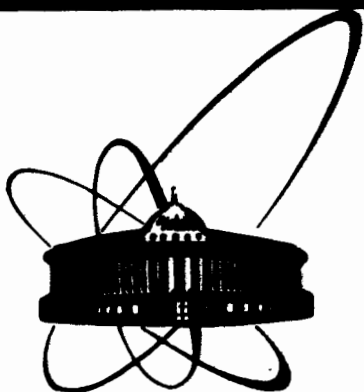


87-403



**сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна**

Д6-87-403

**В.Н.Покровский, И.А.Простаков<sup>1</sup>, Ш.Бриансон<sup>2</sup>,  
Ц.Вылов, В.П.Чистяков<sup>1</sup>**

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ  
ОЦЕНКИ МАССЫ АНТИНЕЙТРИНО  
В ИДЕАЛИЗИРОВАННОМ ТРИТИЕВОМ  
ЭКСПЕРИМЕНТЕ**

---

<sup>1</sup> Московский инженерно-физический институт

<sup>2</sup> ЦЯСМС, Орсэ, Франция

**1987**

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования формы бета-спектра трития вблизи его верхней границы, нацеленные на определение массы электронного антинейтрино, имеют точность, находящуюся на пределе возможностей современного эксперимента. В этих условиях большое значение приобретают выявление и анализ эффектов, могущих привести к смещениям оцениваемых параметров. Если подобные эффекты не удастся устранить или надежно определить путем, например, проведения экспериментов в тщательно контролируемых условиях, то они должны быть учтены при оценке точности результатов.

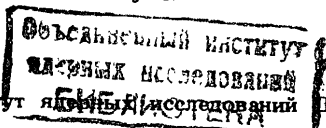
Одним из источников такого рода дополнительной /систематической/ погрешности является смещение оценок искомых параметров при неверном выборе значений априорно задаваемых параметров, также входящих в математическую модель эксперимента. Сдвиг или, вообще говоря, неточность значений априорных параметров может появиться под действием самых разных причин. Например, неадекватность модели калибровочного эксперимента для определения приборной формы линии /скажем, неучет естественной ширины/ может привести к неверной оценке энергетического разрешения спектрометра.

В настоящей работе и рассматривается влияние некоторых априорных параметров идеализированной модели тритиевого эксперимента на смещение оценок массы антинейтрино и граничной энергии спектра.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Задачей тритиевого эксперимента является изучение формы бета-спектра, зависимость которой от массы антинейтрино  $m_{\bar{\nu}}$  предполагается известной. Обычно принимается также, что известна и относительная форма спектра фона. Идеализированная схема тритиевого эксперимента опирается на следующие упрощающие предположения<sup>1/</sup>:

- градуировка спектрометра линейна по кинетической энергии электронов  $T$ ;
- эффективность регистрации электронов постоянна;
- приборная форма линии имеет вид гауссиана, характеризующегося полной шириной на полувысоте  $R$ ;



- фон не зависит от энергии;
- форма бета-спектра описывается V-A-вариантом слабого взаимодействия;

- Источником является атомарный тритий, а спектр конечных состояний описывается двухуровневой аппроксимацией.

Здесь, как и в ряде других случаев, когда нет необходимости вводить в рассмотрение активность источника, в качестве общей модели эксперимента целесообразно воспользоваться полиномиальным распределением числа отсчетов в каналах спектрометра. Полиномиальное распределение получается из пуассоновского при задании суммарного числа отсчетов и может быть записано в виде

$$P(\eta_i = n_i, i = 1, \dots, K | \sum n_i = N) = \frac{N!}{n_1! \dots n_K!} p_1^{n_1} \dots p_K^{n_K}, \quad /1/$$

где  $\eta_i$  - компоненты случайного вектора;  $n_i$  - число отсчетов в  $i$ -ом канале, найденное в эксперименте или при моделировании;  $K$  - число каналов спектрометра;  $N$  - суммарное число отсчетов;  $p_i$  - вероятность появления отсчета в  $i$ -ом канале, причем  $\sum p_i = 1$ . Здесь и в дальнейшем знак  $\sum$  подразумевает суммирование от 1 до  $K$ , если не указаны другие пределы.

По предположению, величины  $p_i$  являются известными - зависящими от принятой модели - функциями вектора параметров  $\phi$  размерности  $q$ , который можно разбить на подвекторы оцениваемых параметров  $\vec{\theta}$  размерности  $r$  и априорно известных параметров  $\vec{a}$  размерности  $s = q - r$ .

Оценки искоемых параметров  $\vec{\theta}$  находятся из принципа максимального правдоподобия, а именно, из условия максимума функции /см., например, /2/ /

$$\ln L = \sum n_i \ln p_i, \quad /2/$$

а ковариационная матрица оценок есть

$$C = \frac{1}{N} I^{-1}; \quad /3/$$

где  $I$  - информационная матрица для единичного наблюдения. Ее элементы имеют вид

$$I_{jm} = \sum \frac{1}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \theta_j} \frac{\partial p_i}{\partial \theta_m} \quad (j, m = 1, \dots, r). \quad /4/$$

Для нахождения списка параметров и выражения через них величин  $p_i$  представим  $p_i$  в виде

$$p_i = \frac{\gamma}{1 + \gamma} a_i + \frac{1}{1 + \gamma} b_i, \quad /5/$$

где  $\gamma$  - суммарное отношение эффект/фон во всем измеряемом диапазоне энергий, а  $a_i$  и  $b_i$  - вероятности заполнения  $i$ -го канала истинным или фоновым событием.

Для обычных бета-спектрометров величина  $a_i$  представляет собой свертку приборной формы линии /гауссиана/ с теоретической формой спектра, взятую по области определения последнего и нормированную на условие  $\sum a_i = 1$ . Для идеального спектрометра с непрерывной регистрацией импульсов и конечной шириной канала перед нормировкой для вычисления  $a_i$  потребовалось бы дополнительное интегрирование в пределах канала. Предполагая распределение точек измерения спектра равномерным, будем говорить в обоих случаях о каналах измерения и о шаге измерения или ширине канала  $\Delta$ .

В соответствии со сделанными предположениями для двухкомпонентного бета-спектра можем записать

$$S(T) = (1 - w)S_0(T; T_0, m_{\bar{\nu}}) + wS_0(T; T_0 - E_1^*, m_{\bar{\nu}}), \quad /6/$$

где  $w$  - вероятность распада на возбужденное состояние;  $T_0$  - максимальная граничная кинетическая энергия электронов;  $E_1^*$  - энергия возбужденного состояния. Для спектра отдельной компоненты с граничной энергией, скажем,  $T_0$ , имеем

$$S_0(T; T_0, m_{\bar{\nu}}) = F(E, Z + 1) \sqrt{T(T + 2m_e)} (T + m_e) \times \\ \times \sqrt{(T_0 - T)(T_0 - T + 2m_{\bar{\nu}})} (T_0 + m_{\bar{\nu}} - T), \quad /7/$$

где  $E$  - полная энергия электрона, а массы электрона и антинейтрино выражены в энергетических единицах. Здесь  $F(E, Z + 1)$  - функция Ферми, а последующими сомножителями являются импульс и полная энергия электрона и нейтрино, выраженные через параметры  $T_0, m_{\bar{\nu}}$ .

Вместо параметра  $T_0$  возможно использовать параметр  $E_0 = T_0 + m_{\bar{\nu}}$  /максимальную полную энергию антинейтрино/, имеющий смысл экстраполированной границы графика Ферми-Кюри. При этом последние два сомножителя запишутся в виде

$$\sqrt{(E_0 - T)^2 - m_{\bar{\nu}}^2} (E_0 - T). \quad /8/$$

Наконец, для величины  $b_i$  в рамках сделанных предположений имеем

$$b_i = 1/K. \quad /9/$$

Таким образом, в нашем случае единственная независимая величина - кинетическая энергия - входит в рассмотрение через номер канала  $i$ , а вектор параметров  $\vec{\phi}$  имеет следующие компоненты: масса антинейтрино  $m_{\bar{\nu}}$ , максимальная граничная кинетическая энергия электронов  $T_0$  /или экстраполированная граница  $E_0$  /, энергия возбужденного состояния  $E_1^*$ , вероятность распада на него  $w$ , отношение эффект/фон  $\gamma$ , разрешение прибора  $R$ . Получаемые результаты будут, естественно, зависеть от таких вспомогательных параметров, как полное число отсчетов  $N$ , граница измеряемого диапазона энергий  $T_{\min}$ , число каналов  $K$  и шаг измерения /ширина канала/  $\Delta$ . Включение перечисленных параметров в рассмотрение было бы необходимо при исследовании вопроса об оптимальных или минимально необходимых условиях постановки эксперимента.

### 3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Статистическое /численное/ моделирование является мощным и гибким средством оценок характеристик выборочного распределения для любой модели и для любых значений ее параметров, для определения влияния ошибок в задании параметров или вида модели, нахождения меры робастности оценок и т.п. Приписав параметрам их "истинные" значения и вычислив  $p_i$ , можно найти ожидаемое число отсчетов в каналах, а с помощью генератора случайных чисел с заданным распределением получить модельный спектр. Многократное повторение процедуры построения модельного спектра и его обработки - в рамках изучаемой задачи - с целью получения оценок параметров  $\hat{\theta}$  позволяет найти средние выборочные значения параметров и их ковариационной матрицы, которые и позволяют судить об ответе на поставленные вопросы. Процедура моделирования в нашем случае подробнее описана в работе /1/.

Большая часть расчетов была проведена со следующими исходными значениями компонент вектора  $\theta$ :  $m_{\bar{\nu}} = 30$  эВ;  $T_0 = 18570$  эВ / $E_0 = 18600$  эВ/;  $R = 45$  эВ;  $w = 0,3$ ;  $E_1^* = 43$  эВ;  $\gamma = 10$  и вспомогательных параметров:  $T_{\min} = 18400$  эВ,  $\Delta = 5$  эВ,  $K = 50$ ,  $N = 4 \cdot 10^5$ . Разыскивались оценки  $m_{\bar{\nu}}$  и  $T_0$  /или  $E_0$ / при задании истинных или смещенных значений компонент вектора  $\vec{a}(R, w, E_1^*, \gamma)$ . Малое число компонент  $\theta$  позволило искать максимум функционала /2/ путем численного перебора его значений на сетке с аргументами  $m_{\bar{\nu}}$ ,  $T_0$  ( $E_0$ ). Объем выборки был равен 100. Для отслеживания тенденций в свойствах оценок некоторые расчеты повторялись с  $m_{\bar{\nu}} = 0$  и 10 эВ, а также с  $R = 20$  эВ; при этом объем выборки составлял, как правило, 20-50.

Заметим, что такой набор значений  $m_{\bar{\nu}}$  лежит в диапазоне обсуждаемых величин массы антинейтрино, значения  $R$  примерно соответствуют используемым в экспериментах ИТЭФ /3/ и ряда других групп, а значения  $w$  и  $E_1^*$  взяты из двухуровневой аппроксимации Бергквиста /4/.

Для оценок  $m_{\bar{\nu}}$  и  $T_0$  ( $E_0$ ), получаемых при задании истинных значений компонент  $\vec{a}(R, w, E_1^*, \gamma)$ , существенно отметить следующее:

- с точностью до стандартных отклонений средних выборочных значений /около 0,2 эВ/ смещение оценок отсутствует;
- оценки сильно коррелированы между собой: коэффициенты корреляции  $\rho(m_{\bar{\nu}}, T_0)$  и  $\rho(m_{\bar{\nu}}, E_0)$  составляют -0,97 и +0,96 соответственно;
- выборочные ковариационные матрицы очень близки к рассчитанным на основании формул /3/ и /4/;
- с точки зрения достижимой точности нет оснований для предпочтения какой-либо из параметризаций.

Отметим также, что здесь, как и в других проверявшихся нами случаях, результаты для разных типов спектрометров совпадают в пределах ошибок, если полное число отсчетов  $N$  одинаково.

При задании на этапе обработки компонент вектора  $\vec{a}$  со сдвигом  $\Delta a_j$  от истинных значений возникает смещение оценок  $\hat{\theta}$ . Так, на рис.1 изображены смещения оценок  $m_{\bar{\nu}}$  при обеих параметризациях / $T_0$  и  $E_0$ / при ошибочном задании разрешения или заселенности возбужденного состояния. Как видно из рис.1, зависимости

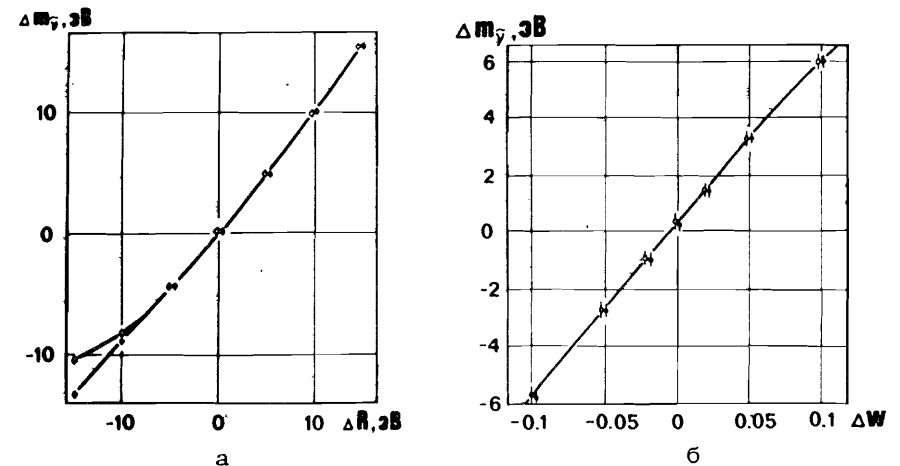


Рис.1. Смещение оценки  $m_{\bar{\nu}}$  для параметризаций  $m_{\bar{\nu}}$ ,  $T_0$  (●) и  $m_{\bar{\nu}}$ ,  $E_0$  (○) в зависимости от ошибок в задании а/ разрешения прибора  $R$  /эВ/; б/ вероятности заселенности возбужденного уровня  $w$ .

$\Delta m_{\bar{\nu}}$  от  $\Delta R$  и  $\Delta w$  носят практически линейный характер и совпадают для обеих параметризаций /для истинных значений  $m_{\bar{\nu}} = 30$  эВ,  $R = 45$  эВ,  $w = 0,3$ /.

Влияние ошибки в задании разрешения отмечалось ранее в работе /5/, где была предложена приближенная формула для определения такого смещения

$$\bar{m}_{\bar{\nu}}^2 - m_{\bar{\nu}}^2 = 2R \cdot \Delta R,$$

где  $\bar{m}_{\bar{\nu}}$  - оценка, а  $m_{\bar{\nu}}$  - истинное значение массы антинейтрино. Как легко видеть, это приближенная формула качественно передает ход зависимости  $\Delta m_{\bar{\nu}}$  от  $\Delta R$ , хотя и дает несколько завышенные значения  $\Delta m_{\bar{\nu}}$ .

Влияние заселенности возбужденного состояния /также для двухуровневого приближения/ было проверено в работе /6/ для  $m_{\bar{\nu}} = 24$  эВ и  $w$  от 0,3 до 0. Наши результаты для  $\Delta m_{\bar{\nu}}$  в перекрывающемся диапазоне изменения  $w$  очень близки к данным /6/.

На рис.2 на плоскости  $m_{\bar{\nu}}, T_0 (E_0)$  изображено совместное поведение оценок в зависимости от ошибок в задании разрешения или заселенности возбужденного уровня. Если величина  $\Delta R$  почти не сказывается на оценке  $E_0$ , но заметно влияет на оценку  $T_0$ , то для  $\Delta w$  зависимости носят противоположный характер. Выборочные коэффициенты корреляции  $\rho(m_{\bar{\nu}}, T_0)$  и  $\rho(m_{\bar{\nu}}, E_0)$  при этом несколько меняются, но степень корреляции остается по-прежнему высокой.

Как отмечалось выше, для прослеживания тенденций в свойствах оценок моделирование спектров проводилось также при исходных значениях  $m_{\bar{\nu}} = 10$  и 0 эВ, а также  $R = 20$  эВ. Свойства оценок при задании истинных значений компонент  $\vec{a}$  при этом факти-

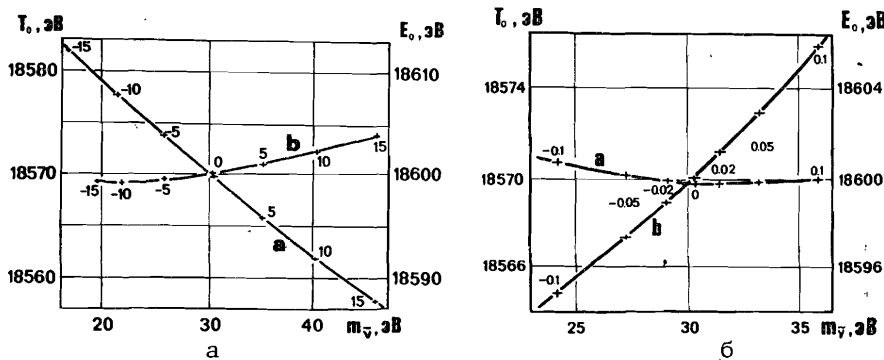


Рис.2. Совместное изменение оценок  $m_{\bar{\nu}}, T_0$  /кривые а/ и  $m_{\bar{\nu}}, E_0$  /кривые б/ в зависимости от ошибок в задании а/ разрешения прибора  $R$ , б/ заселенности возбужденного уровня  $w$ . Значения  $\Delta R$ /эВ/ и  $\Delta w$  указаны около точек.

чески не изменяются. Влияние ошибок  $\Delta a_j$  при уменьшении истинного значения  $m_{\bar{\nu}}$  сказывается более сильно и приобретает нелинейный характер, а улучшение разрешения приводит к ослаблению этих зависимостей. Так, при  $R = 45$  эВ и  $\Delta R = 10$  эВ смещение  $\Delta m_{\bar{\nu}}$  составляет около 10 эВ при  $m_{\bar{\nu}} = 30$  эВ и около 20 эВ при  $m_{\bar{\nu}} = 0$ , тогда как при  $R = 20$  эВ и том же  $\Delta R$  получаем 5 и 15 эВ соответственно.

Сходные результаты были получены и для других компонент вектора  $\vec{a}$ . Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе, а здесь мы остановимся на влиянии формы линии.

Под искажением приборной формы линии /ПФЛ/ обычно понимают введение в нее некоторой асимметричной компоненты, отсутствующей в истинной ПФЛ. Подобные искажения могут появиться, например, если в калибровочном эксперименте для определения ПФЛ из анализа спектров электронов внутренней конверсии не учитывать такие механизмы, как "встряска" и плазменные возбуждения.

Влияние асимметрии было изучено для простой модели: истинная ПФЛ имеет вид гауссиана с дисперсией  $\sigma^2$  и разрешением  $R = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma$ , а искажение состоит в добавке экспоненциального "хвоста" слева, т.е.

$$Y(x, x_0) = \begin{cases} \exp[\lambda(x - x_0)], & x < x_0, \\ \exp[-(x - x_0)^2/2\sigma^2], & x \geq x_0, \end{cases} \quad /10/$$

где точка сшивания  $x_c = x_0 - 2\lambda\sigma^2$ . Принимая за меру асимметрии  $\kappa$  отношение площадей под асимметричной и симметричной частями ПФЛ и задаваясь значениями  $\kappa$ , можно найти соответствующее  $\lambda$  из уравнения

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp(-2y^2) - \Phi(-2y), \quad /11/$$

где  $y = \lambda\sigma$  и  $\Phi(y)$  - функция нормального распределения.

На рис.3 изображены смещения  $\Delta m_{\bar{\nu}}$  и  $\Delta T_0$  в зависимости от степени асим-

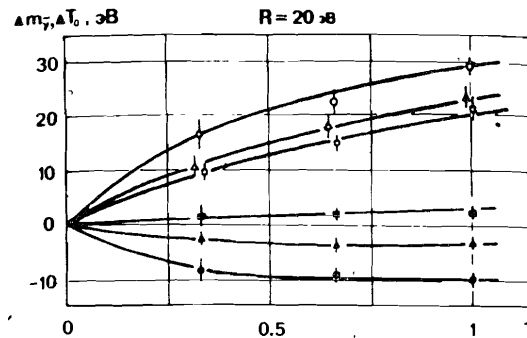


Рис.3. Смещение оценок  $m_{\bar{\nu}}$  и  $T_0$  /черные точки/ в зависимости от степени асимметрии  $\kappa$  при  $m_{\bar{\nu}} = 0$  эВ ( $\square$ ), 10 эВ ( $\Delta$ ) и 30 эВ ( $\circ$ ).

метрии  $\kappa$  для  $R = 20$  эВ и  $m_{\nu} = 0,10$  и  $30$  эВ. Аналогичные зависимости были получены также и для  $R = 10$  эВ. Как и ранее, уменьшение исходного значения  $m_{\nu}$  приводит к усилению влияния искажения, а улучшение разрешения ослабляет его. Влияние асимметрии усугубляется, если искаженная ПФЛ имеет структурные особенности в низкоэнергетической части. Так, если за искаженную ПФЛ принять "экспериментальную" форму M1-линии перехода  $^{207}\text{Pb}$   $^{169}\text{Yb}$ , получаемую при деконволюции наблюдаемой  $^{17}$  на электростатическом спектрометре линии только при учете естественной ширины, то при  $R \approx 7$  эВ смещение  $\Delta m_{\nu}$  возрастает до  $40-50$  эВ. Схожая оценка на примере той же линии M1- $^{207}\text{Pb}$  была дана Бергквистом  $^{18}$  в терминах неопределенности в определении величины  $m_{\nu}^2$ , обусловленной асимметрией:  $\Delta m_{\nu}^2 = 800 \div 950$  эВ $^2$ .

#### 4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОЛНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

При всех достоинствах метода статистического моделирования, отмечавшихся в разделе 3, он не лишен и некоторых недостатков. Так, необходимо многократно повторять моделирование и обработку спектров при прослеживании влияния ошибок в отдельных компонентах  $\Delta a_j$  и возвращаться к этой процедуре при изменении размерности вектора  $\vec{\theta}$ . Кроме того, при увеличении числа параметров  $\theta_j$  метод перебора на сетке, обеспечивающий нахождение глобального экстремума, становится крайне неэффективным. В этой связи представляется целесообразным попытаться использовать полную теоретическую ковариационную матрицу, элементы которой могут быть подсчитаны в рамках принятой математической модели эксперимента.

Исходным является следующее предположение: если все без исключения компоненты  $\phi_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ) включить в список определяемых параметров, то их оценки максимального правдоподобия будут асимптотически нормальны с вектором математических ожиданий, сходящимся к истинным значениям, и ковариационной матрицей  $C$ , обратной /с точностью до множителя  $1/N$ / полной информационной матрице  $I$ . Ее элементы теперь могут быть записаны в виде

$$I_{jm} = \sum \frac{1}{P_i} \frac{\partial P_i}{\partial \phi_j} \frac{\partial P_i}{\partial \phi_m} \quad (j, m = 1, \dots, q). \quad /12/$$

Если компоненты  $\phi_i$  были упорядочены таким образом, что первые  $r$  из них образовывали вектор  $\vec{\theta}$ , а последующие  $s = q - r$  компонент - вектор  $\vec{a}$ , то полную матрицу  $C$  удобно разбить на подматрицы

$$C = \begin{pmatrix} C_{\theta\theta} & | & C_{\theta a} \\ \hline C_{a\theta} & | & C_{aa} \end{pmatrix},$$

где  $C_{\theta\theta}$  и т.д. - блочные матрицы размерности  $r \times r$ ,  $r \times s$ ,  $s \times r$  и  $s \times s$  соответственно.

Тогда для условного распределения оценок  $\vec{\theta}$  при фиксировании последних  $s$  компонент  $\vec{\phi}$  /т.е. вектора  $\vec{a}$ / справедливы следующие два утверждения /см., например,  $^{19}$ , с.139/.

Во-первых, ковариационная матрица  $C_{\theta}$  будет иметь вид

$$C_{\theta} = C_{\theta\theta} - C_{\theta a} C_{aa}^{-1} C_{a\theta}. \quad /14/$$

Заметим, что исходя из формул для прямой и обратной матриц, построенных из блоков /см., например,  $^{19}$ , с.142/, нетрудно показать, что

$$C_{\theta} = \frac{1}{N} I_{\theta\theta}^{-1}, \quad /15/$$

как и следовало ожидать.

Во-вторых, смещение вектора математических ожиданий  $\vec{\theta}$  от истинных значений в зависимости от смещения вектора  $\vec{a}$  определяется уравнением

$$\Delta \vec{\theta} = C_{\theta a} C_{aa}^{-1} \Delta \vec{a}. \quad /16/$$

В скалярной форме можем записать

$$\Delta \theta_j = \sum_{i=1}^s \beta_{ij} \Delta a_i \quad i = 1, \dots, r, \quad /17/$$

где  $\beta_{ij}$  - элемент матрицы  $B = C_{\theta a} C_{aa}^{-1}$  размерности  $r \times s$ .

Таким образом, значения  $\beta_{ij}$  являются мерой влияния ошибок в задании параметров  $a_j$  на смещение оценок параметров  $\theta_i$  при данном исходном наборе  $\vec{\phi}(\vec{\theta}, \vec{a})$ . Заметим, что при этом легко изменить разбиение вектора  $\vec{\phi}$ : потребуется лишь по-иному разбить матрицу  $C$  и обратить матрицу  $C_{aa}$ , чтобы найти новый ряд значений  $\beta_{ij}$ .

Линейные зависимости вида /17/ справедливы, вообще говоря, лишь в окрестности истинных значений, где величины  $\beta_{ij}$  могут считаться постоянными. В общем случае следует переходить к системе дифференциальных уравнений. Так, для прослеживания зависимости  $\Delta \theta_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) от ошибки в одной только компоненте  $\Delta a_j$  требуется решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\theta_i}{da_j} = \beta_{ij}(\vec{\theta}, \vec{a}) \quad i = 1, \dots, r. \quad /18/$$

Расчеты коэффициентов  $\beta_{ij}$  проводились для исходных значений  $R = 45$  и  $20$  эВ,  $m_{\vec{v}} = 30, 20, 10$  и  $2$  эВ /мы несколько отошли от значения  $m_{\vec{v}} = 0$ , чтобы избежать трудностей с вычислениями производных/; остальные параметры имели значения, указанные в разделе 3. Наборы значений  $\beta_{ij}$  находились для двух разбиений вектора  $\phi: \theta_1(m_{\vec{v}}, T_0)$  и  $\theta_2(m_{\vec{v}}, T_0, \gamma)$ .

Величины  $\beta_{ij}(\theta_1)$  полностью согласуются с тенденциями, отмеченными при моделировании - усиление влияния ошибок  $\Delta a_j$  при уменьшении истинного значения  $m_{\vec{v}}$  и ослабление такового при улучшении разрешения. Для больших значений  $m_{\vec{v}}$  хорошие результаты дает линейное приближение. Так, например, при  $m_{\vec{v}} = 30$  эВ и  $R = 45$  эВ получаем

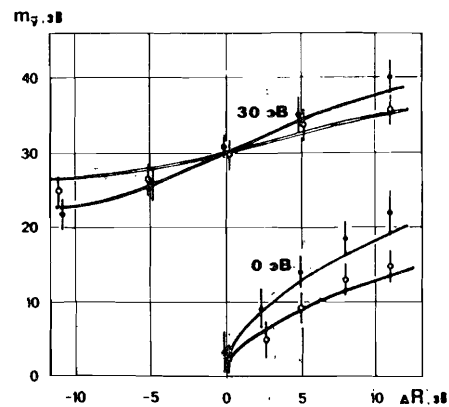
$$\Delta m_{\vec{v}} = 1,01 \Delta R + 0,60 \Delta w + 0,57 \Delta E_1^* - 9,38 \Delta \gamma,$$

где  $\Delta m_{\vec{v}}$ ,  $\Delta R$  и  $\Delta E_1^*$  выражены в эВ,  $\Delta w$  - в %,  $\Delta \gamma$  - в абсолютных единицах. Как видно из сравнения с рис.1, полученные зависимости от  $\Delta R$  и  $\Delta w$  хорошо согласуются с результатами моделирования. То же можно отметить и для других компонент  $\vec{a}$ , а также для  $\Delta T_0$ .

При малых значениях  $m_{\vec{v}}$  линейное приближение оказывается эффективным лишь в небольшой окрестности исследуемой точки и надо переходить к решению системы дифференциальных уравнений. Для примера на рис.4 сравниваются результаты моделирования и решения системы вида /18/, в которую в данном случае входит два уравнения для  $m_{\vec{v}}$  и  $T_0$  для одной из компонент  $\vec{\theta}_1$ , а именно,  $m_{\vec{v}}$ . Как видно, наблюдается вполне удовлетворительное согласие.

Несколько наборов округленных значений  $\beta_{ij}(\vec{\theta}_2)$ , т.е. для оцениваемых параметров  $m_{\vec{v}}, T_0$  и  $\gamma$ , приведено в таблице. Указанные значения соответствуют  $R = 20$  эВ и  $m_{\vec{v}} = 30, 10$  и  $2$  эВ /сверху вниз/. При этом  $\Delta m_{\vec{v}}$ ,

Рис.4. Значения оценок  $m_{\vec{v}}$  в зависимости от ошибки в разрешении  $\Delta R$  при исходных значениях  $m_{\vec{v}} = 0$  и  $30$  эВ,  $R = 45$  эВ /черные точки/ и  $20$  эВ. Точки - результаты моделирования, кривые - решения системы дифференциальных уравнений.



Таблица

Коэффициенты  $\beta_{ij}(\vec{\theta}_2)$  при  $R = 20$  эВ и  $m_{\vec{v}} = 30, 10$  и  $2$  эВ

$\Delta \vec{\theta}_2$	$\Delta a_2$			$\sigma(\vec{\theta}_2)$
	$\Delta R$	$\Delta w$	$\Delta E_1^*$	
$\Delta m_{\vec{v}}$	0,5	0,7	0,4	1,7
	0,8	1,0	0,7	3,5
	3,7	4,5	2,7	15,3
$\Delta T_0$	-0,4	-0,1	-0,2	1,0
	-0,8	-0,6	-0,5	2,9
	-3,7	-4,1	-2,6	14,8
$\Delta \gamma$	7,8	-0,2	-0,2	0,1
	2,0	-1,5	-2,0	0,1
	0,2	-2,5	-2,7	0,1

$\Delta T_0, \Delta R$  и  $\Delta E_1^*$  измеряются в эВ,  $\Delta w$  - в % и  $\Delta \gamma$  - в абсолютных единицах. Как видно, при уменьшении  $m_{\vec{v}}$  влияние ошибок  $\Delta a_j$  возрастает /исключением является зависимость  $\Delta \gamma$  от  $\Delta R$ /. К увеличению влияния  $\Delta a_j$  в 1,5-2 раза приводит и ухудшение разрешения с 20 до 45 эВ. Можно отметить также, что коэффициенты  $\beta_{ij}(\vec{\theta}_1)$  и  $\beta_{ij}(\vec{\theta}_2)$  довольно близки друг к другу.

Полученные множества значений  $\beta_{ij}$  можно использовать для оценки систематических погрешностей определения компонент  $\vec{\theta}$ , вносимых неточностями знания параметров  $\vec{a}$ . Именно, на основании соотношения /17/ можно записать

$$\Delta^2(\theta_i) = \sum_{j=1}^s \beta_{ij}^2 \Delta^2(a_j), \quad /19/$$

где  $\Delta^2(a_j)$  - дисперсии значений  $a_j$ , а  $\Delta^2(\theta_i)$  - "систематическая" дисперсия оценки  $\theta_i$ . В случаях малых  $m_{\vec{v}}$  для  $\beta_{ij}$  следует брать некое интерполированное значение.

Так, для  $m_{\vec{v}} \approx 2$  эВ и  $R = 20$  эВ оценка систематической погрешности  $\Delta(m_{\vec{v}})$  составляет 8-15 эВ при  $\Delta(R) \approx 2$  эВ,  $\Delta(w) \approx 2\%$

и  $\Delta(E_1^*) \approx 2$  эВ. Подобные оценки здесь и в других случаях оказываются близкими к предельной статистической точности оценок  $\theta_i$ , приводимой в последней графе таблицы /для  $N = 4 \cdot 10^5$ /. Увеличение статистики снизит теоретическую границу  $\sigma(\theta_i)$ , но не скажется на  $\Delta(\theta_i)$ , что очевидно из построения матрицы для  $\beta_{ij} /16/$ .

Таким образом, использование полной ковариационной матрицы является вполне работоспособным методом. В частности, с ее помощью можно подойти к определению систематических погрешностей получаемых оценок.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные выше результаты моделирования /см. также<sup>1/</sup> и рассмотрение полной ковариационной матрицы позволяют сделать следующие выводы, справедливые, вообще говоря, лишь для идеализированного тритиевого эксперимента. Представляется, однако, что они будут полезны и при анализе реальных экспериментов.

1. Оценки  $m_{\bar{\nu}}$  и  $T_0(E_0)$ , получаемые при задании параметров  $\alpha_j$  без ошибок, несмещены и сильно коррелированы. Последнее делает желательным указание экспериментальной ковариационной матрицы оценок и совместной доверительной области. Отметим, что с уменьшением  $m_{\bar{\nu}}$  предельные теоретические дисперсии оценок возрастают.

2. Наличие ошибок  $\Delta\alpha_j$  ведет к заметному смещению вектора оцениваемых параметров. Генерация /завышение оценки/ массы антинейтрино возникает, например, при завышении ширины приборной формы линии или степени ее асимметрии, а также при занижении вероятности распада на основное состояние.

3. Систематические погрешности вектора искомым параметров, обусловленные неточностями значений априорно задаваемых параметров, как правило, сравнимы с предельными теоретическими дисперсиями, а в ряде случаев могут превосходить их.

4. Для изучения влияния ошибок  $\Delta\alpha_j$  и оценки систематических погрешностей вектора  $\vec{\theta}$  удобно пользоваться полной ковариационной матрицей всех параметров. На наш взгляд, этот метод может оказаться полезным и в других случаях.

В заключение авторы выражают признательность Т.М.Болотской за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Покровский В.Н. и др. Сообщение ОИЯИ, Р6-85-405, Дубна, 1985.
2. Ватутин Д.А., Телевинова Т.М., Чистяков В.П. Вероятностные методы в физических исследованиях. М.: Наука, 1985.
3. Козик В.С. и др. ЯФ, 1980, т.32, с.301.  
Boris S. et al. Phys.Lett., 1985, v.159B, p.217.
4. Bergkvist K.E. Nucl.Phys., 1972, v.B39, p.317.
5. Simpson J.J. Phys.Rev., 1984, v.D30, p.1110.
6. Bennett C.L. Phys.Rev., 1985, v.C31, p.197.
7. Покровский В.Н. и др. Препринт ОИЯИ, Р6-86-134, Дубна, 1986.
8. Bergkvist K.E. Phys.Lett., 1985, v.154B, p.224.
9. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел  
10 июня 1987 года.



Покровский В.Н. и др.

Д6-87-403

Исследование свойств оценки массы антинейтрино  
в идеализированном тритиевом эксперименте

Рассматривается влияние ошибок в задании априорных параметров идеализированной модели тритиевого эксперимента на смещение вектора оценок искомых параметров /масса антинейтрино, граничная энергия спектра, отношение эффект/фон/. Результаты численного моделирования и рассмотрения полной ковариационной матрицы указывают на сильную коррелированность оценок и на возможность генерации массы антинейтрино, например, за счет завышения ширины приборной формы линии или степени ее асимметрии, а также при занижении вероятности распада на основное состояние. Обращается внимание на достоинства метода, основанного на рассмотрении полной ковариационной матрицы.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987

Pokrovskij V.N. et al.

06-87-403

Investigation of Antineutrino Mass Estimate  
Properties in Idealized Tritium Experiment

The paper deals with influence of errors in assignment of a priori parameters of the tritium experiment idealized model upon the bias of the estimate vector of searched-for parameters (antineutrino mass, spectrum end-point energy, effect-to-background ratio). Results of computer simulation and consideration of the total covariance matrix indicate at strong correlation of estimates and at possible generation of the antineutrino mass, e.g. owing to overestimation of the response function width or of its asymmetry degree as well as at underestimation of the probability of the decay into the ground state. Attention is paid to advantages of the method based on consideration of the covariance matrix.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987