ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Д9 - 8076

В.П.Дмитриевский, В.В.Кольга, З.Трейбал

К ПРОБЛЕМЕ РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

Д9 - 8076

В.П.Дмитриевский, В.В.Кольга, З.Трейбал

К ПРОБЛЕМЕ РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Направлено в ***Nuclear Instruments and Methods***

Способы решения задач по формированию электрических полей можно разделить на две большие группы. Первая основывается на моделировании /математическом с помощью ЭВМ, электролитическом в ванне и т.п./ полей, создаваемых заранее заданными электродами известной формы. Этот метод, как правило, связан с более или менее значительной затратой времени. Второй подход к задаче - аналитическое решение. Основной недостаток его - ограниченная применимость. Как известно, вид граничных условий очень часто не позволяет получить точного аналитического решения, что приводит к необходимости обращаться к методам первой группы.

В описанном ниже варианте решения двумерных задач излагаются два приближенных метода, дающих достаточную точность для ряда практических задач.

Обычная постановка двумерных задач требует, чтобы были заданы либо определенная зависимость потенциала или его производной вдоль одной или нескольких кривых, либо распределение всех зарядов, создающих поле в данной области.

В первом случае должны быть вычислены интегралы, определяющие коэффициенты рядов в решении по методу разделения переменных или интегралы в формуле Грина. Это приводит к трудностям при практическом решении задачи.

Тем не менее, часто оказывается возможным достаточно точно определить картину поля в заданной области, сохраняя только конечное число членов ряда и совместно решая, для определения коэффициентов, такое же число

уравнений, полученных путем выбора соответствующего числа точек граничной кривой с известными значениями потенциала или его производных [1]. Общее решение уравнения Лапласа можно приближенно представить в виде суммы N частных решений $u_k(x,y)$, и выражение для потенциала $U(x,y)$ записать в форме:

$$U(x,y) = \sum_{k=1}^{N} a_k u_k(x,y). \qquad /1/$$

Число функций $u_k(x,y)$ должно быть равно числу точек, в которых необходимо удовлетворить граничным условиям. Каждое из условий представляет собой линейное уравнение, поэтому задача сводится к решению системы N линейных уравнений с неизвестными a_k. В результате находится выражение /1/ с определенными коэффициентами a_k, являющееся решением уравнения Лапласа и удовлетворяющее граничным условиям в N точках границы.

При реальном применении этого метода следует обратить внимание на два обстоятельства. Данный метод предоставляет большую свободу при выборе количества и расположения граничных точек, что, конечно, влияет на вид решения. Опыт показывает, что с увеличением количества условий N система уравнений становится плохо обусловленной. При этом резко возрастают значения коэффициентов, и значения $U(x,y)$ в промежутках между задающими точками могут достигать недопустимых величин. Реальными, по-видимому, являются $N \lesssim 12$.

Из теории комплексной переменной известно, что действительная и мнимая части любой регулярной функции $F(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$ являются гармоническими и, следовательно, удовлетворяют уравнению Лапласа. Одновременно ему удовлетворяют по отдельности и действительная и мнимая части функции $F(z)$. Любая из них может быть, таким образом, использована в качестве $u_k(x,y)$. В данной работе ограничимся рассмотрением одного важного случая, который оказывается достаточным для большинства реальных задач.

Регулярную функцию $F(z)$ в области, где нет особых точек, всегда можно представить в виде степенного ряда.

В случае симметричного поля $U(x,y) = U(x,-y)$ он приводит к следующему выражению для потенциала:

$$U_A(x,y) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}} \cos k\theta, \qquad /2/$$

где

$$\theta = \arg(x + iy). \qquad /3/$$

Недостаток выражения /2/ в следующем: поле $U_A(x,y)$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{div} \mathcal{E}_A = 0$ и, следовательно, не имеет замкнутых эквипотенциалей. Поэтому использование какой-либо из эквипотенциалей в качестве поверхности электрода возможно только в некоторой ограниченной области, где можно пренебречь краевыми эффектами реальной системы.

На оси симметрии выражение /2/ примет вид

$$U_A(x,0) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k. \qquad /4/$$

Таким образом, если в качестве граничного условия задано поле на оси симметрии, то его можно выразить в виде степенного ряда /4/, и полученные коэффициенты подставить в /2/. Все вычисления легко выполняются на малой вычислительной машине.

<u>Пример 1.</u> В центре координат $(x=0, y=0)$ необходимо создать величину напряженности электрического поля $\mathcal{E}_x = 80$ *кВ/см* с линейным спадом электрического поля $\partial \mathcal{E}_x / \partial x = -80$ *кВ/см*^{2} в рабочей области $-0{,}5 < x < 0{,}5$. Пусть $U_A(-0{,}5;\ 0) = 0$. Следовательно, наложены три условия и поэтому должно быть $N = 3$. Решая систему из трех уравнений, получим $a_0 = -50$ *кВ*, $a_1 = -80$ *кВ/см*, $a_2 = 40$ *кВ/см*^{2}. Картина соответствующих эквипотенциалей изображена на *рис. 1*.

Второй способ, который в данной работе используется для практического решения электростатических задач, основан на методе изображений [2]. При определенных условиях можно подобрать такую систему зарядов, имеющих надлежащую величину и определенным образом расположенных вне заданной области, что действие этих

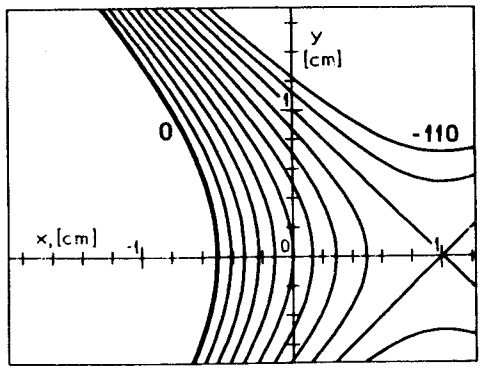

Рис. 1. Форма эквипотенциалей для решения в виде степенного ряда /решение примера 1/. Цифрами обозначены потенциалы /кВ/ на соответствующих линиях.

зарядов обеспечит точно или с достаточным приближением требуемые граничные условия.

Таким образом, истинная задача с граничными условиями заменяется эквивалентной задачей определения поля в расширенной области без граничных условий, но с учетом зарядов-изображений, которые должны находиться вне заданной области, так как потенциал создаваемого ими поля должен удовлетворять уравнению Лапласа в этой области. Если, как и в первом способе, задать граничные условия только в конечном числе точек заданной кривой, то получим конечное число зарядов-изображений, равное числу заданных точек границы.

Далее точно решается эквивалентная задача и сравнение найденного из этого решения поля вдоль граничной кривой с первоначально заданным определит точность соответствия эквивалентной задачи истинной.

Плоская система N точечных зарядов имеет потенциал, который можно записать в виде следующей суммы:

$$U_B(x,y) = \sum_{k=1}^{N} q_k \cdot \ln\left[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2\right]. \qquad /5/$$

Заряды расположены в точках (x_k, y_k). Основное преимущество выражения /5/ состоит в том, что эквипотенциалы такой системы замкнуты. При дополнительном условии

$$\sum_{k=1}^{N} q_k = 0 \qquad /6/$$

потенциал на бесконечности стремится к нулю.

Последнее выражение представляет еще одну свободу выбора помимо упомянутых выше, а именно - перед составлением уравнений, соответствующих граничным условиям, необходимо разместить N зарядов, т.е. задать их координаты x_k, y_k. В нашей практике это производилось опытным путем. Одним из критериев для сравнения различных результатов одной и той же задачи может служить величина суммы $\Sigma|q_k|$, которая должна быть вблизи минимума. Несмотря на описанный произвол, результаты применения формулы /5/ весьма многообещающи, о чем свидетельствуют приведенные ниже расчеты варианта фокусирующей секции электростатического дефлектора изохронного циклотрона У-120М [3] и электростатического возбудителя системы вывода установки "Ф" [4].

Пример 2. Требуется найти форму электродов, создающих электрическое поле, описанное в примере 1. Помимо уже приведенных условий потребуем выполнение следующих: для достижения хорошей линейности электрического поля на линии симметрии положим $\partial^3 U/\partial x^3 = 0$, $\partial^1 U/\partial x^1 = 0$. Для создания заземленного экрана на высоте y = 3,8 *см* пусть U /-0,5; 3,8/ = 0, U /0,5; 3,8/ = 0; потребуем также выполнения условия /6/. В целом наложено 8 условий. Чтобы удовлетворить этим граничным условиям, размещаем 8 зарядов в области, занятой предполагаемыми электродами: /-0,8; 0,2/; /-0,9; 0,45/; /0,6; 1/, /0,8; 0,8/, /1; 0,6/, /0; 5,5/, /0; 7,5/, /1,5; 7/ и им сопряженные парные заряды в полуплоскости $y < 0$ соответственно с одинаковыми q_k. Результаты приведены на *рис. 2*, где показаны формы электродов, создающих заданное электрическое поле на линии симметрии.

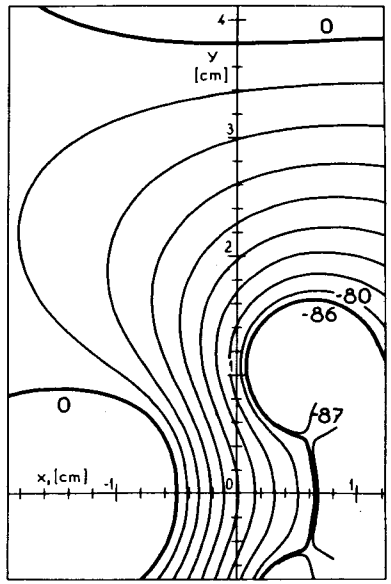

Рис. 2. Фокусирующая секция электростатического дефлектора /решение примера 2/. Цифрами обозначены потенциалы /кВ/ на соответствующих линиях.

Пример 3. Создание электрического поля с напряженностью $\mathcal{E}_x(x,0)=0$ при $x \leq 0$ и с линейным ростом напряженности ($\partial \mathcal{E}_x/\partial x|_{y=0} = 6{,}6$ *кВ/см*^{2}) на участке $0 < x < 6$ *см*. Обеспечение заземленного экрана на высоте $y = 5$ *см* и отверстия в левом электроде с половинной высотой не меньше 1 *см* для входа протонного пучка. После нескольких проб в качестве лучшего результата взят следующий: N = 12; заряды расположены в точках /-0,095; 2,063/, /7,5; 1,623/, /-15; 9,7/, /-12,91888; 9,142/, /-10,85777; 9,08/, /-8,66666; 9,07/, /-6,55555; 9,07/, /-4,44444; 9,07/, /-2,33333; 9,07/, /-0,2222; 9,04/, /2,09888; 9,085/, /4; 9,22/ и в соответствующих симметричных точках полуплоскости $y < 0$; наложены условия: $\partial U/\partial x = 0$, $\partial^2 U/\partial x^2 = 0$, $\partial^3 U/\partial x^3 = 0$ в точке /-3,2; 0/, $\partial U/\partial x = -19{,}9$, $\partial^2 U/\partial x^2 = -3{,}3$ в точке /3,0/, $\partial^3 U/\partial x^3 = 0$ в точке /2,81; 0/, $U = 0$ в точках

/-0,04; 1,58/, /-0,501; 1,5/, /5; 5/, /5,96; 5/, /7,65; 5/ и задано условие /6/. Результат вычислений приведен на рис. 3 и 4. Влиянием полей в районе точки /3,7; 5/ и при $x < -1$ пренебрегаем. В качестве заземленного электрода взята эквипотенциаль U = -0,5.

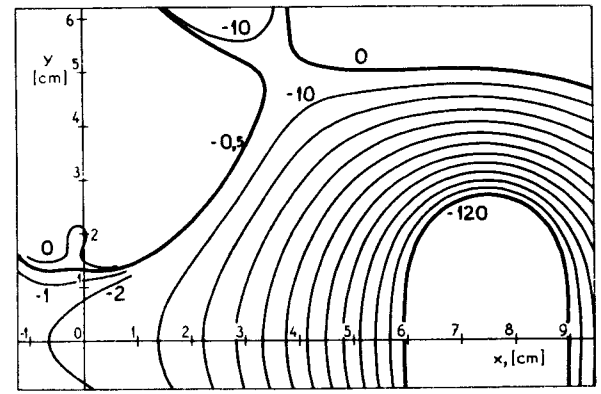

Рис. 3. Электростатический возбудитель системы вывода установки "Ф" /решение примера 3/. Цифрами обозначены потенциалы /кВ/ на соответствующих линиях.

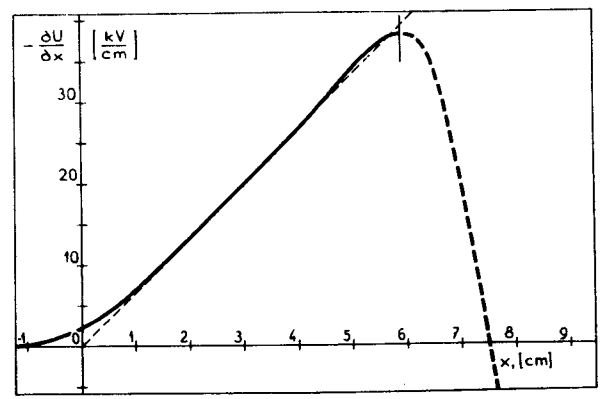

Рис. 4. Напряженность электрического поля на оси симметрии, создаваемая электродами, приведенными на рис.3.

Все приведенные расчеты выполнены на ЭВМ "Наири-2", модернизированной для работы с дискретным графопостроителем [5].

Описанный метод позволяет находить точное решение двумерного уравнения Лапласа с граничными условиями, заданными в конечном числе точек. Зная общие свойства частных решений, можно подобрать подходящий вид решения задачи. Первый метод особенно удобен для восстановления электрического поля по полю на оси симметрии. Практически вся обработка данных может быть возложена на малую ЭВМ. Второй метод более удобен для практического определения формы электродов, хотя определенным недостатком является большая свобода выбора некоторых параметров. Его основное преимущество состоит в том, что все эквипотенциали образуют замкнутые фигуры конечных размеров и любая из них может быть, следовательно, заменена поверхностью электрода. Важным является также то обстоятельство, что полученный результат учитывает влияние краевых эффектов на поле в рабочей области. Использование графопостроителя на линии с ЭВМ или графического дисплея дает возможность оперативно вмешиваться в решение задачи и корректировать граничные условия в процессе решения.

Литература

1. *С.Рамо, Дж.Уиннери. Поля и волны в современной радиотехнике. ОГИЗ, Москва, 1948 г.*
2. *Дж.Джексон. Классическая электродинамика. Изд-во "Мир", Москва, 1965 г.*
3. *В.П.Дмитриевский, В.В.Кольга, Н.И.Полумордвинова, З.Трейбал. Сообщение ОИЯИ, Р9-7339, Дубна, 1973.*
4. *А.А.Глазов и др. Препринт ОИЯИ, 9-3951, Дубна, 1968.*
5. *П.П.Гавриш, Е.Д.Городничев, В.В.Кольга. Сообщение ОИЯИ, 11-7285, Дубна, 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел 5 июля 1974 года.