. В эту область входит и значение $\tau=\tau_0=\mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2$, отвечающее реальному процессу $\pi+p\to p'+\pi'+\pi''$, и, следовательно, дисперсионные соотношения (4.I2) имеют место и при $\tau=\tau_0$. Определяя (как обычно) эрмитову часть амплитуды равенством

$$D(\omega,\tau) = \frac{1}{2}\left(T^{ret}(\omega,\tau) + T^{adv}(\omega,\tau)\right) \qquad (4.34)$$

и учитывая, что

$$\lim_{\epsilon\to0} ST'(\omega\pm i\epsilon,\tau) = ST'^{\,ret}_{\,adv}(\omega,\tau) \qquad (4.35)$$

получим дисперсионные соотношения:

$$SD(\omega) = \frac{(\omega-\omega_0)^{n+1}}{\pi} P\int_{|\omega'|\geq\omega_c}^{\infty} \frac{SA'(\omega')\,d\omega'}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)^{n+1}} + \frac{P(\omega,\tau_0)}{\prod_{l=1}^{3}(\omega_l^2-\omega^2)} \qquad (4.36)$$

Цитированная литература

I. M.L.Goldberger, Causality Conditions and Dispersion Relations, Phys.Rev.v. 99 (1955) 979-985.

2. С.Л.Соболев, Methode nouvelle a resoudre le probleme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales, Математический сборник I (43) (1936) 39-72.

2a. L.Sowartz, Theorie des distributions, I-II, Paris, 1950-1951.

3. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков "Вопросы квантовой теории поля", I, II, Успехи физических наук, 55 (1955) 149-214; 57 (1955) I-92.

3a. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков "Введение в теорию квантованных полей", Гостехиздат, Москва, 1957 г.

4. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов "Вопросы теории дисперсионных соотношений", Гостехиздат, 1958 г.

5. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров "Об аналитическом продолжении обобщенных функций", Изв. АН СССР, серия математическая, 22 (1958) 15-48.

6. H.J.Bremermann, R.Oehme and I.G.Taylor "A proof of dispersion relations in quantized field theories, Phys.Rev., 109 (1958) 2178-2190.

7. С.Бохнер и У.Т.Мартин "Функции многих комплексных переменных", ИИЛ, 1951 г.

8. В.С.Владимиров "Об определении области аналитичности", Изв. АН СССР, серия математ. (в печати).

9. H.Lehmann, "Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer (в печати).

10. F.J.Dyson, Integral representations of causal commutators, Phys.Rev.,110 (1958) 1460-1464.

11. M.Gell-Mann, M.L.Goldberger and W.E.Thirring "Use of Causality Conditions in Quantum Theory", Phys.Rev., 95 (1954) 1612-1627.

12. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков "Дисперсионные соотношения для комптоновского рассеяния на нуклонах", ДАН СССР, II3 (1957) 529-532.

13. T.Akiba and I.Sato, "The dispersion relations for the scattering of Photons from Proton", Prog.Theor.Phys., 19 (1958) 93-111.

14. А.А.Логунов и П.С.Исаев "К теории дисперсионных соотношений для рассеяния γ- квантов на нуклонах", 1958 год (в печати).

15. А.А.Логунов "Дисперсионные соотношения для виртуальных процессов", ДАН СССР, II7 (1957) 792.

16. А.А.Логунов и Б.М.Степанов "Дисперсионные соотношения для реакций фоторождения π-мезонов", ДАН СССР, IIO (1956) 368-370.

17. A.A.Logunov, L.D.Solovyov and A.N.Tavkhelidze,"Photoproduction Processes and Dispersion Relations", Nuclear Physics, 4 (1957) 427-45?.

18. E.Corinaldesi,"Dispersion Relations for Photoproduction of Mesons", Nuovo Cimento, IV (1956) 1384-1398.

19. G.Chew, M.L.Goldberger, F.Low and Y.Nambu,"Relativistic Dispersion Relation Approach to Photomeson Production", Phys.Rev., 106 (1957) 1345-1355.

20. А.А.Логунов "К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов", Научные доклады высшей школы, 1958 г. (в печати); Nuclear Physics (в печати).

21. S.Fubini, Y.Nambu and V.Wataghin "Dispersion Theory treatment of pion production in electron-nucleon collisions", Phys.Rev., 111 (1958) 329-336.

22. R.Jost and H.Lehmann, "Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren", Nuovo Cim.V,(1957)1598-1610.

23. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров "Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций", Научные доклады высшей школы, 3 (1958).

24. R.Oehme and J.G.Taylor "Proof of Dispersion Relations for the Production of Pions by Real and Virtual Photons and for Related Processes", 1958 (preprint).

25. Е.Т.Уиттекер и Г.Н.Ватсон "Курс современного анализа", Гостехиздат, 1934 г., гл. 15.

26. В.С.Владимиров и А.А.Логунов "Доказательство некоторых дисперсионных соотношений в квантовой теории поля", препринт ОИЯИ (ноябрь 1958), Р-260; Изв.АН СССР, серия математ. (в печати).

27. M.L.Goldberger, H.Miyazawa, R.Oehme "Application of Dispersion Relations to Pion-Nucleon Scattering", Phys.Rev., 99 (1955) 986.

28. R.Oehme "Dispersion Relations for Pion-Nucleon Scattering", I, The Spin-Flip Amplitude", Phys.Rev., 100 (1955) 1503.

29. R.Oehme "Dispersion Relations for Pion-Nucleon Scattering II No-Spin-Flip Amplitude", Phys.Rev., 102 (1956) 1174.

30. R.H.Capps, G.Takeda "Dispersion Relations for Finite Momentum-Transfer Pion-Nucleon Scattering", Phys.Rev., 103 (1956) 1877-1896.

31. G.F.Chew, M.L.Goldberger, F.E.Low, Y.Nambu "Application of Dispersion Relations to Low-Energy Meson-Nucleon Scattering", Phys.Rev., 106 (1957) 1337-1344.

32. Н.Н.Боголюбов, Изв. АН СССР (серия физическая) 19 (1955) 237.

33. В.Д.Кукин и А.Р.Френкин "Приближенные уравнения для рассеяния пионов на нуклонах", Научные доклады высшей школы, I (1958) 71-79.

34. А.Н.Тавхелидзе и В.К.Федянин "Приближенные уравнения для амплитуды рассеяния фотонов на нуклонах", ДАН СССР, 119 (1958) 690.

35. M.Gell-Mann and P.T.Matthews "Annual International Conference on High Energy Physics", CERN, 1958, p.98.

36. А.А.Логунов, Б.М.Степанов и А.Н.Тавхелидзе "О роли связанных состояний в процессах фоторождения", ДАН СССР, 112 (1957) 45-47.

37. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе "Дисперсионные соотношения для реакций фоторождения π-мезонов на нуклонах", ЖЭТФ 32 (1957)1393-1403.

38. Л.Д.Соловьев,"Photoproduction of Mesons on Nucleons: Phase Shift Analysis and Dispersion Relations", Nuclear Physics, 5 (1958) 256-270.

39. А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев, В.Д.Кукин и А.Р.Френкин "Дисперсионные соотношения для виртуального фоторождения", препринт ОИЯИ Р-161 (1958).

40. А.А.Логунов и Л.Д.Соловьев "Дисперсионные соотношения для виртуального фоторождения", Научные доклады высшей школы (в печати); Nuclear Physics (в печати).

41. В.Д.Кукин, Л.Д.Соловьев и А.Р.Френкин "Приближенные уравнения для амплитуды "виртуального" фоторождения", Научные доклады высшей школы, (1958) - в печати.

42. Н.Н.Боголюбов, С.М.Биленький и А.А.Логунов "Дисперсионные соотношения в случаях слабого взаимодействия", ДАН СССР, II5 (1957) 891-893.

43. N.N.Bogolubov, S.M.Bilenky and A.A.Logunov "Dispersion Relations for Weak Interactions", Nuclear Physics, 5 (1957) 383-389.

44. А.А.Логунов "Дисперсионные соотношения для реакций с переменным числом частиц", ДАН СССР I20 (1958) 501.

45. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе "Аналитические свойства амплитуды с переменным числом частиц", ДАН СССР I20 (1958) 739.

46. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, "Some Problems Encountered in the Theory of the Dispersion Relations", Nuclear Physics, 8 (1958) 374-393.

47. A.A.Logunov, A.N.Tawchelidse und N.A.Tschernikov "Zur Frage der Dispersionsbeziehungen für Reaktionen mit veränderlicher Teilchenzahl", Zeitschrift für Naturforschung, 13a,8(1958)642-644. Научные доклады высшей школы (в печати).

48. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе "Обобщенные дисперсионные соотношения", Научные доклады высшей школы № 3 (1958); Nuovo Cimento, X.v.10 (1958) 943-952.

49. А.А.Логунов, С.М.Биленький и А.Н.Тавхелидзе "К теории дисперсионных соотношений для сложных процессов", Научные доклады высшей школы № 3 (1958); Nuovo Cimento,X,v.10 (1958) 953-964.

50. А.А.Логунов и И.Т.Тодоров "О доказательстве дисперсионных соотношений для неупругих процессов", Научные доклады высшей школы (в печати); Nuclear Physics (в печати).

51. A.A.Logunov and A.R.Frenkin "On the Dispersion Relations for the Compton-Effect", Nuclear Physics, 7 (1958) 573-578.

52. С.М.Биленький "Дисперсионные соотношения для процессов со слабым взаимодействием", кандидатская диссертация, ОИЯИ (1958).

53. M.L.Goldberger and S.B.Treiman "Neutral Pion Decay", Nuovo Cimento, IX (1958) 451-460.

54. M.L.Goldberger and S.B.Treiman "Decay of the Pi-Meson", Phys.Rev., 110 (1958) 1178-1184.

55. M.L.Goldberger and S.B.Treiman "Form-Factor in β -Decay and μ -Capture", Phys.Rev., 111 (1958) 354-361.

56. G.F.Chew, R.Karplus, S.Gasiorowicz and Zachariasen, "Electromagnetic Structure of Nucleon in Local-Field Theory", Phys.Rev., 110 (1958) 265.

57. J.Bernstein, M.L.Goldberger "Structure of the Nucleon", Revs.Mod.Phys., 30 (1958) 465-470.

58. S.Okubo "Dispersion Relation for the Photoproduction of K-Mesons",Prog.Theor.Phys., 19 (1958) 43-56.

59. М.К.Поливанов "Дисперсионные соотношения для рассеяния К-мезонов не нуклонах", ДАН СССР II6 (1957) 943.
М.К.Поливанов "Процессы порождения тяжелых мезонов и гиперонов с точки зрения дисперсионных соотношений", ДАН СССР II8 (1958) 679.

60. P.T.Matthews and A.Salam "K-Meson Dispersion Relations I Theory", Phys.Rev.,110 (1958)565-568.

61. P.T.Matthews and A.Salam "K-Meson Dispersion Relations II Applications", Phys.Rev., 110 (1958) 569-572.

62. C.F.Chew "Annual International Conference on High Energy Physics", CERN, 1958, p. 97.
63. G.F.Chew and F.E.Low "Unstable particles as targets in scattering experiments", preprint UCRL-8427 (1958).
64. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе "Дисперсионные соотношения для процессов мезон-нуклонных столкновений в приближении фиксированного нуклонного источника I", Сообщен.АН Груз.ССР, т.ХУШ, № I(I957)I9.
65. А.А.Логунов, А.Н.Тавхелидзе "Дисперсионные соотношения для процессов мезон-нуклонных столкновений в приближении фиксированного нуклонного источника П", Сообщен.АН Груз.ССР, т.ХУШ, № 5(I957)533.
66. R.Jost "Ein Beispiel zum Nucleon-Vertex", Helvetica Phys.Acta, 31 (1958) 263-272.
67. T.W.Kibble "Dispersion Relations for Inelastic Scattering", Proc.Roy.Soc., 244 (1958) 355-376.
68. N.N.Bogolubov and O.S.Parasiuk "Uber die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quanten Theorie der Felder", Acta Mathem., 97 (1957) 227-266.
69. О.С.Парасюк "Умножение причинных функций при несовпадающих аргументах", Известия АН СССР, серия математическая 20, № 6 (I956).
70. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров "О некоторых математических вопросах квантовой теории поля", (доклад на Математическом съезде в Эдинбурге, I958 год).
71. R.Hofstadter "Electron Scattering and Nuclear Structure", Phys.Rev., 28 (1956) 214.
72. J.C.Polkinghorne "General Dispersion Relations", Nuovo Cimento 4 (1956) 216.

x x

x