

95-395



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2-95-395

Г.Г.Арутюнян*, В.В.Папоян

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ
САМОГРАВИТИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ
И ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЧЕРНЫХ ДЫР
В ТЕОРИИ ЙОРДАНА — БРАНСА — ДИККЕ

Направлено в журнал «Астрофизика»

*Ереванский государственный университет, Армения

1995

Арутюнян Г.Г., Папоян В.В.

Об устойчивости равновесных самогравитирующих моделей
и возможности формирования черных дыр
в теории Йордана — Бранса — Дикке

Показано, что, основываясь на качественном анализе решений вакуумных уравнений, можно заключить, что в отличие от общей теории относительности в теории Йордана — Бранса — Дикке гравитационный коллапс не приводит к формированию черных дыр, однако достоверно установить существование или отсутствие черных дыр в теории ИБД возможно только после численного решения временных уравнений. Предложен метод решения задачи об устойчивости равновесных самогравитирующих конфигураций относительно радиальных пульсаций, сформулирован критерий стабильности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод авторов

Haroutyunian G.G., Papoyan V.V.

P2-95-395

Stability of Self-Gravitating Models and Possibility
of Black Holes Formation in Jordan — Brans — Dicke

Based on a qualitative analysis of solutions of the vacuum equations we can conclude that in contrast with General Relativity in the Jordan — Brans — Dicke tensor-scalar theory of gravity the black holes are not formed as a result of the gravitational collapse, however, it is possible to establish whether black holes exist or not only after solving time-dependent equations. The method is proposed for solving the problem on the stability of equilibrium self-gravitating configurations with respect to adiabatic radial pulsations and the stability criterion is formulated.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995

1. Введение. Тензорно-скалярная теория тяготения Йордана-Бранса-Дикке (теория ИБД) [1,2] наиболее популярная из известных на сегодняшний день альтернативных к общей теории относительности (ОТО) гравитационных теорий. В теории ИБД гравитационное поле, помимо десяти компонент метрического тензора, определяется также и гравитационным скаляром, который порождается веществом и негравитационными полями. Современные экспериментальные установки не могут обеспечить необходимую для обнаружения скалярного поля точность наблюдений, поэтому можно считать вполне актуальными исследования, которые позволяют обнаружить различия в предсказаниях ОТО и теории ИБД. С этой точки зрения временные задачи и, в частности, проблема гравитационного коллапса особо интересны, хотя бы потому, что авторы ряда работ приходят к противоречивым заключениям по вопросу о коллапсе в теории ИБД. Так, в работе [3], в отличие от [4,5], утверждается, что в теории ИБД гравитационный коллапс точно так же, как и в ОТО, приводит к формированию черных дыр. Такое заключение основано на следующих соображениях:

- а) решение Шварцшильда есть точное решение теории ИБД с постоянным скалярным полем,
- б) в пределе $\zeta \rightarrow \infty$ (ζ - безразмерная константа связи теории ИБД) уравнения теории сводятся к уравнениям ОТО,
- в) скалярное поле при сферически-симметричном коллапсе незаряженных объектов стремится к постоянному значению при $t \rightarrow \infty$.

С другой стороны, Матсуда [6], основываясь на результатах работы [7], показал, что решение Шварцшильда является точным, но не единственным решением теории ИБД в пределе постоянного скалярного поля и, поэтому, сферически-симметричный коллапс в тензорно-скалярной теории тяготения не обязательно заканчивается образованием черной дыры, поскольку в пределе внешнее решение не обязательно обращается в решение Шварцшильда. Действительно, как показано в [8], вакуумное решение сферически-симметричной задачи теории ИБД в однородных координатах имеет вид:

$$ds^2 = e^{2\alpha} c^2 dt^2 - e^{2\beta} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2],$$

$$\chi = \chi_0 z^{a/\eta}, \quad e^{2\alpha} = z^{2/\eta}, \quad e^{2\beta} = (1 + \rho_0/\rho)^2 z^{2(a+\eta-1)/\eta}, \quad (1)$$

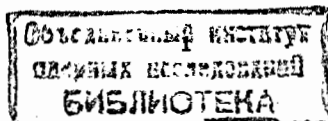
$$z = (1 - \rho_0/\rho)/(1 + \rho_0/\rho), \quad \rho_0 = \eta Gm/(2c^2) = \eta r_g/4, \quad \eta^2 = (a-1)^2 + a - \frac{1}{2}\xi a^2.$$

В координатах кривизны

$$ds^2 = e^{2\nu} c^2 dt^2 - e^{2\lambda} dR^2 + R^2 d\Omega^2,$$

$$\chi = \chi_0 z^{a/\eta}, \quad e^{2\nu} = z^{2/\eta}, \quad e^{-\lambda} = 1 + \frac{a-1}{2\eta}(1-z). \quad (2)$$

$$R = (\eta r_g z^{(a+\eta-1)/\eta}) / (1 - \eta^2), \quad (3)$$



причем метрические коэффициенты не имеют сингулярностей при $0 < z < 1$, что соответствует области $0 < R < \infty$, если, разумеется, $(a-1)/\eta + 1 > 0$ (или $h = (1-a)/(2\eta) > 0,5$). Такой тип решения (см.[8]) не обладает горизонтом событий в отличие от решения Шварцшильда в ОТО. Пространство решения (2), (3) совпадает с внешним шварцшильдовским, но на сфере Шварцшильда $R = r_g$ не имеет особенностей. Действительно, выполним предельный переход $a \rightarrow 0, \eta \rightarrow 1$, тогда для R из (3) имеем

$$\begin{aligned} z = 0 &\Rightarrow R = 0; \\ z = \epsilon &\Rightarrow R = \eta r_g / (1 - z^2) \end{aligned} \quad (4)$$

(ϵ -бесконечно малая величина). Что касается $\nu(z)$ и $\lambda(z)$, то они непрерывны. Вышеизложенное позволяет заключить, что в зависимости от значения параметра $h = (1-a)/2\eta$ существенно меняется поведение метрики. Анализ сферически-симметричного вакуумного решения выполненный в [9] приводит к следующему заключению: при $\eta = (1-a)$ и в случае $\zeta = 2/a$

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &= (1 - (1-a)r_g/r)^{1/(1-a)}, \\ e^{2\lambda} &= (1 - (1-a)r_g/r)^{-1}, \\ \chi &= \chi_0 (1 - (1-a)r_g/r)^{a/2(1-a)}, \end{aligned} \quad (5)$$

а разумным значениям константы интегрирования a (постньютоновский параметр $\gamma = 1-a$ согласно данным наблюдений близок к единице) соответствует почти шварцшильдовское решение с медленно меняющимся скаляром $\chi(r)$, убывающим или возрастающим в зависимости от знака a . При $a \geq 1$ решение не имеет особенностей во всей области изменения $0 < r < \infty$, а при $a < 1$ получаем решение с особенностями типа шварцшильдовской и с убывающим $\chi(r)$. В случае $\eta < (1-a)$ области $0 < r < \infty$ при $\eta < 0, a > 0$ соответствует возрастающая ветвь $\chi(r)$, что в свою очередь связано с ограничениями на константу связи $\zeta > 2/a$. При этом решение не имеет особенностей. Наконец, для $\eta > (1-a)$ в области $0 < r < \infty$ с $\eta > 0, a > 0$, получается решение с возрастающей ветвью $\chi(r)$, не имеющее особенностей и соответствующее $\zeta < 2/a$, что согласуется с оценочными значениями этого параметра.

Таким образом, очевидно, что реальная ситуация прояснится только после того, как из сшивки внешнего и внутреннего решений будут определены константы интегрирования.

2. Гравитационный коллапс сферически-симметричной конфигурации. В настоящей работе для выяснения вопроса о возможности образования черных дыр в результате гравитационного коллапса в теории ИБД обратимся к качественному анализу проблемы, подобно тому, как это сделано в [10] для эйнштейновской теории. При этом будут использованы результаты численных расчетов сферически-симметричных конфигураций с однородным распределением вещества [11].

Представим решение Гекмана (см.[11]) в символическом виде

$$ds^2 = g_{00}c^2 dt^2 - A(x)dx - B(x)d\Omega^2 \quad (6)$$

и выполним преобразования

$$\begin{aligned} cdT &= cdt + f\sqrt{(A/g_{00})}dx, \\ d\bar{R} &= cdt + f^{-1}\sqrt{(A/g_{00})}dx, \end{aligned} \quad (7)$$

или

$$\begin{aligned} dx &= \sqrt{(g_{00}/A)}f(1-f^2)^{-1}(d\bar{R} - cdT), \\ cdt &= (1-f^2)^{-1}(cdT - f^2d\bar{R}). \end{aligned} \quad (8)$$

В результате

$$ds^2 = \frac{g_{00}}{1-f^2}(c^2dT^2 - f^2d\bar{R}^2) - Bd\Omega^2. \quad (9)$$

Выбрав произвольную функцию $f = \pm\sqrt{1-g_{00}}$, перейдем к синхронной системе отсчета, в которой, как известно, линии времени являются геодезическими. Из (8) имеем

$$\bar{R} - cT = \eta M \int \frac{(\xi-1)^{\frac{a}{\eta}} d\xi}{\sqrt{1 - (\xi-1)^{\frac{1}{\eta}}}}, \quad (10)$$

а параметр гекмановского решения $\tau = (\xi-1)^{\frac{1-a}{\eta}}$. В эйнштейновском пределе ($a \rightarrow 0, \eta \rightarrow 1$)

$$\begin{aligned} \bar{R} - cT &= \frac{\sqrt{2}}{3}\eta M(1+\xi)^{3/2}, \\ R &= \eta M(\xi+1), \end{aligned} \quad (11)$$

где R - шварцшильдовская координата. Заданным значениям $R(\xi)$ отвечают как в одном, так и в другом случаях мировые линии $\bar{R} - cT = \text{const}$ (наклонные прямые на диаграмме $\bar{R} - T$). Мировые же линии частиц, покоящихся относительно системы отсчета, на этой диаграмме изображаются вертикальными прямыми. За конечный промежуток собственного времени свободные частицы попадают в центр поля, который и является истинной особенностью метрики.

Рассмотрим также распространение световых сигналов. Уравнение $ds^2|_{\theta, \varphi = \text{const}} = 0$ дает

$$\frac{cdT}{d\bar{R}} = f = \pm\sqrt{1-g_{00}} = \pm\sqrt{1-\tau^{1/(1-a)}}. \quad (12)$$

В эйнштейновском случае

$$\frac{cdT}{d\bar{R}} = \pm\sqrt{1-\tau}, \quad R = \frac{r_g}{1-\tau}. \quad (13)$$

Как следует из (13), формально интервалу $-\infty < \tau < 0$ соответствует область изменения шварцшильдовской координаты $0 < R < r_g$, а $0 < \tau < 1$ соответствует $r_g < R < \infty$. Поэтому в первой области имеем $|cdT/d\bar{R}| > 1$, а во второй $|cdT/d\bar{R}| < 1$. Таким образом, мировая линия покоящейся частицы вне области $R = r_g$ попадает в световой конус, а внутри нее нет. Поскольку причинно связанные события не могут находиться на мировой линии вне светового конуса, то в области $R < r_g$ никакие частицы не могут быть неподвижными (при определенном выборе знака в (12) они движутся к центру).

Как же обстоит дело в тензорно-скалярной теории тяготения? Имея в виду (12) и выражение для шварцшильдподобной координаты R

$$R = \frac{\eta r_g}{2\tau^{\frac{1}{2}-h}(1-\tau^{2h})}, \quad (14)$$

используем результаты численного расчета [11], представленные в таблицах 1 и 2. Значения h в таблице приведены в зависимости от $q_c = P_c/\rho_0$ (P_c - центральное давление, а ρ_0 - плотность конфигурации с однородным распределением вещества) и параметра теории ζ .

Таблица 1

Значения параметра h от центральной плотности q_c и значений параметра теории ζ (случай несингулярных начальных условий)

$q_c \setminus \zeta$	-1000	-250	-30	-5	0
0.01	0.50036	0.501438	0.51163	0.55984	0.8482
0.1	0.50026	0.501473	0.50867	0.56175	0.7439
0.33	0.50015	0.50059	0.50479	0.52433	0.6121
0.5	0.50010	0.50041	0.50326	0.51610	0.5736
1	0.50003	0.50013	0.50099	0.50460	0.5191

Таблица 2

Значения параметра h от центральной плотности q_c и значений параметра теории ζ (случай сингулярных начальных условий)

$q_c \setminus \zeta$	-1000	-250	-30	-5	0
0.01	-215.04	-11.4242	-2.4617	-1.0433	-0.5166
0.1	1.273	1.3514	1.9055	10.97	-1.0802
0.33	0.6077	0.6190	0.6572	0.7475	1.1329
1	0.5154	0.5170	0.5236	0.5326	0.5371

Ясно, что при $0 < a < 1$ и $h > \frac{1}{2}$ выражение для радиальной координаты можно переписать в виде

$$R = \frac{\eta r_g}{2} \frac{\tau^{h-\frac{1}{2}}}{1-\tau^{2h}}, \quad (15)$$

откуда следует, что вся область изменения $0 < R < \infty$ отображается в $0 < \tau < 1$. Поэтому, согласно (12), $|cdT/dR| < 1$, а мировая линия покоящейся частицы для всех значений R находится внутри светового конуса. Если же $a > 1$, т.е. $h < 0$, то

$$R = \frac{\eta r_g}{2} \frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}+|h|} \left(1 - \frac{1}{\tau^{2|h|}}\right)}, \quad (16)$$

и $1 < \tau < \infty$ соответствует $0 < R < \infty$, а следовательно, и в этом случае $|cdT/d\bar{R}| < 1$, и вновь мировая линия покоящейся частицы оказывается внутри светового конуса.

Таким образом, такое качественное рассмотрение еще раз свидетельствует о том, что, вероятнее всего, в теории ИБД гравитационный коллапс не приводит к образованию черных дыр.

3. Радиальные пульсации сферически - симметричной конфигурации. Корректное решение проблемы устойчивости самогравитирующих объектов в общем случае предполагает необходимость исследования их относительно произвольных возмущений. В такой постановке задача оказывается чрезвычайно сложной, и поэтому в большинстве случаев приходится ограничиваться рассмотрением возмущений в виде радиальных пульсаций.

В настоящей работе проводится анализ адиабатических радиальных пульсаций невращающегося самогравитирующего объекта в рамках теории ИБД. Общий метод решения аналогичной задачи в ОТО был сформулирован Чандрасекаром [12], который впервые обнаружил релятивистскую неустойчивость. Полное решение получено Мельтцером и Торном [13]. Рассматриваемая ниже самогравитирующая конфигурация представляет собой сферу из идеальной жидкости, пульсирующую радиально с малой амплитудой. Для анализа устойчивости необходимы:

- 1) решения точных уравнений, описывающих равновесную конфигурацию, относительно которой рассматриваются малые пульсации;
- 2) система координат, описывающих колеблющуюся сферу, которая при нулевой амплитуде пульсаций сводится к стандартной системе координат (обычно координат кривизны) для равновесной звезды;
- 3) набор малых функций, описывающих пульсации (радиальное смещение и скорость, возмущения давления и плотности, изменения первого порядка малости в метрических коэффициентах), по которым происходит линеаризация, а также
- 4) набор уравнений, определяющих эволюцию этих возмущений.

Допустим, что рассматриваемая звездная конфигурация пульсирует радиально. Тогда ее пространственно - временная геометрия будет сферически - симметричной. Известно, что для любого динамического или статического сферически - симметричного пространства - времени можно ввести координаты (обычно их называют координатами кривизны) так, чтобы выражение для метрической формы имело вид

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (17)$$

где $\alpha = \alpha(t, r)$, $\beta = \beta(t, r)$. Предполагается, что пульсации имеют малую амплитуду, и поэтому метрические коэффициенты α , β , термодинамические величины P (давление), ε (плотность энергии) и n (плотность числа частиц), измеренные покоящимся относительно жидкости наблюдателем, мало отличаются от своих невозмущенных значений. Пусть

$$f(t, r) = f_0(r) + \delta f(t, r). \quad (18)$$

(Здесь f обозначает одну из величин α , β , P , ε , n и y - гравитационный скаляр теории ИБД, а индексом "0" снабжены равновесные значения). Кроме указанных δf , для описания пульсаций необходимо также ввести радиальные смещения жидкости от своего равновесного положения ξ : жидкий элемент, локализованный на координатном радиусе r в невозмущенной конфигурации, смещается к радиусу $r + \xi(r, t)$ за координатное время t .

Для анализа пульсаций необходимо линеаризовать уравнения по вышеуказанным возмущениям. Эволюция функций возмущения со временем определяется полевыми уравнениями, законом сохранения $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ и законами термодинамики, которые линеаризованы соответствующим образом.

Два из системы полевых уравнений можно использовать для определения возмущений метрики $\delta\beta$ и $\delta\alpha$. Из уравнения $\hat{G}_0^1 = T_0^1/y$ имеем

$$e^{-2\beta} \left[\alpha' \frac{\dot{y}}{y} + \dot{\beta} \left(\frac{2}{r} + \frac{y'}{y} \right) - \frac{\dot{y}'}{y} + \zeta \frac{\dot{y}y'}{y^2} = - \frac{(P + \varepsilon)u^1 u_0}{y} \right], \quad (19)$$

где

$$\hat{G}_\beta^\alpha = G_\beta^\alpha - \frac{y_{;\beta}^\alpha}{y} + \frac{\zeta y^\alpha y_\beta}{y^2} + \delta_\beta^\alpha \left(\frac{y_{;\mu}^\mu}{y} - \frac{\zeta y^\mu y_\mu}{2 y^2} \right)$$

после линеаризации по возмущениям следует выражение для $\delta\beta$

$$\delta\beta = \frac{1}{(2y_0/r + y'_0)} \left\{ \delta y' - \delta y (\alpha'_0 + \zeta \frac{y'_0}{y_0}) - \xi e^{2\beta_0} (\varepsilon_0 + P_0) \right\}. \quad (20)$$

В (19) использованы выражения для компонент 4-скорости

$$u^0 = e^{-\alpha} = e^{-\alpha_0} (1 - \delta\alpha), \quad u^1 = \dot{\xi} e^{-\alpha_0}, \quad (21)$$

которые легко получить из очевидных соотношений

$$\frac{u^1}{u^0} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi},$$

$$(u^0)^2 e^{2\alpha} - (u^1)^2 e^{2\beta} = 1.$$

Линеаризация уравнения $\hat{G}_1^1 = \frac{T_1^1}{y}$ дает

$$e^{-2\alpha_0} \delta \ddot{y} - e^{-2\beta_0} \left[\delta y \left(\frac{1 - e^{2\beta_0}}{r^2} + \frac{2\alpha'_0}{r} - \frac{\zeta y_0'^2}{2 y_0^2} \right) + \delta y' (\alpha'_0 + \frac{2}{r} + \zeta \frac{y'_0}{y_0}) + \delta \alpha' (y'_0 + \frac{2y_0}{r}) \right] + 2\delta\beta (P_0 + \frac{y_0}{r^2}) = -\delta P, \quad (22)$$

которое можно использовать для определения $\delta\alpha'$.

Уравнение $T_{0;\mu}^\nu = 0$ приводит к

$$\delta\varepsilon = -(P_0 + \varepsilon_0) \left\{ \delta\beta + \frac{e^{-\beta_0}}{r} (r^2 e^{\beta_0} \xi)' \right\} - \xi \varepsilon'_0, \quad (23)$$

а из $T_{1;\mu}^\nu = 0$ получаем аналог уравнения Эйлера

$$\ddot{\xi} (\varepsilon_0 + P_0) e^{2(\beta_0 - \alpha_0)} = -[\delta P' + \delta\alpha' (P_0 + \varepsilon_0) + \alpha'_0 (\delta\varepsilon + \delta P)]. \quad (24)$$

Для определения δP воспользуемся законом сохранения барионов $(nu^\mu)_{;\mu} = 0$, который после линеаризации сводится к виду

$$\Delta n = \delta n + \xi n'_0 = -n_0 \left[\delta\beta + \frac{e^{-\beta_0}}{r^2} (r^2 e^{\beta_0} \xi)' \right], \quad (25)$$

а также условием адиабатичности (перенос тепла между соседними жидкими элементами пренебрежимо мал)

$$\frac{n}{P} \frac{\Delta P}{\Delta n} = \gamma, \quad (26)$$

где $\gamma = [(\varepsilon_0 + P_0)/P_0] dP_0/d\varepsilon_0$ - показатель адиабаты, а $\Delta(\dots) = \delta(\dots) + \xi(\dots)'_0$ - лагранжево изменение соответствующей величины [13], измеренное наблюдателем, движущимся вместе с жидкостью. Из (25) и (26) находим δP

$$\delta P = -P_0 \gamma \left[\delta\beta + \frac{e^{-\beta_0}}{r^2} (r^2 e^{\beta_0} \xi)' \right] - \xi P'_0. \quad (27)$$

Задача замыкается, если дополнить систему уравнением, определяющим скалярный потенциал y

$$\frac{y_{;\mu}^\mu}{y} = \frac{T}{y(3 - 2\zeta)},$$

которое после линеаризации служит для определения δy

$$e^{-2\alpha_0} \delta \ddot{y} = e^{-2\beta_0} \left\{ \delta y'' + \delta y' (\alpha'_0 - \beta'_0 + \frac{2}{r}) + y'_0 (\delta\alpha' - \delta\beta') \right\} + \frac{\delta\varepsilon - 3\delta P}{3 - 2\zeta} + 2\delta\beta \frac{\varepsilon_0 - 3P_0}{3 - 2\zeta}. \quad (28)$$

Дальнейшая процедура определения радиальных пульсаций звезды состоит в следующем. Видоизменим уравнение Эйлера, для чего введем перенормированную функцию смещения Ω , а также обозначения

$$\Omega = r^2 e^{-\alpha_0} \xi, \quad W = \frac{e^{3\beta_0 + \alpha_0}}{r^2} (P_0 + \varepsilon_0),$$

$$\Phi = \frac{\gamma P_0}{r^2} e^{\beta_0 + 3\alpha_0}, \quad (29)$$

$$Q = \frac{e^{3\alpha_0 + \beta_0}}{r^2} \left\{ P_0 \gamma \left[(\alpha'_0 + \beta'_0) - \frac{2}{r} (\alpha'_0 + \beta'_0) + 2\alpha'_0 (\alpha'_0 + \beta'_0) + \left(\frac{2}{r} + \beta'_0 - \alpha'_0 \right) \frac{e^{2\beta_0} (P_0 + \varepsilon_0)}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} - \left(\frac{e^{2\beta_0} (P_0 + \varepsilon_0)}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \right)^2 \right] + (P_0 \gamma)' (\alpha'_0 + \beta'_0) - P'_0 \left(\frac{2}{r} + \beta'_0 \right) - \alpha''_0 (P_0 + \varepsilon_0) + \frac{2P'_0 (P_0 + \varepsilon_0) e^{2\beta_0}}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} + 2 \left(\frac{e^{2\beta_0} (P_0 + \varepsilon_0)}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \right)^2 \left(P_0 + \frac{y_0}{r} \right) - \left(\frac{P_0 \gamma e^{2\beta_0} (P_0 + \varepsilon_0)}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \right)' \right\},$$

$$K = e^{\beta_0 + 2\alpha_0} \left\{ P_0 \gamma \frac{\delta y' - \delta y (\alpha'_0 + \zeta \frac{y'_0}{y_0})}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \right\}' + e^{\beta_0 + 2\alpha_0} \frac{\delta y' - \delta y (\alpha'_0 + \zeta y'_0 / y_0)}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \times \left[\frac{(P_0 + \varepsilon_0) e^{2\beta_0}}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} (P_0 \gamma - 2P_0 - \frac{2y_0}{r^2}) + P_0 \gamma \varepsilon'_0 + \alpha'_0 (P_0 + \varepsilon_0) \right] + \frac{e^{\beta_0 + 2\alpha_0} (P_0 + \varepsilon_0)}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \left\{ \delta y' (\alpha'_0 + \frac{2}{r} + \zeta \frac{y'_0}{y_0}) + \delta y \left(\frac{1 - e^{2\beta_0}}{r^2} + \frac{2\alpha'_0}{r} - \zeta \frac{y_0'^2}{2 y_0^2} \right) \right\}.$$

В результате (24) принимает вид

$$W \left(\ddot{\Omega} + \frac{r^2 e^{-\alpha_0}}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \delta \ddot{y} \right) = (\Phi \Omega)' + \Omega Q + K. \quad (30)$$

Уравнение (30) представляет собой динамическое уравнение, описывающее звездные пульсации. Физически приемлемы лишь те решения (30), для которых смещение вызывает конечные возмущения плотности и давления ($\delta \varepsilon$ и δP) в центре сферы, т.е. ξ/r конечно или равно нулю в пределе $r \rightarrow 0$, а также оставляет равным нулю давление на поверхности звезды R_s , что означает

$$\Delta P = -\gamma \frac{P_0}{r^2} e^{\alpha_0} (r^2 e^{-\alpha_0 \xi})' \Big|_{r=R_s} = 0.$$

Допустим, как обычно, что перенормированная функция смещения Ω периодически зависит от времени

$$\Omega = \Omega_0(r) e^{-i\sigma t}.$$

В связи с этим естественно считать, что остальные возмущения имеют такую же временную зависимость. Тогда динамическое уравнение (30) и граничные условия сводятся к задаче на собственные значения для частоты σ и амплитуды $\Omega_0(r)$

$$(\Phi \Omega'_0)' + Q \Omega_0 + K_0 = -\sigma^2 \left(\Omega_0 + \frac{r^2 e^{-\alpha_0}}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \delta y_0 \right), \quad (31)$$

в K_0 входят только амплитудные значения $\delta y = \delta y_0 e^{i\sigma t}$ и ее производных.

Методы решения этой задачи на собственные значения обсуждались Бардиным, Торном и Мельтцером [14]. Один из них состоит в требовании экстремума

$$\sigma^2 = \frac{\int_0^R (\Phi \Omega_0'^2 - Q \Omega_0^2 - K_0 \Omega_0) dr}{\int_0^R W \left(\Omega_0^2 + \frac{r^2 e^{-\alpha_0}}{y'_0 + \frac{2}{r} y_0} \Omega_0 \delta y_0 \right) dr}, \quad (32)$$

где $\Omega_0(r)$ изменяется так, чтобы удовлетворить граничным условиям: Ω_0/r^3 является конечной или равной нулю при $r \rightarrow 0$, $\gamma P_0 e^{\alpha_0} \Omega'_0 / r^2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow R_s$ (R_s - граница конфигурации).

Абсолютный минимум выражения (32) дает квадрат частоты основной моды пульсаций. Если он отрицателен, то звезда неустойчива. Если он положителен, то звезда устойчива относительно адиабатических радиальных возмущений. Результаты расчетов будут представлены в следующей работе.

Авторы благодарят участников семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке гранта RY6000 Международного научного фонда (фонда Сороса).

ЛИТЕРАТУРА

1. Jordan P., Schwercraft und Weltall, Braunschweig, 1955
2. Brans C., Dicke R.H. Phys. Rev. v.124, 925, 1961.
3. Thorne K.S., Dykla I.J., "Black Holes in the Dicke - Brans - Jordan Theory of Gravity". preprint OAP - 237, 1971.
4. Nariai H., Progr. Theor. Phys. v.42, 742, 1969.
5. Nariai H., Progr. Theor. Phys. v.47, 832, 1972.
6. Matsuda T., Progr. Theor. Phys. v.47, 738, 1972.
7. Janis A.I., Newman E.T. and Winicour J., Phys.Rev.Lett., v.20, 878, 1968.
8. Haroutyunian G., Papoyan V., Astrophys. and Space Sci., v.117, 189, 1985.
9. Арутюнян Г.Г., Папоян В.В., Астрофизика, т.21, 175, 1984.

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля, М.Наука, 1988.
11. Авакян Р.М., Арутюнян Г.Г., Папоян В.В., Астрофизика, т.33, 79, 1990.
12. Chandrasekhar S., Phys.Rev.Lett., v.12, 114, 1964.
13. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж., Гравитация, М.Мир, 1977.
14. Bardeen J.M., Thorne K.S., Meltzer D.W., Astrophys. Journ., v.145, 505, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 сентября 1995 года.