

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



Д-796

3049 / 2-76

9 / VIII-76  
Д2 - 9789

М.С.Дубовиков, Б.З.Копелиович, Л.И.Лapidус,  
К.А.Тер-Мартirosян

ДИНАМИКА ФРУАССАРОНОВ  
В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

**1976**

Д2 - 9789

М.С.Дубовиков,<sup>1</sup> Б.З.Копелиович, Л.И.Лapidус,  
К.А.Тер-Мартirosян<sup>2</sup>

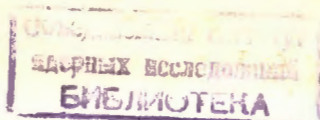
ДИНАМИКА ФРУАССАРОНОВ  
В ФИЗИКЕ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

Направлено в "Nuclear Physics"

---

<sup>1</sup> Московский физико-технический институт.

<sup>2</sup> Институт теоретической и экспериментальной  
физики, Москва.



Дубовиков М.С., Копелиович Б.З., Липидус Л.И.,  
Тер-Мартirosян К.А.

Д2 - 9789

Динамика фруассаронов в физике высоких энергий

Теория померона с  $\alpha(0) > 1$  позволяет получить хорошее описание экспериментальных данных при высоких энергиях о бинарных реакциях и процессах множественного рождения частиц. При сверхвысоких энергиях ( $\alpha(0) - 1$ )  $\ln s \gg 1$  форма теории полностью меняется. В рассеянии адронов доминирует вклад нового объекта - "фруассарона", представляющего собой поток померонов, эффективное число которых растет как  $(s/s_0)\alpha(0) - 1/\ln^2(s/s_0)$ . Полные сечения в асимптотике растут по фруассаровскому закону, а средняя множественность как  $(s/s_0)\alpha(0) - 1/\ln(s/s_0)$ . Просуммирована совокупность всех померонных графиков и получено уравнение для точной функции Грина. Решением этого уравнения может быть фруассарон. Вклад усиленных графиков эффективно уменьшает величину  $\alpha(0)$ . Благодаря этому происходит смена асимптотического режима.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

## 1. Введение

В теории померона с  $\alpha(0) = 1$  предсказывался<sup>/1,2/</sup> рост полных сечений взаимодействия адронов при высоких энергиях за счёт вымирания отрицательного вклада точек ветвления, связанных с обменом двумя и более померонами. В приближении эйконала или квазиэйконала скорость роста полного сечения  $\sigma_{tot}(s)$  можно связать с данными опыта о параметре наклона  $B(s)$  дифракционного конуса и о величине сечения дифракционной генерации частиц. Проведенные оценки<sup>/3/</sup> привели к значениям  $\sigma_{tot}$ , для которых скорость роста с энергией  $(d\sigma_{tot}(s)/ds)/\sigma_{tot}(s)$  оказалась близкой к 2-3%. Результаты экспериментов<sup>/4,5/</sup> показали, однако, что эта скорость больше (около 6-7%). Попытки устранить это несоответствие изменением формы реджевских вычетов не привели к успеху. Учет вклада усиленных графиков<sup>/6/</sup> ухудшил положение: оказалось<sup>/7/</sup>, что они замедляют рост  $\sigma_{tot}(s)$  в области достижимых на ускорителях энергий (за счет поправок к померонным вершинам).

В работах<sup>/8,9/</sup> для устранения этого несоответствия был введен полюс Померанчука со значением  $\alpha(0) = 1 + \Delta > 1$ . Противоречивый унитарности  $S$ -матрицы степенной энергетический рост полного сечения сокращается при учёте перерассеяний. Это было показано ранее Ченгом и Ву<sup>/10/</sup>, которые рассматривали схему с фиксированным полюсом при  $j = \alpha(t) \equiv 1 + \Delta$  в  $j$ -плоскости. Они использовали вычет вида  $\gamma(k_I^2) = \gamma_0 K_{3/2}(R_0 x) / x^{3/2}$ , где  $K_{3/2}(\tau)$  - функция Бесселя, а  $x = \sqrt{k_I^2 + k_0^2}$ . Эта модель позволила хорошо описать данные о полном и упругом сечениях рассеяния, однако вопросы множественного рождения и  $S$ -канальной унитарности остаются открытыми.

Важно, чтобы полюсу Померанчука можно было сопоставить лестничные диаграммы Фейнмана, т.е. полюс должен быть движущимся.

Представление о помероне в виде лестницы позволяет сохранить все достижения мультипериферической модели, а также установить связи между различными процессами, как например, между распределением рожденных частиц по множественности и вкладом точек ветвлений (перерассеяний) в амплитуду упругого рассеяния<sup>/II/</sup>.

Небольшой сдвиг в положении полюса Померанчука не вызовет радикальных изменений в теории в области доступных на ускорителях энергий. Появятся лишь малые поправки к амплитуде, позволяющие описать наблюдаемый на опыте рост полных сечений. Однако с увеличением энергии вклад полюса Померанчука в амплитуду рассеяния растет как  $(s/s_0)^{\Delta}$ , и при огромных энергиях, когда  $\ell_n (s/s_0)^{\Delta} \gg 1$ , вид теории полностью меняется. Вклад неусиленных ветвлений возрастает настолько, что величина каждого из них в отдельности противоречит  $s$ -канальной унитарности. Тем не менее, сумма по вкладам всех ветвлений знакопеременна, и в ней происходят значительные сокращения, в результате чего унитарность восстанавливается и полное сечение насыщает предел Фруассара

$\sigma_{tot}(s) \sim \ell_n^2(s/s_0)$ . Эффективная особенность, отвечающая такой сумме, сдвигается при  $t = 0$  в точку  $j = 1$ . Её вклад в амплитуду будем называть "фруассароном". В представлении прицельных параметров фруассарону при  $\ell_n(s/s_0)\Delta \gg 1$  соответствует диск постоянной прозрачности с радиусом, растущим как  $\ell_n(s/s_0)$ . На языке графиков фруассарон можно представить как результат обмена потоком померонов, эффективное число которых, как будет показано ниже, растет с энергией как  $(s/s_0)^{\Delta} / \ell_n^2(s/s_0)$ .

Необходимость учета в асимптотике вклада усиленных графиков вновь приводит к проблеме  $s$ -канальной унитарности. Этот вопрос рассматривали Борнзан<sup>/12/</sup> и Карди<sup>/13/</sup>. Карди заметил, что, произведя суммирование по числу померонов внутри усиленных графиков, их можно свести к последовательности графиков, построенных из фруассаронов. Если для фруассаронов использовать представление в форме диска с резким краем, то Карди показал, что взаимная экранировка усиленных фруассаронных графиков приводит к тому, что их вклад в амплитуду полностью сокращается. Однако, как будет видно ниже, более реалистичская форма фруассарона делает компенсации Карди неполными, и они не могут обеспечить унитарность в  $s$ -канале.

В настоящей работе рассмотрена схема с полюсом Померанчука, имеющим  $\alpha(0) > 1$ . Часть результатов, приведенных здесь,

опубликована ранее<sup>/I4, I5/</sup>. Изложение построено следующим образом. В разделе II изучается энергетическое поведение различных физических величин при учёте лишь неусиленных графиков. Мотивом для такого приближения является подавленность усиленных графиков в достигнутой на ускорителях области энергий из-за малости констант связи померонов. Получающиеся при этом результаты качественно не меняются при учёте усиленных графиков и в асимптотической области энергий. Приведены выражения для полного и неупругого сечений взаимодействия, для наклона дифракционного конуса. Показано, что благодаря тому, что  $\alpha(0) > 1$ , появляется возможность объяснения явления геометрического скейлинга (г.с.), наблюдаемого экспериментально в  $p$ - $p$ -рассеянии в области доступных энергий. При дальнейшем росте энергий частиц г.с. должен исчезнуть, но асимптотически появится вновь.

Подробно рассмотрены процессы множественной генерации частиц. Показано, что инклюзивный спектр имеет плато в центральной области, высота которого растёт с энергией степенным образом, нарушая фейнмановский скейлинг. Правило сумм, связанное с законом сохранения энергии, при этом не нарушается, так как интервал быстрой, в котором существует плато, составляет  $(1-2\Delta)\ell_n(s/s_0)$ . Средняя множественность также растёт с энергией по степенному закону.

В разделе III проведено суммирование усиленных графиков Грибова-Карди и рассмотрен вопрос об условии унитарности в  $s$ -канале. Показано, что процедура суммирования фруассаронных графиков, предложенная Карди, не обеспечивает выполнения требований  $s$ -канальной унитарности. Предложен способ классификации и суммирования графиков, который приводит к интегральному уравнению для точной функции Грина. Показано, что решение в виде фруассарона может удовлетворять этому уравнению. Тем самым снимается вопрос об унитарности в  $s$ -канале.

Поскольку значение  $\Delta_0$ , отвечающее точной функции Грина, меньше величины затравочного сдвига в положении померона, то вклад всех усиленных графиков сводится к перенормировке величины  $\Delta \rightarrow \Delta_0$ . Интересно, что это явление может сказаться при гораздо больших энергиях, чем те, при которых достигается асимптотический режим неусиленных графиков. В этой области сверхвысоких энергий произойдет смена асимптотического режима и рост се-

чений замедлится. Не исключена возможность того, что  $\Delta_0 \leq 0$ , и тогда новый режим поведения сечений будет не фруассаровским.

**II. Рост сечений, наклона дифракционного конуса и множественное рождение частиц в теории с  $\alpha(\sigma) > 1$**

В этом разделе мы не будем учитывать усиленных ветвлений. С одной стороны, их вклад, по-видимому, мал в области доступных энергий, а с другой стороны - добавление усиленных графиков, как будет показано дальше, лишь перенормирует величину  $\Delta$ , не меняя по форме полученных здесь результатов.

В дальнейшем удобно пользоваться представлением прицельных параметров. Парциальная амплитуда рассеяния

$f_{AB}(\xi, b) = 1 - e^{2i\delta_{AB}(\xi, b)}$  (функция профиля) определяет Фурье-образом амплитуды рассеяния частиц A и B:

$$f_{AB}(\xi, b) = \frac{2}{t} \int M_{AB}(\xi, k_1) e^{i\vec{k}_1 \vec{b}} \frac{d^2 k_1}{2\pi} \quad (I)$$

Здесь  $\xi = \ln(s/s_0)$ ,  $s_0 = 2M_n^2$ ;  $\vec{b}$  - прицельный параметр,  $\vec{k}_1$  - поперечный переданный импульс. Вклад померона

$M_{AB}^{(n)}$  в амплитуду рассеяния равен

$$M_{AB}^{(n)}(\xi, k_1) = N_1^A N_1^B \exp[\xi \Delta - (R^2 + \alpha' \xi) k_1^2], \quad (2)$$

где  $\xi_1 = \xi - i \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha(t) = 1 + \Delta - \alpha' k_1^2$  - траектория полюса Померанчука;  $N_1^A(k_1) N_1^B(k_1) = N_1^A N_1^B \exp(-R^2 k_1^2)$  - вычет померона. Предположение о экспоненциальной зависимости вычета от  $k_1^2$  и линейности вакуумной траектории существенно для дальнейшего. Это заведомо правильно в области малых  $k_1$ , т.е. больших  $b$ , которые и будут, в основном, рассмотрены дальше.

Вклад померона  $\rho(\xi, b)$  в амплитуду (I) имеет вид

$$\rho(\xi, b) = z \exp\left[-\frac{b^2}{4(R^2 + \alpha' \xi)}\right], \quad (3)$$

где

$$z = \frac{N_1^A N_1^B}{R^2 + \alpha' \xi} e^{\xi \Delta} \quad (4)$$

Здесь, для простоты, пренебрежено малой реальной частью померонной амплитуды. Из (3), (4) видно, что с увеличением  $\xi$  величина

$\rho(\xi, b)$  растет и может превысить единицу, нарушив условие унитарности. Однако с ростом сечений различных каналов реакции увеличивается их взаимная экранировка, что приводит к подавлению амплитуды. Это видно на примере суммы неусиленных графиков, изображенных на рис. I.

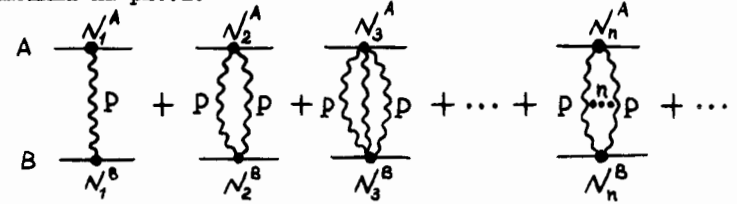


Рис. I.

Экранировка здесь проявляется в том, что этот ряд знакопеременный, и его суммарный вклад в  $f(\xi, b)$  есть

$$F(\xi, b) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} G_n^A G_n^B [\rho(\xi, b)]^n / n! \quad (5)$$

Здесь  $G_n^A = N_n^A / (N_1^A)^n$ ,  $G_n^B = N_n^B / (N_1^B)^n$ , где  $N_n^A$  и  $N_n^B$  - вершины испускания  $n$  померонов частицами A и B. Если  $b = \text{const}$ , а  $\xi \rightarrow \infty$ , то в (5)  $\rho(\xi, b) \sim e^{\Delta \xi}$  велико и каждый член в сумме растет с  $\xi$  в области  $\xi \Delta \gg 1$  быстрее предыдущего. Поэтому важны большие  $n \sim \rho \sim e^{\Delta \xi}$ . Принятой форме траектории полюса Померанчука и выражению (5) отвечает следующая плотность лагранжиана померонного поля  $^{13/}$ :

$$L = L_0 + L_1, \quad (6)$$

где

$$L_0 = \frac{i}{2} (\psi^+ \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^+) + \frac{\alpha'}{2} (\nabla \psi)(\nabla \psi^+) + \Delta \cdot \psi^+ \psi \quad (7)$$

$$L_1 = \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n^{A_i}}{n!} [A_i^+ \psi^n + (\psi^+)^n A_i], \quad (8)$$

а роль времени играет рапидити  $\xi$ . Первый член в (6)  $L_0$  - есть лагранжиан свободного поля с массой  $-\Delta$ . Второй член  $L_1$  описывает взаимодействие померонов с частицами  $A_i$ , которым отвечают источники  $A_i(\xi, b)$ .

Карди показал  $^{13/}$ , что при  $\Delta \xi \gg 1$  суммирование в (5)

может быть выполнено, если  $N_n^A, N_n^B$  допускают однозначное аналитическое продолжение на комплексные значения  $n$ , т.е. не имеют особенностей по  $j$  и не растут быстрее  $c^n$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $c$  — некая константа. В этом случае выражение (5) может быть переписано в виде интеграла Зоммерфельда-Ватсона:

$$F(\xi, b) = \int_1 \frac{dn}{2i} C_n^A G_n^B [\rho(\xi, b)]^n \Gamma(-n). \quad (9)$$

Здесь интегрирование ведется по вертикальному контуру в комплексной  $n$ -плоскости. Подынтегральное выражение в полуплоскости  $\text{Re } n < 1$  имеет единственную особенность — полюс при  $n=0$ . Вычет в нём равен  $N_0^A N_0^B$ . При  $\xi \rightarrow \infty$  в области  $b \ll 2\sqrt{\alpha'\Delta} \xi - \sqrt{\alpha'\Delta} \ln \xi$  величина  $\rho(\xi, b) \gg 1$ . Поэтому оставшийся интеграл по вертикальному контуру убывает как  $\rho^{-|\text{Re } n|}$  при смещении контура налево. В области  $b \gg 2\sqrt{\alpha'\Delta} \xi - \sqrt{\alpha'\Delta} \ln \xi$  величина  $\rho(\xi, b) \ll 1$  и  $F(\xi, b) \approx \rho(\xi, b) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Таким образом, при  $\Delta \xi \gg 1$  приближенно можно записать [13]:

$$F(\xi, b) \approx N_0^A N_0^B \theta(4\alpha'\Delta \xi^2 - b^2), \quad (10)$$

где пренебрежено малой поправкой порядка  $\ln \xi / \xi$  к радиусу.

Из (10) видно, что  $F(\xi, b) \leq 1$  при всех  $\xi, b$ , если  $N_0^A, N_0^B \leq 1$ , т.е. унитарность восстанавливается за счет экранировки. Заметим также, что в асимптотической формуле (10) имеет место факторизация [13]. В эйкональном приближении  $N_n^{A,B} = (N_1^{A,B})^n$  т.е.  $G_n^A = G_n^B = 1$ . При этом сумма (5) вычисляется при всех  $\xi$ :

$$F(\xi, b) = 1 - \exp\{-\rho(\xi, b)\}. \quad (11)$$

Более точным является приближение квазиэйконала [16]. Простейшей возможностью в этом случае является  $G_n^A = C_A^{n-1}$ ,  $G_n^B = C_B^{n-1}$ ,

где  $C_A C_B = C_{AB} > 1$  — коэффициент усиления, учитывающий вклад дифракционной диссоциации частиц А и В. При этом  $N_0^A = 1/C_A$ ,

$$N_0^B = 1/C_B.$$

Вклад в амплитуду рассеяния  $F(\xi, b)$  будем называть "фрауссароном", имея ввиду асимптотическое поведение полных сечений взаимодействия. Зависимость  $F(\xi, b)$  от  $b$  при  $\Delta \xi \gg 1$  показана на рис.2.

Видно, что профиль, отвечающий фрауссарону, соответствует

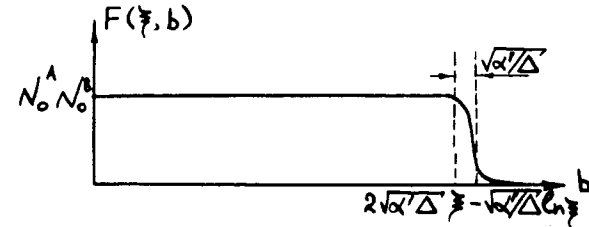


Рис. 2

рассеянию на диске с постоянной прозрачностью и радиусом, растущим как  $\xi$ . Край диска имеет размытие, ширину которого можно определить из поведения  $\rho(\xi, b)$  при  $b \sim 2\sqrt{\alpha'\Delta} \xi$  из (3) и (4)

$$\rho(\xi, b) \approx \frac{N_1^A N_1^B}{\alpha' \xi} e^{\frac{(2\sqrt{\alpha'\Delta} \xi - b)}{\sqrt{\alpha'\Delta}}}. \quad (12)$$

$V(\xi, k_1)$  — представления сумма (5) имеет хорошо известный вид:

$$M(\xi, k_1) = i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n \cdot n!} G_n^A G_n^B e^{-k_1^2 \left[ \frac{R^2 + \alpha'(\xi - i \frac{R}{\xi})}{n} \right]}. \quad (13)$$

Главное отличие от варианта с  $\alpha(0)=1$ , где  $z \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , состоит в том, что здесь  $z$  экспоненциально растет в асимптотике. При  $z \gg 1$  в (13) наиболее существенны значения  $n \sim z$ . Таким образом, фрауссарон можно представить как поток померонов, эффективное число которых растет с энергией как  $e^{\Delta \xi}$ .

Зная парциальную амплитуду рассеяния (11), нетрудно получить выражения для полного и неупругого сечений взаимодействия:

$$\sigma_{tot}(\xi) = \int 2 F(\xi, b) d^2 b = 8\pi(R^2 + \alpha' \xi) \Psi(z) \quad (14)$$

$$\sigma_{in}(\xi) = \int [2 F(\xi, b) - F^2(\xi, b)] d^2 b = 4\pi(R^2 + \alpha' \xi) \Psi(2z). \quad (15)$$

Здесь обозначено

$$\Psi(z) = \int_0^z (1 - e^{-\rho}) \frac{d\rho}{\rho} = C + \ln z - Ei(-z), \quad (16)$$

где  $C=0,5772..$  — постоянная Эйлера,  $Ei(-z)$  — интегральная показательная функция,  $Ei(-z) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ . Из (14)–(16) получаем для отношения упругого к полному сечений рассеяния

$$\frac{\sigma_{el}(\xi)}{\sigma_{tot}(\xi)} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\ln 2 + E_i(-z) - E_i(-2z)}{C + \ln z - E_i(-z)} \right], \quad (I7)$$

где  $\sigma_{el}(\xi) = \sigma_{tot}(\xi) - \sigma_{in}(\xi)$ . Из (I7) видно, что  $\sigma_{el} / \sigma_{tot}$  составляет  $\sim 1/5$  при  $z \approx 1$  и должно стать равным  $1/2$  при  $z \rightarrow \infty$ . В приближении квазиэikonала в выражениях (I4) и (I7) следует заменить  $z \rightarrow z \cdot C_{AB}$ , а сами выражения (I4) и (I7) поделить на  $C_{AB}$ . Из (I3) и (I4) находим величину отношения реальной и мнимой частей амплитуды рассеяния вперед  $\varepsilon(\xi)$

$$\varepsilon(\xi) = \frac{\pi}{2} \frac{d}{d\xi} \ln [\sigma_{tot}(\xi)] = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\alpha'}{R^2 + \alpha' \xi} + \frac{1}{\varphi(z)} \left( \Delta - \frac{\alpha'}{R^2 + \alpha' \xi} \right) (1 - e^{-z}) \right\}. \quad (I8)$$

Как будет показано ниже, в области доступных энергий  $\frac{\alpha'}{R^2 + \alpha' \xi} \approx \Delta$ . Поэтому второй член в (I8) здесь мал и  $\varepsilon(\xi) \approx \frac{\pi}{2} \Delta$  обусловлен, в основном, вкладом одного померона (и, разумеется, реджеонов  $R \neq P$  при не слишком высоких энергиях).

Пользуясь (9), получим выражение для параметра наклона дифракционного конуса  $B(\xi)$  (определяемого так, что при малых  $t$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} e^{B(\xi)t} \\ B(\xi) = 2(R^2 + \alpha' \xi) \chi(z), \quad (I9)$$

где

$$\chi(z) = \varphi^{-1}(z) \int_0^z \varphi(x) \frac{dx}{x}. \quad (20)$$

Рассмотрим выражения (I4)-(20) при доступных и асимптотических энергиях. Заметим, прежде всего, что анализ экспериментальных данных о  $p$ - $p$ -рассеянии в области энергий ускорителей  $FNAL - ISR$  ( $\xi \approx 5 \div 8$ ) показал, что для  $p$ - $p$ -взаимодействия имеет место геометрический скейлинг (г.с.)<sup>17,18/</sup>. Требования г.с. приводят к тому, что парциальная амплитуда рассеяния должна зависеть от одной переменной

$$f(\xi, b) = f(b^2 / V(\xi)). \quad (21)$$

Вклад фруассарона (II) в парциальную амплитуду с учётом (3) и (I9) будет удовлетворять г.с. в форме (21) при условии, что  $z$  не зависит от  $\xi$ <sup>\*</sup>. Это требование может быть выполнено только при-

лиженно, если специальным подбором параметров добиться того, чтобы в указанной области энергий при некотором значении  $\xi = \xi_0$  имело место равенство  $d z / d \xi \Big|_{\xi = \xi_0} = 0$ . Отсюда и из (4) получаем

$$\Delta = (\xi_0 + R^2 / \alpha')^{-1}. \quad (22)$$

Используя известные экспериментальные данные о росте полного сечения и наклона дифракционного конуса упругого  $p$ - $p$ -рассеяния, можно просто, не делая детального статистического анализа, оценить значения параметров  $\Delta$ ,  $\alpha'$ ,  $R^2$ . Из (22) и (I4) видно, что при  $z \approx \text{const}$  скорость роста полного сечения равна

$$\frac{d}{d\xi} \ln \sigma_{tot}(\xi) = \Delta. \quad (23)$$

Как отмечалось во введении, эксперимент даёт для левой части (23) значение около 6%. Таким образом,

$$\Delta \approx 0,06. \quad (24)$$

Далее, поскольку в доступной области энергии в (I9)  $\chi(z) \approx 1$ , а  $B(\xi_0) \approx 10(\text{ГэВ}/c)^{-2}$ , из (22)-(24) находим

$$\alpha' \approx \frac{B(\xi_0)}{2} \Delta \approx 0,3 (\text{ГэВ}/c)^{-2}. \quad (25)$$

Наконец, положив  $\xi_0 = 6$ , имеем

$$R^2 \approx \frac{B(\xi_0)}{2} - \alpha' \xi_0 \approx 3,2(\text{ГэВ}/c)^{-2}. \quad (26)$$

Найденные таким образом значения параметров (24)-(26) близки к полученным К.Г.Боресковым, П.Е.Волковицким, А.М.Липидус и одним из авторов (К.А.Т-М) в результате детального анализа экспериментальных данных. Приведенные значения параметров близки также к найденным ранее в <sup>18/</sup> и не совпадают с результатами <sup>9/</sup>.

Заметим, что в  $\pi$ - $p$ -и  $K$ - $p$ -упругом рассеянии при тех же энергиях  $B(\xi) \approx 8 (\text{ГэВ}/c)^{-2}$ . Поэтому значение  $R^2 \approx 2,2 (\text{ГэВ}/c)^{-2}$

<sup>\*</sup> зависимости  $\chi_1(k_1^2)$  от  $k_1^2$ , что правильно при малых значениях  $k_1^2$ , т.е. при больших  $b$ . В области  $k_1^2 \geq 1 (\text{ГэВ}/c)^2$ , т.е. при малых  $b$ , экспоненциальная форма вычета, по-видимому, противоречит экспериментальным данным, однако точность, с которой данные указывают на Г.С. при больших значениях  $k_1^2$ , пока что весьма низкая <sup>18/</sup>.

<sup>\*</sup> Выражение (3) получено в предположении об экспоненциальной (продолжение сноски смотри на след. странице)

меньше, чем в p-p-рассеянии. По этой причине г.с. в этих процессах, как видно из (18), наступит при гораздо больших энергиях

$$\xi_0^{pp} = \frac{1}{\Delta} - \frac{R_{\pi p}^2}{\alpha'} \approx 9. \quad (27)$$

Таким образом, в современной области энергии  $\xi^{pp} \approx \text{const}$ , сечения и наклон растут линейно с  $\xi$ , так, что отношения  $\sigma_{tot}(\xi)/B(\xi)$ ,  $\sigma_{el}(\xi)/B(\xi)$ ,  $\sigma_{el}(\xi)/\sigma_{tot}(\xi)$  остаются постоянными. При больших энергиях  $\xi$  начнёт расти, и явление г.с. исчезнет. В области еще более высоких энергий  $\xi \Delta \gg 1$  сечения и наклон выйдут на универсальный режим:

$$\sigma_{tot}(\xi) = 8\pi \alpha' \Delta \xi^2 = 8\pi B(\xi) = 2 \sigma_{el}(\xi). \quad (28)$$

Интересно, что при этих энергиях г.с. появится опять и будет уже точным. Это соответствует общему результату, полученному в /19/.

На рис.3 приведен график зависимости  $\sigma_{tot}^{pp}(\xi)$ , вычисленный по (14). Видно, что при энергии  $s \approx 10^9 \text{ ГэВ}^2$ , где имеются данные из области космических лучей,  $\sigma_{tot}^{pp}$  достигает величины  $\sim 100$  мбн. Авторы работы /20/ сравнили это значение с тем, которое получается при пересчете неупругого сечения взаимодействия протонов с ядрами воздуха (среднее  $\bar{A} = 14,4$ ) на один нуклон и пришли к выводу, что быстрый рост вида (14) противоречит экспериментальным данным. Следует, однако, заметить, что глауберовская модель, в которой проводился расчет, не справедлива при столь высоких энергиях /21/, так как поперечный размер партонного облака вырастает настолько, что становится сравнимым с размерами ядра. При этом нуклоны ядра, партонные облака которых оказываются перекрытыми, нельзя уже рассматривать как отдельные центры рассеяния. При огромных энергиях, когда радиус фруассарона превысит размер ядра, эффективное число нуклонов в ядре станет равным единице и  $\sigma_{tot}^{PA} \approx \sigma_{tot}^{pp}$ . Это видно также из этого, что асимптотическое значение  $\sigma_{tot}$  из (28) не зависит от сорта взаимодействующих частиц. В модели Глаубера  $\sigma_{tot}^{PA} \approx A^{2/3} \sigma_{tot}^{pp}$  даже при  $\sigma_{tot}^{pp} \rightarrow \infty$ .

2. Перейдем к реакциям множественного образования частиц.

Рассмотрим инклюзивный спектр рождения частиц в центральной области. Согласно теореме Абрамовского, Грибова, Канчеля /II/ (АГК), из всей совокупности неусиленных графиков на рис.1 только разрезание полюсного графика на рис.4 даёт вклад в  $d\sigma/dy$ .

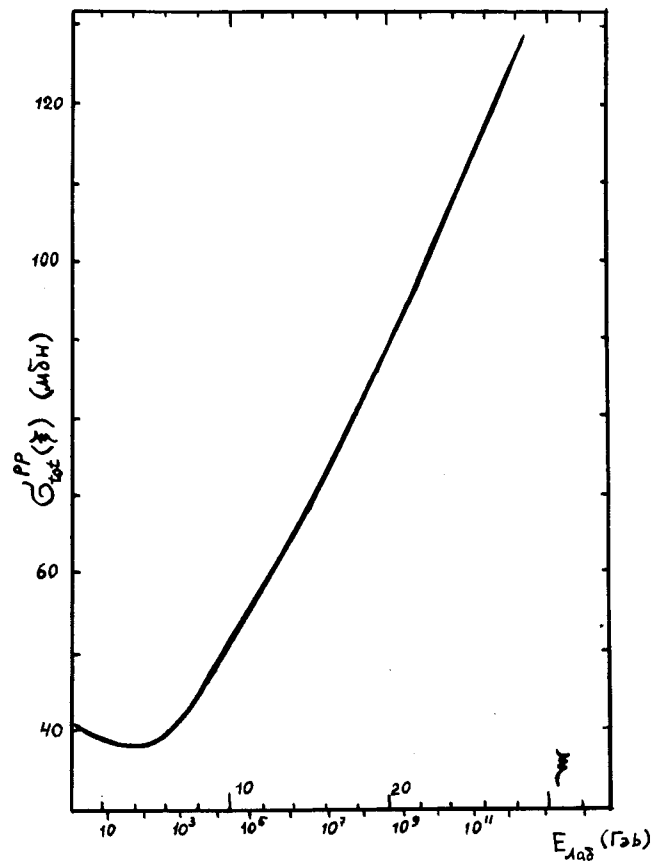


Рис. 3. Энергетическая зависимость полного сечения pp - рассеяния, вычисленная по формуле (14).



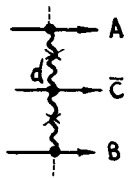


Рис.4

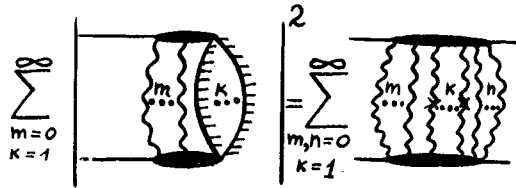


Рис.5

Этому графику соответствует при  $\alpha(0)=1+\Delta$  инклюзивное сечение, степенным образом растущее с энергией <sup>/II/</sup>:

$$\frac{dG}{dy} = 8\pi N_1^A N_1^B d e^{\Delta \xi} \quad (29)$$

Вершина  $d$  обозначена на рис.4. Из (29) видно, что в центральной области инклюзивный спектр имеет плато и фейнмановский скейлинг нарушается.

Ранее обращалось внимание <sup>/II/</sup> на то, что инклюзивное сечение в форме (29) противоречит правилу сумм, отражающему закон сохранения энергии:

$$\frac{1}{G_{in}} \int_0^{\xi/2} e^y \frac{dG}{dy} dy < e^{\xi/2} \quad (30)$$

(здесь и далее используется с.ц.и.). Если верхний предел интегрирования в (30) выбрать достаточно близко к краю спектра:

$1-2\Delta < \alpha < 1$ , то неравенство (30) действительно оказывается нарушенным. Разрешение этого парадокса заключается в том, что выражение (29) справедливо не во всей центральной области. На краях спектра график Канчели-Мюллера (рис.4) неправильно передает вклад в инклюзивное сечение суммы графиков на рис. 5.

Действительно, в тех графиках, в которых разрезано  $k$  померонов, полная энергия делится между этими померонами в среднем поровну. Поэтому на каждый разрезанный померон приходится интервал быстрой  $\xi - 2 \ln k$ . Найдем  $\langle k \rangle$  - среднее число разрезанных на рис.5 померонов. Сечение  $S_k$  рождения  $k$  разрезанных померонов равно <sup>/22/</sup>

$$S_k = \frac{4\pi(R^2 + \alpha^2 \xi)}{k} e^{-2z} \sum_{m \geq k} \frac{(2z)^m}{m!} = 4\pi(R^2 + \alpha^2 \xi) \frac{\gamma(k, 2z)}{k!}, \quad (31)$$

где  $\gamma(k, 2z) = \int_0^{2z} e^{-x} x^{k-1} dx$  - неполная  $\Gamma$ -функция. Отсюда найдем  $\langle k \rangle$ :

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k S_k / G_{in} = \frac{2z}{P(2z)} \approx \frac{2N_1^A N_1^B}{\alpha^2 \Delta} \frac{e^{\Delta \xi}}{\xi^2} \quad (32)$$

Таким образом, интервал быстрой, в котором могут находиться частицы каждого из  $k$  разрезанных померонов, равен  $\xi - 2 \ln \langle k \rangle = \xi (1 - 2\Delta)$ . Поэтому инклюзивное сечение может быть записано в форме (29) не во всей области  $|y| < \xi/2$ , а только для  $|y| < \xi(1/2 - \Delta)$ . В этом случае в (30)  $\alpha = 1 - 2\Delta$ , и неравенство выполнено.

Исследуем теперь форму инклюзивного спектра вблизи его границы, т.е. при  $|y| \geq \xi(1/2 - \Delta)$ . Закон сохранения энергии допускает рождение померонных ливней длиной  $2|y|$ , каждый в количестве

$$k_0(y) = \exp[(\xi - 2|y|)/2]. \quad (33)$$

Отсюда, с учетом (31) и (32), можно вычислить  $\langle k(y) \rangle$  - среднее количество ливней длиной  $2|y|$  и более:

$$\langle k(y) \rangle = \frac{1}{G_{in}} \sum_{k=1}^{k_0(y)} k S_k = \frac{2z}{P(2z)} e^{-2z} \left\{ \sum_{m=1}^{k_0(y)} \frac{(2z)^{m-1}}{(m-1)!} + \sum_{m=k_0(y)+1}^{\infty} \frac{k_0(y)}{m!} (2z)^{m-1} \right\}. \quad (34)$$

Заметим, что стоящие в фигурных скобках суммы обладают следующим свойством: если  $(k_0(y) - 2z) \gg 2z$ , то вкладом второй суммы можно пренебречь, а первая сумма равна  $e^{2z}$ . Если же  $(2z - k_0(y)) \gg 2z$ , то вклад даёт только вторая сумма, которая в этом случае равна  $k_0(y)/2z \cdot e^{2z}$ . С учетом этого обстоятельства из (33) и (34) видим, что формула (29) для инклюзивного спектра верна при  $|y| < y_0 - \delta y_0$ , где

$$y_0 = \xi/2 - \ln(2z) \quad (35)$$

$$\delta y_0 = (2z)^{-1/2}. \quad (36)$$

В области  $|y| > y_0 + \delta y_0$  инклюзивное сечение (29) приобретает дополнительный фактор  $\exp(y_0 - |y|)$ . Область размером  $\sim 2 \delta y_0$ , в которой две кривые переходят друг в друга, сужается с ростом  $\xi$ , что видно из (36). Асимптотически форма спектра характеризуется изломом при  $y = y_0$ . Описанный вид

инклюзивного спектра схематически показан на рис.6

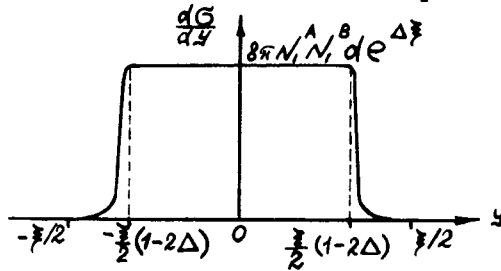


Рис.6.

Зная инклюзивное сечение, можно вычислить  $\langle n \rangle$  - среднюю множественность рожденных частиц

$$\langle n \rangle = (c + d\xi) \frac{2\xi}{\rho(2\xi)} \approx \frac{2dN_A^A N_B^B e^{\Delta\xi}}{\alpha' \Delta \xi} \quad (37)$$

Таким образом, в области максимально-высоких энергий, достигнутых на ускорителях инклюзивное сечение в центральной области должно иметь плато, высота которого растет согласно (29) как  $\exp(\Delta\xi)$ , нарушая фейнмановский скейлинг. Тем не менее, средняя множественность (37) не получает заметных отклонений от обычной линейной  $\xi$ -зависимости, поскольку подъем плато компенсируется ростом неупругого сечения  $\sigma_{in}(\xi)$ . При дальнейшем увеличении энергии  $\langle n \rangle$  начинает расти быстрее, что видно из рис. 7.

Заметим, что описанная здесь картина поведения инклюзивных спектров при современных энергиях сильно нарушена вкладом вторичных реджеонов. Если считать, что поправками от реджеонов в  $\sigma_{tot}$  можно пренебречь, начиная с  $\xi \geq 5$ , то в центре инклюзивного спектра их вклад вымирает лишь при  $\xi \geq 10$ , что видно из диаграммы Канчели-Миллера на рис.4. Эффект сужения спектра проявится в полной мере при  $\Delta\xi \geq 1$ , т.е. при  $\xi \geq 16$ . Эксперименты в этой области энергий станут возможными на ускорителях лишь в будущем.

Обсудим кратко вопрос о распределении сечений  $\sigma_n$  по числу рожденных частиц. При достижимых энергиях экспериментальные данные подтверждают существование КНО - скейлинга [23], т.е. того, что

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{in}}{\langle n \rangle} \Psi\left(\frac{n}{\langle n \rangle}\right),$$

где  $\Psi(x)$  - функция, не зависящая от энергии. Если пренебречь

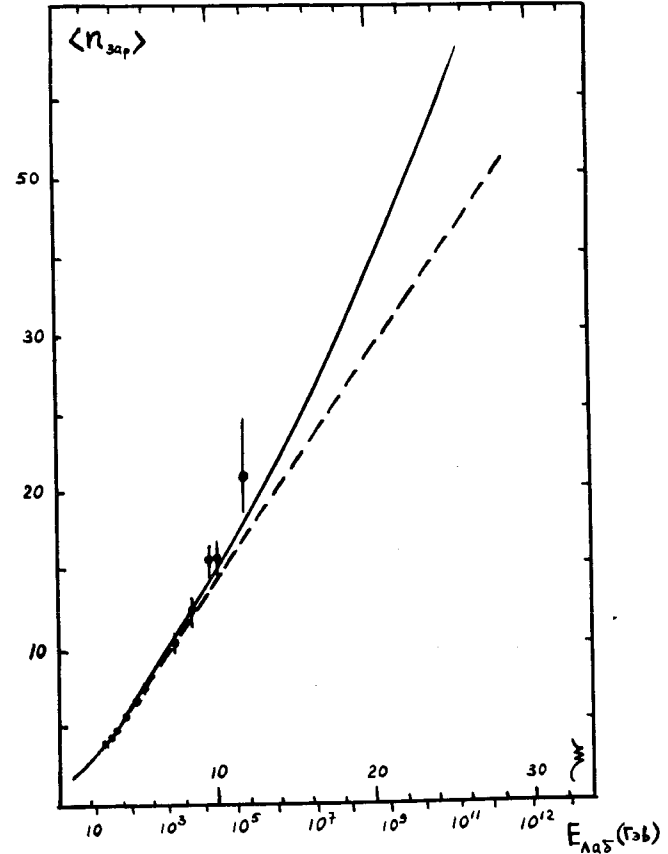


Рис. 7. Энергетическая зависимость средней множественности заряженных частиц в pp-соударении.  
 —  $\langle n \rangle$ , вычисленное по формуле (37);  
 - - - кривая из работы [22], отвечающая  $\alpha(0) = 1$ .

тем, что полная энергия делится между рожденными ливнями и считать, что в каждом из них содержится  $a \bar{\xi}$  частиц, то из (31) для  $\langle n^l \rangle$  получим<sup>/15/</sup>

$$\langle n^l \rangle = (a \bar{\xi})^l \Phi_e(2z); \quad (38)$$

где

$$\Phi_e(2z) = \frac{1}{G_{in}} \sum_{k=1}^{\infty} k^l S_k.$$

Отсюда видно, что, если в рассматриваемой области  $z \approx \text{const}$ , то величина  $M_e = \langle n^l \rangle / \langle n \rangle^l$  не зависит от энергии. Этот же вывод следует из КНО - скейлинга, причем  $M_e = \int_0^1 x^l \psi(x) dx$ . Это наводит на мысль, что рассмотренная схема приводит к КНО - скейлингу в области энергий, где  $z \approx \text{const}$ . Вычисления распределения по множественности  $G_n$ , проведенное Д.Шабельским и одним из авторов (К.А.Т-М) (см. также /22/) с учётом пуассоновского распределения по числу частиц в гребенках, а также деления полной энергии между гребенками, приводят к хорошему согласию с опытом в широкой области энергий, демонстрируя, таким образом, наличие КНО - скейлинга. За счет вклада процессов одновременного рождения нескольких гребёнок распределение по множественности  $G_n$  сильно расширяется с ростом энергии. При переходе к очень большим энергиям в этих распределениях формируется ряд максимумов<sup>/11/</sup>, обусловленных вкладом дифракционного рождения частиц, а также одной и большего числа разрезанных гребёнок. В теории с  $\alpha(0) > 1$  сечение дифракционного рождения растёт как  $\bar{\xi}^2$ . Поэтому узкий дифракционный максимум в  $G_n$  в области при высоких энергиях становится очень заметным. Картина с широким распределением по множественности, имеющим ряд максимумов, которая должна возникнуть при очень высоких энергиях ( $E \geq 10^8$  ГэВ) резко нарушает КНО - скейлинг.

### III. Усиленные диаграммы

I. Суммирование графиков Грибова-Карди.<sup>/6,13/</sup> Следующим шагом является учет взаимодействия померонов. Простейшие графики, содержащие одну вершину взаимодействия, показаны на рис. 8а) и 9а)

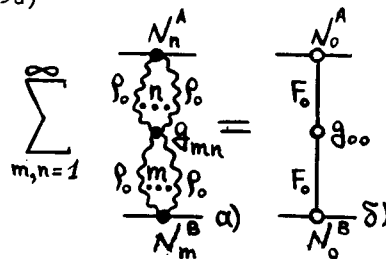


рис. 8

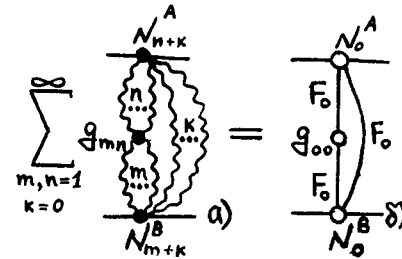


рис. 9

Если вершины  $G_{mn}$  перехода  $m$  померонов в  $n$  имеют эйкональный вид  $G_{mn} = G_{00} G_1^{m+n}$  или допускают однозначное аналитическое продолжение по  $m$  и  $n$ , то суммы графиков на рис. 8а и 9а можно заменить на фруассаронные графики, показанные на рис. 8б и 9б. Действуя таким образом, можно заменить суммирование усиленных померонных графиков суммой фруассаронных графиков.<sup>/13/</sup>

Необходимо заметить, что суммирование на рис. 8а и 9а включает значения  $m = n = 1$ , т.е. график с вершиной  $G_{11}$  перехода померона самого в себя. Его вклад, однако, уже учтен в лагранжиане  $L_0$  (7), поскольку  $G_{11} \psi^+ \psi$  имеет вид массового члена. Тем не менее, можно перейти к суммированию фруассаронных графиков, т.е. использовать лагранжиан вида:<sup>/13/</sup>

$$L_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_{mn}}{m!n!} (\psi^+)^m \psi^n, \quad (39)$$

если переопределить  $L'_0 = L_0 - G_{11} \psi^+ \psi$ , т.е. в (7) произвести замену  $\Delta \rightarrow \Delta_0$ , где

$$\Delta_0 = \Delta - G_{11}. \quad (40)$$

Выделение из  $L_0$  члена  $G_{11} \psi^+ \psi$  и включение его в  $L_2$  не может, конечно, повлиять на физические результаты, поскольку процедура суммирования померонных графиков аддитивна. Поскольку фруассароны на рис. 8б и 9б отличаются от (4) величиной  $\Delta$ , то

они обозначены символом  $F_0$ , а помероны на рис. 8а и 9а - через  $\rho_0$ .

В области доступных сейчас энергий частиц вклад усиленных графиков невелик из-за малости вершин  $g_{mn}$ . В асимптотике учет этих графиков становится необходимым, т.к. их вклад растет с энергией так быстро, что каждый их них в отдельности нарушает унитарность. Так, графику на рис. 8б в  $(\omega, k_1)$  - представлении при  $k_1 = 0$  отвечает особенность  $\sim \omega^{-6}$ . Поэтому его вклад в полное сечение растет как  $\xi^5$ . Проблема s-канальной унитарности для усиленных графиков рассматривалась Карди [13]. Им было показано, что в приближении (10) вклады диаграмм на рис. 8б и 9б полностью сокращаются, так как их суммарный вклад равен вкладу графика на рис. 8б, умноженному на

$$1 - \theta(a_0^2 \xi^2 - b^2), \quad (41)$$

где

$$a_0^2 = 4\alpha'\Delta. \quad (42)$$

Карди пришел к заключению, что аналогичным образом должны скомпенсироваться любые усиленные фруассаронные графики, которые отличаются друг от друга "параллельным" включением фруассарона  $F_0$ . Благодаря этому остается всего один неусиленный график  $F_0$ , и тем самым решается проблема s-канальной унитарности.

Однако, как показано ниже, указанные компенсации, имеющие место при приближенном представлении фруассарона  $\vartheta$ -функцией, не сохраняются при более точном рассмотрении. Во-первых, учет размытия на краю диска фруассарона приводит к тому, что унитарность нарушается при процедуре Карди на каждом этапе суммирования. Действительно, рассмотрим вклад графика на рис. 8б в парциальную амплитуду при

$$b = 2\sqrt{\alpha'\Delta} \xi - \sqrt{\alpha'\Delta} \ln \xi. \quad (43)$$

Пусть  $b$  и  $y$  - прицельный параметр и быстрота, соответствующие вершине  $g_{00}$ . Если выбрать параметр  $b, \approx a_0 y$ , то, согласно (3), (4) и (9),  $F_0(y, b, ) \sim 1/y$ . При этом второй фруассарон, из которого построен график на рис. 8б, дает вклад  $F_0(\xi - y, |b - \bar{b}, |) \sim \text{Const}$ , если  $b,$  меняется в пределах области перекрытия двух дисков. Площадь этой области  $\sim \sqrt{\xi}$ . Поэтому интегрирование по  $b,$  и  $y$  приведет к тому, что вклад

диаграммы на рис. 8б будет расти как  $\sqrt{\xi}$  на расстояниях порядка (43). Частичная компенсация, происходящая при добавлении графика на рис. 9б, не меняет результата, поскольку при условии (43)  $I - F_0(\xi, b) \sim \text{Const}$ . Итак, уже для простейших фруассаронных графиков компенсация Карди не обеспечивает s-канальной унитарности.

Вторая причина, из-за которой нельзя ограничиваться приближением (10) для  $F_0(\xi, b)$ , более существенна. Небольшое отличие  $F_0(\xi, b)$  от единицы при  $b < a_0 \xi$  может привести к нарушению унитарности в окончательном ответе. В самом деле, рассмотрим какой-либо неприводимый по s-каналу график, которому соответствует функция Грина  $G(\xi, b)$ . Здесь и ниже неприводимыми по s-каналу будем называть диаграммы, которые нельзя разделить вертикальной линией, не пересекая при этом померонных линий или вершин  $g_{00}$ . Ясно, что наряду с рассматриваемым графиком существуют также диаграммы, в которых  $G(\xi, b)$  повторяется в s-канале. Сумму всех таких итераций графика  $G(\xi, b)$  обозначим через  $E\{G(\xi, b)\}$ . Например, в s-канальной модели сумма всех этих графиков равна

$$E\{G(\xi, b)\} = 1 - \exp\{-G(\xi, b)\}. \quad (44)$$

Если найдется такой график, что  $G(\xi, b) < 0$  и по модулю экспоненциально велико (ниже мы увидим, что именно таким свойством обладает график  $C(\xi, b)$  на рис. 8), то следует учесть, что функция (41) - несобственная (асимптотическая) и что необходимо правильно перейти к пределу. В самом деле, при "параллельном" включении фруассарона  $F_0(\xi, b)$  суммарный вклад получается умножением выражения (44) не на (41), а на функцию

$$\exp\{-\rho_0(\xi, b)\}, \quad (45)$$

пределом которой является (41). Таким образом, если  $G(\xi, b) < 0$  и  $|G(\xi, b)| > \rho_0(\xi, b)$ , то унитарность нарушается.

Ясно, что для исследования вопроса об s-канальной унитарности при асимптотических энергиях необходимо просуммировать все графики. Эта задача решена в [14].

Амплитуда упругого рассеяния, представленная графически на рис. 10, получается итерацией в s-канале  $G_0(\xi, b)$ -совокупности всех неприводимых по s-каналу графиков, определение которых дано выше. Результат итерации запишем в виде

$$f_{AB}(\xi, b) = N_0^A N_0^B f(\xi, b) \quad (46)$$

$$f(\xi, b) = E \{ G_0(\xi, b) \}.$$

Очевидно, что (46) удовлетворяет условию унитарности лишь в случае, когда  $G_0(\xi, b)$  неотрицательна при всех значениях  $b$  и  $\xi$ . В этом легко убедиться в эйкональном приближении, когда  $f(\xi, b)$  равно (44).

Для того, чтобы исследовать вопрос об унитарности при учете усиленных графиков, получим уравнение для амплитуды  $f(\xi, b)$ . Для этого выделим в  $G_0(\xi, b)$  функцию померона  $f_0(\xi, b)$ , а оставшиеся графики разделим на две группы  $\mathcal{C}(\xi, b)$  и  $\mathcal{D}(\xi, b)$ , как показано на рис. II

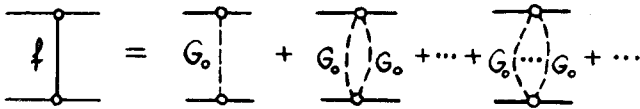


рис. IO

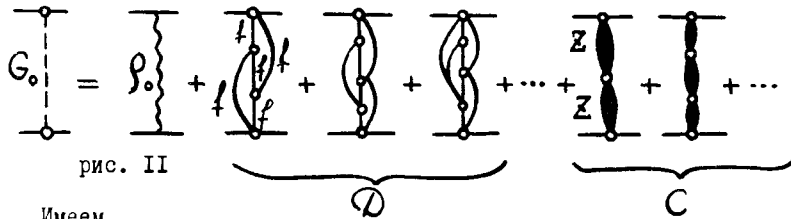


рис. II

Имеем

$$G_0(\xi, b) = f_0(\xi, b) + \mathcal{D}(\xi, b) + \mathcal{C}(\xi, b). \quad (47)$$

Группа  $\mathcal{D}$  содержит графики, неприводимые не только в  $s$ -канале, но и в  $t$ -канале. Эти графики нельзя разделить горизонтальной линией, пересекающей только вершины взаимодействия померонов. Ясно, что производя суммирование и упрощения внутри этих графиков, можно свести группу  $\mathcal{D}$  к совокупности графиков Гривова [6], построенных из точных функций Грина  $f(\xi, b)$  (44) и вершин  $g_{00}$ , причем из каждой вершины исходит не менее трех линий  $f(\xi, b)$ . Простейшие графики группы  $\mathcal{D}$  приведены на рис. II.

Графики группы  $\mathcal{C}$  имеют вид  $t$ -канальных цепочек с количеством звеньев не меньше двух. Звено цепочки  $\Sigma$  представляет собой совокупность диаграмм, которые нельзя разделить горизонтальной линией, проходящей только через вершины взаимодействия померонов. В то же время, в отличие от графиков группы  $\mathcal{D}$ , на диаграммы, входящие в  $\Sigma$ , очевидно, не накладывается требование неприводимости в  $s$ -канале. Из сказанного следует, что

$$\Sigma(\xi, b) = f(\xi, b) - C(\xi, b). \quad (48)$$

Если перейти от  $(\xi, b)$  к  $(\omega, k_1)$ -представлению, то  $C(\omega, k_1)$  можно связать с  $Z(\omega, k_1)$ :

$$C(\omega, k_1) = \Sigma(\omega, k_1) \sum_{n=1}^{\infty} [g_{00} \Sigma(\omega, k_1)]^n = \frac{g_{00} \Sigma^2(\omega, k_1)}{1 - g_{00} \Sigma(\omega, k_1)}. \quad (49)$$

Решая (48) и (49) относительно  $C(\omega, k_1)$ , имеем

$$C(\omega, k_1) = \frac{g_{00} f^2(\omega, k_1)}{1 + g_{00} f(\omega, k_1)}. \quad (50)$$

Выражению (50) можно сопоставить знакопеременную сумму графиков, изображенных на рис. I2:

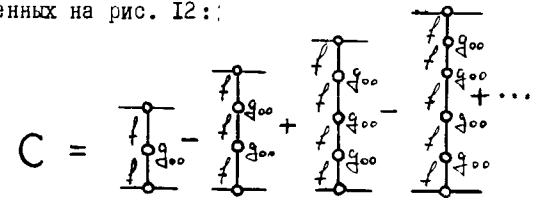


Рис. I2

Таким образом, правую часть (46) можно выразить через  $f(\xi, b)$ , т.е. (46) является интегральным уравнением для  $f(\xi, b)$ . В качестве возможного решения рассмотрим фруассарон (IO) с заменой  $\Delta$  на  $\Delta_0$ .

$$f(\xi, b) = F_0(\xi, b) \approx \theta(a_0^2 \xi^2 - b^2). \quad (51)$$

Подстановка (51) в графики группы  $\mathcal{D}(\varphi)$  приводит к тому, что все эти графики сокращаются, за исключением самого простого с двумя вершинами  $g_{00}$ . Это следует из существования упомянутых выше компенсаций Карди. Пример такого сокращения для графиков с тремя вершинами  $g_{00}$  приведен на рис. 13.

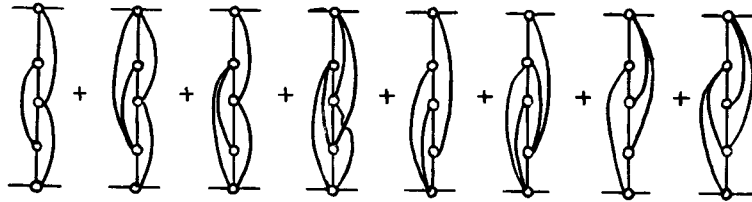


рис. 13

Видно, что, если эти графики последовательно разбить на пары, то в каждой паре они дают вклады одной величины, но с разными знаками. Оставшийся в группе  $\mathcal{D}$  единственный график дает положительный вклад при  $b < a_0 \xi$  и равен нулю при  $b > a_0 \xi$ .

Рассмотрение группы  $\mathcal{C}$  несколько сложнее. При  $b > a_0 \xi$  вклад каждого графика класса  $\mathcal{C}$  на рис. 12, а следовательно и всей суммы, равен нулю. Поэтому рассмотрим область  $b < a_0 \xi$  и перейдем в  $(\omega, \kappa_1)$ -представление. Перепишем (50) в виде

$$C(\omega, \kappa_1) = f(\omega, \kappa_1) - [f^{-1}(\omega, \kappa_1) + g_{00}]^{-1}. \quad (52)$$

Фруассарону (51) в  $(\omega, \kappa_1)$  представлении соответствует /II/

$$F_0(\omega, \kappa_1) = \frac{a_0^2}{(\omega^2 + a_0^2 \kappa_1^2)^{3/2} \Gamma}. \quad (53)$$

Первый член в правой части (52) положителен. Рассмотрим только второй член. Подстановка в него (53) дает

$$C(\omega, \kappa_1) - f(\omega, \kappa_1) = - \frac{a_0^2}{(\omega^2 + a_0^2 \kappa_1^2)^{3/2} + \tilde{g}_{00}}, \quad (54)$$

где  $\tilde{g}_{00} = a_0^2 g_{00}$ . Выражение (54) при  $g_{00} > 0$  имеет в правой  $\omega$ -полуплоскости два полюса

$$\omega_{1,2} = [\eta_{1,2} \tilde{g}_{00}^{2/3} (\kappa_1^2) - a_0^2 \kappa_1^2]^{1/2}, \quad (55)$$

$$\eta_{1,2} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}.$$

При  $g_{00} < 0$  существует один полюс с  $\text{Re} \omega > 0$

$$\omega_1 = [|\tilde{g}_{00}(\kappa_1^2)|^{2/3} - a_0^2 \kappa_1^2]^{1/2}. \quad (56)$$

При  $\xi \rightarrow \infty$  полюсный член дает основной вклад в  $C(\xi, \kappa_1)$ , так что при  $g_{00} > 0$

$$C(\xi, \kappa_1) \approx -\frac{2}{3} \text{Re} \frac{a_0^2 \exp\{(\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2)^{1/2} \xi\}}{\tilde{g}_{00}^{1/3} \eta_1 (\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2)^{1/2}}, \quad (57)$$

а при  $g_{00} < 0$

$$C(\xi, \kappa_1) \approx -\frac{1}{3} \frac{a_0^2 \exp\{(|\tilde{g}_{00}|^{2/3} - a_0^2 \kappa_1^2)^{1/2} \xi\}}{|\tilde{g}_{00}|^{1/3} (|\tilde{g}_{00}|^{2/3} - a_0^2 \kappa_1^2)^{1/2}}. \quad (58)$$

Величина  $C(\xi, b)$  получается из (56) и (57) с помощью преобразования Фурье

$$C(\xi, b) = \frac{1}{2\pi} \int C(\xi, \kappa_1) e^{-i b \kappa_1} d^2 \kappa_1. \quad (59)$$

Вычисление этого интеграла выполнено в приложении I методом перевала в комплексной  $\kappa_1$ -плоскости. В результате получаем

$$C(\xi, b) \approx -\frac{2}{3} \text{Re} \frac{\theta(a_0^2 \xi^2 - b^2) \exp\{\tilde{g}_{00}^{1/3} \eta_1 (\xi^2 - b^2/a_0^2)\}}{\tilde{g}_{00}^{1/3} (\xi^2 - b^2/a_0^2)^{1/2}}, \quad (60)$$

если  $g_{00} > 0$ , и

$$C(\xi, b) \approx -\frac{1}{3} \frac{\theta(a_0^2 \xi^2 - b^2) \exp\{|\tilde{g}_{00}|^{1/3} (\xi^2 - b^2/a_0^2)^{1/2}\}}{|\tilde{g}_{00}|^{1/3} (\xi^2 - b^2/a_0^2)^{1/2}}, \quad (61)$$

если  $g_{00} < 0$ .

Выражение (60) при фиксированном значении  $b$  осциллирует с ростом  $\xi$ , а величина (61) отрицательна. Для того, чтобы выражение (46) было неотрицательным при всех значениях  $b$  и  $\xi$ , нужно потребовать, чтобы при  $b < a_0 \xi$

$$\rho_0(\xi, b) \geq |C(\xi, b)| \quad (62)$$

Однако это условие явно нарушается вблизи края фруассаронного диска, т.е. при  $b - a_0 \xi = \text{Const}$ . При таких прицельных параметрах  $\rho_0(\xi, b) \sim \xi^{-1}$  падает с увеличением энергии, а  $|C(\xi, b)| \sim \exp(A/\xi)/\xi$  растет. Тем не менее, из (57) и (58) видно, что при учете зависимости  $\tilde{g}_{00}$  от  $\kappa_1^2$  в виде

$$\tilde{g}_{00}(\kappa_1^2) = \tilde{g}_{00}(0) - \tau^2 \kappa_1^2 \quad (63)$$

величина  $a_0^2$  заменяется на  $a_0^2 - \lambda \tau^2$ , где  $\lambda$  - некоторая константа. Поэтому, если  $\kappa_1^2$  - зависимость  $\tilde{g}_{00}(\kappa_1^2)$  - убывающая, то  $C(\xi, b)$  имеет меньший радиус, чем  $\rho_0(\xi, b)$ , и условие (62) может быть выполнено, если

$$\tilde{g}_{00}(0) < 8 \Delta^3 \quad \text{при } g_{00} > 0$$

$$|\tilde{g}_{00}(0)| < \Delta^3 \quad \text{при } g_{00} < 0 \quad (64)$$

Таким образом, решение (51) удовлетворяет требованиям s-канальной унитарности. Однако в области  $b > a_0 \xi$  это решение не является точным, поскольку правая часть (46) не обращается резко в нуль при  $b = a_0 \xi$ , а плавно уменьшается как  $E\{\rho_0(\xi, b)\}$ . Можно, тем не менее, привести аргументы в пользу того, что учет в (51) размытого края не изменит результата. Вообще говоря, в сумме графиков группы С эта размытость приведет к увеличению радиуса (при  $g_{00} < 0$ ). Однако, как отмечено выше, рост радиуса может быть скомпенсирован выбором  $\tau^2$  в (63). Что касается графиков D, то можно показать, что вклад каждого из них при  $b \geq a_0 \xi$  падает с ростом  $\xi$ . При этом существенно то, что из каждой вершины  $g_{00}$  в графиках группы D выходит не меньше трех линий. Хотя количество скелетных графиков бесконечно велико, но их вклады имеют разные знаки, и можно предположить, что полная сумма также будет убывать с ростом  $\xi$  при  $b \geq a_0 \xi$ . В области  $b < a_0 \xi$  размытость края фруассаронного диска не играет никакой роли, и благодаря компенсациям Карди вклад графиков группы D имеет здесь малость  $\sim e^{-\rho_0(\xi, b)}$ .

2. Перенормировка величины  $\Delta$  /15/. Обратим внимание на то, что квадрат радиуса взаимодействия  $4\alpha' \Delta_0 \xi^2$ , отвечающий решению (51), на величину  $4\alpha' g_{11} \xi^2$  меньше того, который возникал при учете лишь неусиленных графиков. Вклад усиленных графиков привел к эффективной перенормировке величины  $\Delta$  в соответствии с (40). В области энергий ускорителей ближайшего будущего  $\xi \geq 10$  начинается выход полных сечений взаимодействия на фруассаровский режим. Простейшие усиленные графики достигнут асимптотики при удвоенной величине  $\xi$ . Только после этого может начаться смена асимптотического режима в поведении полных сечений, которая сводится к изменению величины  $\Delta \rightarrow \Delta_0$ . Эту ситуацию можно проиллюстрировать на упрощенном примере, когда усиленные графики учитываются только в первом порядке по  $g_{00}$ , как показано на рис. 14

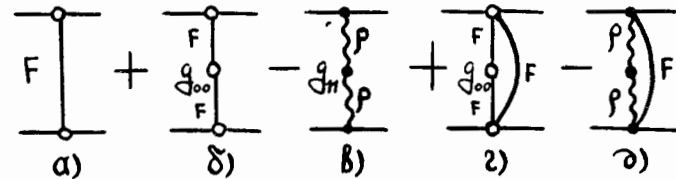


рис. 14

Здесь использован лагранжиан (7) с "затравочным" сдвигом в положении полюса, равным  $\Delta$ , поэтому вычитается вклад графиков в) и д) на рис. 14. Поскольку в области доступных энергий величина трехмерного графика (который отрицателен) и более сложных графиков пренебрежимо малы, то вклады графиков б) и в), г) и д) попарно сокращаются. Когда же графики б) и г) достигают асимптотики, то их суммарный вклад в  $\sigma_{tot}$  растет лишь как  $\xi^{3/2}$ , т.е. ими можно пренебречь. Однако вклад в  $\sigma_{tot}$  суммы графиков в) и д) равен  $-8\pi \alpha' g_{11} \xi^2$ , т.е. приводит к эффективной перенормировке  $\Delta \rightarrow \Delta - g_{11}$ .

В приложении II показано, что в процессах множественного рождения вклад усиленных графиков также перенормирует величину  $\Delta \rightarrow \Delta_0$  в инклюзивном сечении (29) и средней множественности (37), а, кроме того, константу  $d$ , которая в них содержится. Исключение составляют графики Канчели-Мюллера, в которых частица излучается из разрезанной вершины  $g_{00}$ , как показано

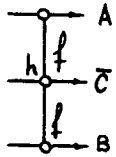


рис. 15

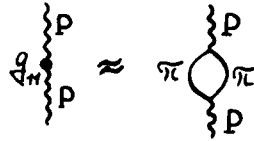


рис. 16

на рис. 15. Это приводит к небольшому "искривлению" инклюзивного спектра

$$\frac{dG}{dY} = 8\pi N_1^A N_1^B [d_0 e^{\Delta \xi} + h Y^2 (\xi - Y)^2]. \quad (65)$$

Величина  $d_0$  определена в приложении II, а  $h$  - на рис. 15.

Заметим, что не исключена возможность того, что величина  $g_{\pi\pi} \geq \Delta$ , а следовательно,  $\Delta_0 \leq 0$ . Этому не противоречит грубая оценка величины  $g_{\pi\pi}$ , выполненная в соответствии с графиком на рис. 16. При этом получаем

$$g_{\pi\pi} \sim \frac{(\sigma_{tot}^{\pi\pi})^2}{16\pi^2 \sigma_{tot}^{\pi\pi}} (R_1^2 - 2\mu^2 \ln(\mu^2 R_1^2) + \mu^2). \quad (66)$$

Здесь  $\mu$  - масса пиона;  $R_1^2/2$  характеризует зависимость  $\sigma_{tot}^{\pi\pi}$  от квадрата массы виртуального пиона. Если принять  $R_1^2 = 1(\text{ГэВ}/c)^2$ , то из (66) получаем  $g_{\pi\pi} \sim 0,08$ , т.е. величина одного масштаба с  $\Delta$ .

Если реализуется возможность  $\Delta_0 \leq 0$ , то фруассаровское поведение в асимптотике невозможно. Это видно из уравнений (54)-(55), которые по-прежнему справедливы. Отрицательное значение  $C(\xi, b)$  ничем не может быть скомпенсировано, т.к.  $\rho_0(\xi, b) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \infty$ . Следовательно, решение в форме  $F_0(\xi, b)$  не проходит, и полное сечение будет расти в асимптотике не быстрее, чем

$$\sigma_{tot}(\xi) \sim \xi^\eta, \quad (67)$$

где

$$\eta < 2. \quad (68)$$

В этом случае инклюзивное сечение и средняя множественность ведут себя с ростом  $\xi$  как

$$\frac{dG}{dY} \sim Y^\eta (\xi - Y)^\eta; \quad \langle n \rangle \sim \xi^{\eta+1}. \quad (69)$$

Наконец, заметим, что известно критическое значение  $\Delta = \Delta_c$ , при котором осуществляется вариант сильной связи<sup>[11,24]</sup>. В этом случае правой части в (47) отвечает особенность в  $\omega$ -плоскости в точке  $\omega = 0$ . Поэтому фруассаровский режим невозможен, вариант с  $\Delta = \Delta_c$  относится к случаю  $g_{\pi\pi} \geq \Delta$ , рассмотренному выше. Отсюда, в частности, следует, что

$$\Delta_c \leq g_{\pi\pi}, \quad (70)$$

что находится в соответствии с оценками  $\Delta_c$  из [11] и  $g_{\pi\pi}$  из (66).

#### IV Заключение

Обнаружение на ускорителях ИФЭ, FNAL и ISR роста с энергией полных сечений взаимодействия адронов привело к появлению в последние годы большого количества теоретических работ (см., например [25]), посвященных этой проблеме. В настоящей работе явление роста сечений было рассмотрено в рамках обычной реджевской схемы с помероном, имеющим  $\alpha(0) > 1$ . Величина  $\alpha(0)$  вводилась феноменологически, как свободный параметр, однако следует подчеркнуть, что в теоретико-полевых моделях, в которых померону сопоставляются лестничные диаграммы, независимо от конкретного вида исходного лагранжиана можно получить любую величину  $\alpha(0)$ , и значение  $\alpha(0) = 1$  ничем не выделено (см., например, [26]).

Небольшой сдвиг в положении полюса Померанчука в  $J$ -плоскости правее единицы приводит при современных энергиях к малым поправкам, которые необходимы для согласования теории с экспериментом. Однако в области более высоких энергий, которые будут достигнуты на будущих ускорителях, теория сильных взаимодействий полностью меняется. Вместо померона, который доминировал в теории с  $\alpha(0) = 1$ , новым объектом - фруассароном, представляющим собой поток померонов, определяет поведение при высоких энергиях. Кратко перечислим основные следствия теории померона с  $\alpha(0) > 1$  при достижимых и асимптотических энергиях.

1. Полные сечения и наклоны растут линейно с  $\xi$  в современной области энергий, так что имеет место приближенное явление г.с.

С ростом  $\xi$  г.с. нарушается и появляется снова в асимптотике, где и сечения и наклоны растут как  $\xi^2$ .

2. Отношение упругого к полному сечений мало ( $\sim 1/5$ ) и постоянно при современных энергиях, и станет большим ( $\sim 1/2$ ) в асимптотике.



3. Отношение реальной к мнимой частей амплитуды рассеяния вперед после того, как оно становится положительным, достигает значения  $\sim \frac{1}{2} \Delta$  и очень долго будет постоянным.

4. Инклюзивный спектр имеет плато в центральной области. Высота плато растет как  $e^{\Delta \xi}$ , нарушая фейнмановский скейлинг. Это плато имеет интервал быстрот  $\xi(I-2\Delta)$ , поэтому правило сумм, отражающее закон сохранения энергии, выполнено.

5. Средняя множественность не получает заметных отклонений при современных энергиях и растет линейно по  $\xi$ . Однако при энергиях  $\xi \geq 20$  появится значительное отклонение от обычного энергетического роста и асимптотически  $\langle n \rangle$  будет расти как  $e^{\Delta \xi / \xi^2}$ .

6.  $KNO$ -скейлинг в топологических сечениях может иметь место при современных энергиях, но обязательно нарушится при более высоких энергиях. Распределение по множественности при сверхвысоких энергиях осциллирует с максимальной амплитудой в области небольшой множественности, там, где дает вклад дифракционное рождение.

7. Вклад усиленных графиков меняет асимптотический режим при сверхвысоких энергиях, перенормируя величину  $\Delta \rightarrow \Delta_0 = \Delta - g_{11}$ . Доказана унитарность теории в  $s$ -канале.

8. В случае  $\Delta \leq g_{11}$  фруассаровское поведение в асимптотике невозможно, и сечения растут медленнее, чем  $\xi^2$ , после смены асимптотического режима.

Авторы благодарны К.Г. Борескову, П.Е. Волковицкому, А.М. Лапидус, Е.М. Левину, В.И. Лисину, М.Г. Рыскину за полезные обсуждения.

Приложение I

Проведем интегрирование в (59) для случая (57). Вариант (58) аналогичен.

Выполнив в (59) интегрирование по углу, с учетом (57), получаем

$$C(\xi, b) = -\frac{2}{3} \operatorname{Re} \frac{a_0^2}{\tilde{g}_{00}^{1/3}} \int_0^\infty \frac{\exp\left\{\left(\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2\right)^{1/2} \xi\right\}}{\left(\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2\right)^{1/2}} J_0(\kappa_1 b) \kappa_1 d\kappa_1 \quad (I.1)$$

В силу равенства

$$H_0^{(1)}(x) - H_0^{(1)}(-x + i0) = \pm 2 J_0(x) \quad (I.2)$$

от (I.1) можно перейти к интегралу

$$C(\xi, b) \approx -\frac{1}{3} \operatorname{Re} \frac{a_0^2}{\tilde{g}_{00}^{1/3}} \int_C \frac{\exp\left\{\left(\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2\right)^{1/2} \xi\right\}}{\left(\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2\right)^{1/2}} H_0^{(1)}(\kappa_1 b) \kappa_1 d\kappa_1 \quad (I.3)$$

Контур интегрирования  $C = C_0$  изображен на рис. I7. На этом же рисунке показаны точки ветвления подинтегрального выражения в (I.3), а разрезы проведены таким образом, чтобы в верхней полуплоскости при  $|\kappa_1| \rightarrow \infty \exp\left\{\left(\tilde{g}_{00}^{2/3} \eta_1^2 - a_0^2 \kappa_1^2\right)^{1/2} \xi\right\}$  убывала.

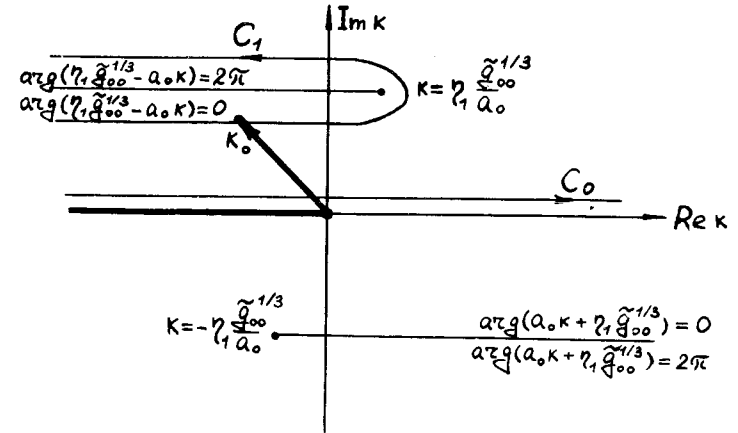


рис. I7

Из асимптотического поведения функции  $H_0^{(1)}(z)$

$$H_0^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - i\frac{\pi}{4}} \quad (I.4)$$

закключаем, что в верхней полуплоскости подынтегральное выражение в (I.3) убывает при  $|k_1| \rightarrow \infty$ , так что в интеграле (I.3) в качестве  $C$  можно взять контур  $C_1$  и произвести интегрирование методом перевала.

Положение точки перевала  $k_0$  определяется из условия обращения в ноль логарифмической производной подынтегрального выражения (I.3)

$$k_0 = \frac{i\eta b}{a_0(a_0\eta - b^2)} \quad (I.5)$$

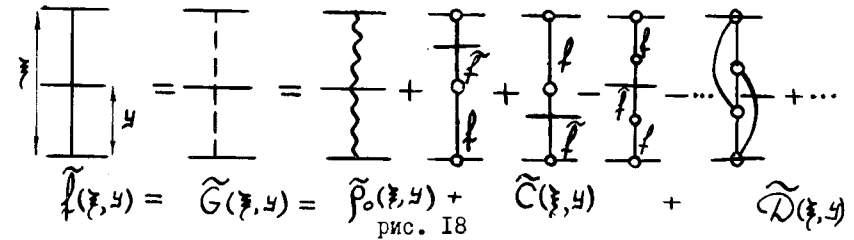
Движение точки  $k_0$  в  $K_1$ -плоскости с ростом  $b$  показано на рис. I7. Замечая, что на верхней части контура  $C_1$  подынтегральное выражение экспоненциально мало, вычислим интеграл (I.3) с учетом (I.5). В результате приходим к выражению (60). Заметим, что при  $b \rightarrow a_0\eta$  предэкспоненциальный множитель в (60) стремится к бесконечности. Это связано с тем, что при  $b \rightarrow a_0\eta$  вторая логарифмическая производная по  $k_1$  от подынтегрального выражения в (I.3), которая равна  $\rho'' = -a_0^2(\eta^2 - b^2/a_0^2)^{3/2}/(\eta\eta^2)$ ,

стремится к нулю, тогда как для вычисления предэкспоненциального множителя методом перевала необходимо, чтобы  $|\rho''| \propto \eta$ .

Множитель  $\theta(a_0\eta^2 - b^2)$  введен в (60), (61) потому, что в приближении (51) при  $b > a_0\eta$  имеет место точное равенство  $C(\eta, b) = 0$ .

Покажем, что учет усиленных графиков не изменит формул (27) и (37) для инклюзивного спектра и средней множественности, а приведет лишь к перенормировке константы  $d \rightarrow d_0$  и замене  $\Delta \rightarrow \Delta_0$ .

Инклюзивному спектру  $dG/dy$  отвечает диаграмма Канчели-Мюллера, которая стоит в левой части диаграммного равенства АГК на рис. I8,



которое получается разрезанием графиков на рис. I0-I2.

Из правила разрезания реджеонных диаграмм вытекает, что  $\tilde{D}(\eta, y) = 0$ . Тогда из диаграммного равенства на рис. I8 следует

$$\tilde{f}(\eta) = \tilde{\rho}_0(\eta) + \tilde{C}(\eta), \quad (II.1)$$

где использованы обозначения, аналогичные следующему:

$$\int_0^{\eta} \tilde{\rho}_0(\eta, y) dy = \tilde{\rho}_0(\eta). \quad (II.2)$$

Таким образом,

$$\tilde{f}(\eta) = \int \frac{dG(\eta, y)}{dy} dy = \langle n \rangle \sigma_{in}(\eta). \quad (II.3)$$

В дальнейшем равенство (II.1) будем использовать в  $\omega$ -представлении, обозначая, например,

$$\tilde{C}(\omega) = \int \tilde{C}(\eta) e^{-\omega\eta} d\eta. \quad (II.4)$$

В  $\omega$ -представлении имеет место соотношение

$$\tilde{C}(\omega) = \frac{-\tilde{f}(\omega)}{[1 + \tilde{f}(\omega, 0)]^2} + \tilde{f}(\omega), \quad (\text{II.5})$$

которое получается суммированием членов геометрической прогрессии  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [g_{00} f(\omega, 0)]^n$  в цепочке по обе стороны от разрезанного звена. Второй член в правой части (II.5) добавлен из-за того, что в группе C нет графиков с одним звеном. Подставив (II.5) в (II.1), находим

$$\tilde{f}(\omega) = [1 + g_{00} f(\omega, 0)]^2 \tilde{\rho}_0(\omega). \quad (\text{II.6})$$

Поскольку  $\tilde{\rho}_0(\omega) = d/(\omega - \Delta_0)^2$  и  $f(\omega, 0) = a_0^2/\omega^3$ , то при  $\omega \rightarrow \Delta_0$

$$\tilde{f}(\omega) \approx \left(1 + \frac{g_{00} a_0^2}{\Delta_0^3}\right)^2 \frac{d}{(\omega - \Delta_0)^2}. \quad (\text{II.7})$$

Переходя в  $\xi$ -представление, находим

$$\langle n \rangle \tilde{\sigma}_n(\xi) = d_0 \xi e^{\Delta_0 \xi}, \quad (\text{II.8})$$

где

$$d_0 = \left(1 + \frac{g_{00} a_0^2}{\Delta_0^3}\right)^2 d.$$

Таким образом, учет усиленных графиков привел к появлению дополнительного множителя  $(1 + g_{00}/\Delta_0^3)^2$  в выражениях (27) для инклюзивного сечения и (37) для средней множественности, а также вызвал перенормировку  $\Delta \rightarrow \Delta_0$  в этих выражениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Грибов, А.А.Мигдал, ЯФ, 10, 1213 (1963).
2. А.И.Лендвел, К.А.Тер-Мартirosян, Письма в ЖЭТФ, II, 70, (1970).
3. К.Г.Боресков, А.И.Липидус, С.Т.Сухоруков, К.А.Тер-Мартirosян, ЯФ, I 14, 814 (1971).
4. U.Amaldi, E.Biancastelli et al., Phys.Lett., 43B, 321(1973).
5. S.Amedolia, G.Bellitini et al., Phys.Lett., 44B, 119(1973).
6. В.Н.Грибов, ЖЭТФ, 53, 654 (1967)
7. А.А.Мигдал, А.М.Поляков, К.А.Тер-Мартirosян, ЖЭТФ, 67, 84 (1974).
8. P.D.B.Collins, F.D.Gault, A.Martin, Phys.Lett. 47B, 171(1973); Nucl.Phys., B80, 135(1974); Nucl.Phys., B83, 241(1974).
9. A.Capella, J.Thanh Tran Wan, J.Kaplan. Preprint LPTHE 75/12.
10. H.Cheng, T.T.Wu, Phys.Rev.Lett. 24, 1456 (1970).
11. В.А.Абрамовский, В.Н.Грибов, О.В.Канчели, ЯФ, 18, 595 (1973).
12. J.B.Bronzan, Preprint NAL-Pub-73/69-THY (1973).
13. J.L.Cardv, Nucl.Phys. B75, 413 (1974).
14. M.S.Dubovikov, K.A.Ter-Martirosyan. Preprint ITEP-37, Moscow (1976).
15. B.Z.Kopeliovich, L.I.Lapidus, Preprint JINR, E2-9537, Dubna, 1976
16. К.А.Тер-Мартirosян, Письма в ЖЭТФ, 15, 734 (1972).
17. V.Barger, Proc. 17th Int. Conf. on High Energy Physics, London (1974).
18. V.Barger, J.Luthe, R.J.N.Phillips, Nucl.Phys. B88, 237(1975).
19. G.Auberson, T.Kinoshita, A.Martin, Phys.Rev., D3, 3185(1971).
20. V.Barger, F.Halzen, T.K.Gaisser, C.J.Noble, G.B.Yodh. Phys.Rev.Lett., 33, 1051(1974).
21. О.В.Канчели, Письма в ЖЭТФ, 18, 469 (1973).
22. К.А.Тер-Мартirosян, Phys.Lett., 44B, 377(1973).
23. Z.Koba, H.B.Nielson, P.Oelsen, Nucl.Phys., B40, 317(1972).
24. H.D.I.Abarbanel, J.B.Bronzan, Phys.Rev., D9, 2397(1974).

25. Л.Д. Соловьев, А.В. Щелкачев. ЭЧАЯ, 6, 571 (1975).  
В.И. Саврин, Н.Е. Турин, О.А. Хрусталев. ЭЧАЯ, 7, 21 (1976).  
В.В. Голоскоков. Препринт ОИЯИ, P2-7220, Дубна, 1973.
26. S.J.Chang, T-M.Yan, Phys. Rev. Lett., 25, 1586 (1970)  
B.Hasslacher, D.K.Sinclair, G.M.Cicuta, R.L.Sugar, Phys. Rev.  
Lett., 25, 1591 (1970).  
Б.М. Барбашев, В.В. Нестеренко. ЯФ, 20, 218 (1974).

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 мая 1976 года