ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Д2 - 9540

А.А.Квинихидзе, В.А.Матвеев,
А.Н.Тавхелидзе, А.А.Хелашвили

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ПРОЕКТИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА "ДВУХВРЕМЕННЫХ" ФУНКЦИЙ ГРИНА n ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА НУЛЬ-ПЛОСКОСТИ

1976

Д2 - 9540

А.А.Квинихидзе,[1] В.А.Матвеев,
А.Н.Тавхелидзе, А.А.Хелашвили[2]

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ПРОЕКТИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА "ДВУХВРЕМЕННЫХ" ФУНКЦИЙ ГРИНА n ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ НА НУЛЬ-ПЛОСКОСТИ

Направлено в ТМФ

[1] Математический институт АН Гр.ССР.
[2] Тбилисский государственный университет.

1. Введение

Система взаимодействующих частиц в квантовой теории поля может быть описана с помощью амплитуд Бете-Солпитера или квазипотенциальных волновых функций. Напомним определение этих величин.

Пусть $|P,c>$ - вектор состояния с полным 4-импульсом P и квантовыми числами частицы c. Связанное состояние частиц a и b, которое имеет полный 4-импульс P и квантовые числа c, описывается амплитудой Бете-Солпитера

$$\Psi_P(x,y) = <0|T\phi_a(x)\phi_b(y)|P,c>$$

/$\phi_a(x)$ и $\phi_b(y)$ - гейзенберговские операторы и T - оператор хронологического упорядочения/.

Используя свойство трансляционной инвариантности, имеем:

$$\Psi_P(x,y) = e^{-iP\frac{x+y}{2}} f_P(x-y).$$

Амплитуда $f_P(x-y)$ зависит от относительного времени x_0-y_0 и истолковать ее как волновую функцию, вообще говоря, невозможно.

Квазипотенциальные волновые функции определяются как значения соответствующих амплитуд Бете-Солпитера на заданной пространственно-подобной поверхности. В первоначальной работе /1/ в качестве последней выбиралась поверхность равных времен для всех частиц. В частности, квазипотенциальная волновая функция двух частиц имела вид:

$$\chi_P(\vec{x}-\vec{y}) = f_P(x-y)|_{x_0-y_0=0}.$$

Подчеркнем, что, хотя определенные таким образом квазипотенциальные волновые функции формально нековариантны, тем не менее все физические величины /спектр связанных состояний, матрицы рассеяния и т.д./, полученные с помощью этих функций, имеют релятивистски-инвариантный смысл.

В настоящее время известны различные способы построения релятивистски ковариантных квазипотенциальных волновых функций [/2/].

В данной работе дается систематическое описание свойств многочастичных к.п. волновых функций и соответствующих функций Грина в квантовой теории поля на нуль плоскости в случае произвольного спина. Отправным пунктом единого подхода является спектральное представление функции Грина. Оно дает возможность изучения структуры квазипотенциала, в результате которого удается сформулировать корректные релятивистские уравнения в проблеме многих тел [/3/]. Особое место уделено изучению проектирующих и трансформационных свойств функции Грина и квазипотенциальных волновых функций.

Проектирующие свойства уместно будет пояснить на примере двухчастичной квазипотенциальной волновой функции. Для простоты, рассмотрим случай скалярных частиц сорта a, b и c, которым соответствуют вторично квантованные поля $\phi_i(x)(i=a,b,c)$ и лагранжиан взаимодействия вида:

$$\mathcal{L}_I(x) = g:\phi_a(x)\phi_b(x)\phi_c(x).$$

В низшем порядке теории возмущений по константе связи g, для амплитуд Бете-Солпитера имеем:

$$f_P(k) \sim \frac{g}{[(\frac{1}{2}P+k)^2-m^2+i\epsilon][(\frac{1}{2}P-k)^2-m^2+i\epsilon]},$$

где

$$f_P(x-y) = \int d^4k e^{-ik(x-y)} f_P(k).$$

Квазипотенциальная волновая функция на нуль-плоскости /см. §2/ определяется выражением

$$\Phi_P(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{y}) = f_P(x-y)|_{x^+=y^+}.$$

В рассматриваемом приближении имеем

$$\Phi_{\underset{\sim}{P}}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{y}) = \int d^3\underset{\sim}{k} e^{-i\underset{\sim}{k}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{y})}\Phi_P(\underset{\sim}{k}),$$

где

$$\Phi_P(k) \sim \frac{g\theta(\eta)\theta(1-\eta)i\pi}{|P_+|\eta(1-\eta)[P^2+P_\perp^2-\frac{(\frac{1}{2}P_\perp+k_\perp)^2+m^2}{\eta}-\frac{(\frac{1}{2}P_\perp-k_\perp)^2+m^2}{1-\eta}]}.$$

$$\eta = \frac{1}{2}+\frac{k^+}{P^+}.$$

Отсюда мы видим, что в данном приближении фурье-образ квазипотенциальной волновой функции обладает следующими проектирующими свойствами [/4/]:

$$\Phi_P(k^+,k_\perp) = 0, \qquad \text{если} \quad \eta<0,\ \eta>1.$$

Ниже будет показано, в частности, что это важное свойство сохраняется независимо от теории возмущений для всех квазипотенциальных волновых функций.

2. *"Двухвременные" функции Грина n-взаимодействующих частиц*

Функция Грина n-взаимодействующих частиц в квантовой теории поля на нуль плоскости определяется как вакуумное среднее от "хронологически" упорядоченных произведений соответствующих гейзенберговских операторов полей и имеет вид [/5/]

$$G^{(n)}(x_1,\dots x_n;y_1,\dots y_n) = \qquad /1/$$
$$=\langle 0|T_+\Psi_1(x_1)\dots\Psi_n(x_n)\bar\Psi_n(y_n)\dots\bar\Psi_1(y_1)|0\rangle.$$

Здесь для параметризации компонент 4-векторов x_i, y_i и др. используются переменные "светового фронта":

$$x = (x^+, x^-, x_\perp), \quad x^\pm = \frac{1}{2}(x^0 \pm x^3), \quad x_\perp = (x^1, x^2),$$
$$\underset{\sim}{x} = (x^-, x_\perp), \quad x = (x^+, \underset{\sim}{x}).$$

В импульсном пространстве удобно ввести обозначения:

$$p = (p^-, p^+, p_\perp), \quad p^\pm = p^0 \pm p^3, \quad p_\perp = (p^1, p^2), \quad \underset{\sim}{p} = (p^+, p_\perp),$$

тогда $px = p^- x^+ + p^+ x^- - p_\perp x_\perp = p^- x^+ + \underset{\sim}{p}\underset{\sim}{x}$,

а $\Psi_i(x_i)$ и $\bar{\Psi}_i(x_i)$ являются сопряженными гейзенберговскими операторами полей i-той частицы*. T_+ является оператором хронологического упорядочения по "временной" переменной x^+. В простейшем случае двух полей

$$T_+ \Psi_i(x) \Psi_j(y) = \theta(x^+ - y^+) \Psi_i(x) \Psi_j(y) \pm \theta(y^+ - x^+) \Psi_j(y) \Psi_i(x)$$

/знак минус соответствует фермионам/.

Подчеркнем, что в квантовой теории поля на нуль плоскости канонические коммутационные соотношения задаются при фиксированной "временной" переменной $x^+ = x^0 + x^3$. Соответственно, в теории возмущений рассматриваются x^+-упорядоченные произведения свободных операторов полей. Это приводит к некоторому различию в диаграммном языке по сравнению с ковариантной теорией для частиц с ненулевым спином.

Определим "двухвременную" функцию Грина n-частиц:

$$\tilde{G}^{(n)}(X^+; \underset{\sim}{x}_1, \dots \underset{\sim}{x}_n; Y^+; \underset{\sim}{y}_1, \dots \underset{\sim}{y}_n) =$$
$$= G^{(n)}(x_1, \dots x_n; y_1, \dots y_n)\Big|_{\substack{x_1^+ = \dots = x_n^+ = X^+ \\ y_1^+ = \dots = y_n^+ = Y^+}} . \qquad /2/$$

Удобно ввести операторы

---
* Отметим, что имеются в виду динамические компоненты полей, описывающих частицы со спином /5/.

$$A(x) = \Psi_1(x_1) \dots \Psi_n(x_n)\Big|_{x_1^+ = \dots = x_n^+ = X^+},$$

$$\bar{A}(y) = \bar{\Psi}_n(y_n) \dots \bar{\Psi}_1(y_1)\Big|_{y_1^+ = \dots = y_n^+ = Y^+},$$

и записать двухвременную функцию Грина /2/ через эти операторы:

$$G^{(n)}(x, y) = \langle 0 | T_+ A(x) \bar{A}(y) | 0 \rangle =$$
$$= \theta(X^+ - Y^+) \langle 0 | A(x) \bar{A}(y) | 0 \rangle \pm \qquad /3/$$
$$\pm \theta(Y^+ - X^+) \langle 0 | \bar{A}(y) A(x) | 0 \rangle .$$

Знаки /$\pm$/ выбираются в зависимости от количества фермионных операторов в $A(x)$.

В дальнейшем мы хотим получить спектральное представление для функций Грина /3/.

Используя разложение по полному набору физических состояний $|m\rangle$, свойство трансляционной инвариантности

$$\langle 0 | A(x) | m \rangle = e^{-i P_m^- X^+} \langle 0 | A(\underset{\sim}{x}) | m \rangle ,$$

$$A(\underset{\sim}{x}) = A(x)\Big|_{X^+ = 0}$$

и представление Фурье для θ-функции, /3/ можно записать в следующей спектральной форме:

$$G^{(n)}(x, y) = G^{(n)}(X^+ - Y^+; \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}) = \qquad /4/$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dP^- e^{-iP^-(X^+ - Y^+)} \int_0^{\infty} dz \left[\frac{\sigma_1(z; \underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{y})}{P^- - z + i\epsilon} \mp \frac{\sigma_2(z; \underset{\sim}{x}; \underset{\sim}{y})}{P^- + z - i\epsilon} \right],$$

где для спектральных функций $\sigma_{1,2}$ имеем выражение через n-частичные квазипотенциальные волновые функции

$$\sigma_1(z;\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y}) = \frac{i}{2\pi}\sum_m \delta(z-P_m^-)\chi_{0m}(\underset{\sim}{x})\bar\chi_{0m}(\underset{\sim}{y})$$

$$\sigma_2(z;\underset{\sim}{x};\underset{\sim}{y}) = \frac{i}{2\pi}\sum \delta(z-P_m^-)\chi_{m0}(\underset{\sim}{x})\bar\chi_{m0}(\underset{\sim}{y}),$$

$$\chi_{0m}(\underset{\sim}{x}) = \chi_{0m}(\underset{\sim}{x}_1\dots \underset{\sim}{x}_n) = \langle 0|\Psi_1(0,\underset{\sim}{x}_1)\dots\Psi_n(0,\underset{\sim}{x}_n)|m\rangle, \qquad /5/$$

$$\bar\chi_{0m}(\underset{\sim}{y}) = \langle m|\bar A(\underset{\sim}{y})|0\rangle,$$

$$\chi_{m0}(\underset{\sim}{x}) = \langle m|A(\underset{\sim}{x})|0\rangle, \quad \bar\chi_{m0}(\underset{\sim}{y}) = \langle 0|\bar A(\underset{\sim}{y})|m\rangle.$$

Суммирование по m в формулах /1.8/ предполагает интегрирование по 4-импульсу $P_m (P_m^+>0, P_m^->0, P_\perp)$ /при условии $P_m^2>0$ / и суммирование по остальным квантовым числам, от которых может зависеть данное физическое состояние $|m\rangle$.

Определим фурье-образы спектральных функций:

$$\sigma_{1,2}(z,\underset{\sim}{x}_1\dots\underset{\sim}{x}_n;\underset{\sim}{y}_1\dots\underset{\sim}{y}_n) = \qquad /6/$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{4n}}\int e^{-i\sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{p}_j\underset{\sim}{x}_j-\underset{\sim}{q}_j\underset{\sim}{y}_j)}\sigma_{1,2}(z,\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n;\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n)\prod_{j=1}^{n}d^3\underset{\sim}{p}_j\, d^3\underset{\sim}{q}_j.$$

Из определения /6/ на основе /5/имеем

$$\sigma_1(z;\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n;\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^{1-4n}}\sum_m\delta(z-P_m^-)\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n)\bar\chi_{0m}(\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n), \qquad /7/$$

$$\sigma_2(z;\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n;\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n) =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^{1-4n}}\sum_m\delta(z-P_m^-)\chi_{m0}(\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n)\bar\chi_{m0}(\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n),$$

где

$$\chi_{m0}(\underset{\sim}{x}_1\dots\underset{\sim}{x}_n) = \int e^{-i\sum_{j=1}^{n}\underset{\sim}{p}_j\underset{\sim}{x}_j}\chi_{m0}(\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n)\,d^3\underset{\sim}{p}_1\dots d^3\underset{\sim}{p}_4,$$

$$\chi_{0m}(\underset{\sim}{x}_1\dots\underset{\sim}{x}_n) = \int e^{-i\sum_{j=1}^{n}\underset{\sim}{p}_j\underset{\sim}{x}_j}\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n)\,d^3\underset{\sim}{p}_1\dots d^3\underset{\sim}{p}_n.$$

Покажем, что спектральные функции $\sigma_{1,2}$ в импульсном пространстве обладают следующими важными свойствами:

$$\sigma_1(z;\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n;\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n) = 0, \qquad /8/$$

если хотя бы одна из переменных p_i^+ или q_j^+ меньше нуля, и

$$\sigma_2(z;\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n;\underset{\sim}{q}_1\dots\underset{\sim}{q}_n) = 0, \qquad /9/$$

если хотя бы одна из переменных p_i^+ или q_j^+ больше нуля.

Покажем сначала справедливость /8/. Для этого рассмотрим фурье-образ n-частичной квазипотенциальной волновой функции

$$\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3n}}\int e^{i\sum_{j=1}^{n}\underset{\sim}{p}_j\underset{\sim}{x}_j}\langle 0|\Psi_1(\underset{\sim}{x}_1)\dots\Psi_n(\underset{\sim}{x}_n)|m\rangle\prod_{j=1}^{n}d^3\underset{\sim}{x}_j = \qquad /10/$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3n-3}}\sum_{m_1}\delta(\underset{\sim}{p}_1-\underset{\sim}{p}_{m_1})\int e^{i\sum_{j=2}^{n}\underset{\sim}{p}_j\underset{\sim}{x}_j}\langle 0|\Psi_1(0)|m_1\rangle\times$$

$$\times\langle m_1|\Psi_2(\underset{\sim}{x}_2)\dots\Psi_n(\underset{\sim}{x}_n)|m\rangle.$$

Учитывая, что $p_{m_1}^+>0$, мы видим, что $\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1\dots\underset{\sim}{p}_n)$ равна нулю, если $\underset{\sim}{p}_1^+<0$. Чтобы доказать справедливость этого утверждения для любого p_j^+, используем свойства коммутации полей $\Psi_i(\underset{\sim}{x}_i)$ на нуль-плоскости и перенеся на первое место слева произвольный оператор $\Psi_j(\underset{\sim}{x}_j)$, перепишем /10/ в виде

$$\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) = \pm \frac{1}{(2\pi)^{3n-3}} \sum_{m_1} \delta(\underset{\sim}{p}_j - \underset{\sim}{p}_{m_1}) \int e^{i\sum_{\ell \neq j} \underset{\sim}{p}_\ell \underset{\sim}{x}_\ell} \langle 0|\Psi_j(0)|m_1\rangle \times$$

$$\times \langle m_1|\Psi_1(\underset{\sim}{x}_1)\ldots\Psi_{j-1}(\underset{\sim}{x}_{j-1})\Psi_{j+1}(\underset{\sim}{x}_{j+1})\ldots\Psi_n(\underset{\sim}{x}_n)|m\rangle \prod_{\ell \neq j} d^3\underset{\sim}{x}_\ell .$$

Остюда, учитывая, что для физических состояний $p^+_{m_1} \geq 0$, убеждаемся, что

$$\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) = 0, \quad \text{/если хотя бы один } p^+_i < 0 \text{ /} \qquad /11/$$

Аналогичным образом можно убедиться, что

$$\chi_{m0}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) = 0, \quad \text{/если хотя бы один } p^+_i > 0 \text{ /} \qquad /12/$$

Учитывая /11/, /12/ и формулы /7/, убеждаемся в справедливости свойств /8/ и /9/.

Определим теперь фурье-образ двухвременной функции Грина /4/

$$\tilde{G}^{(n)}(X^+ - Y^+; \underset{\sim}{x}_1 \ldots \underset{\sim}{x}_n; \underset{\sim}{y}_1 \ldots \underset{\sim}{y}_n) = \frac{1}{(2\pi)^{4n}} \int e^{-iP^-(X^+-Y^+) - \sum_{j=1}^{n}(\underset{\sim}{p}_j \underset{\sim}{x}_j - \underset{\sim}{q}_j \underset{\sim}{y}_j)} \times$$

$$\times \tilde{G}^{(n)}(P^-; \underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n; \underset{\sim}{q}_1 \ldots \underset{\sim}{q}_n)\, dP^- \prod_{j=1}^{n} d^3\underset{\sim}{p}_j\, d^3\underset{\sim}{q}_j . \qquad /13/$$

Подставляя /6/ и /13/ в /4/, получим

$$\tilde{G}^{(n)}(P^-; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{q}) = \int dz \left[\frac{\sigma_1(z; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{q})}{P^- - z + i\epsilon} \mp \frac{\sigma_2(z; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{q})}{P^- + z - i\epsilon} \right], \qquad /14/$$

$$\sigma_1(z; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{q}) = 0, \qquad \text{/если хотя бы один } p^+_i, q^+_j < 0 \text{ /},$$

$$\sigma_2(z; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{q}) = 0, \qquad \text{/если хотя бы один } p^+_i, q^+_j > 0 \text{/}.$$

Спектральное представление /14/ является аналогом спектрального представления по полной энергии двухвременной функции Грина в квантовой теории поля. Однако здесь проявляется существенное разграничение между верхней и нижней полостями светового конуса, характерное для квантовой теории поля на нуль-плоскости, а именно: "запаздывающая" часть функции Грина /14/ /первое слагаемое/ полностью определяет поведение функции Грина при положительных p^+_i, q^+_j, а "опережающая" часть /второе слагаемое/ - поведение функции Грина при отрицательных p^+_i, q^+_j.

Если учесть, что в квантовой теории поля на нуль плоскости "одетый" вакуум $|0\rangle$ /собственное решение полного гамильтониана с минимальной энергией $\hat{P}^-|0\rangle = 0$/ совпадает с "голым", т.е. с аналогичным решением свободного гамильтониана, то нетрудно выявить существенное упрощение в спиновой структуре "дввухвременных" функций Грина. Действительно, квазипотенциальные волновые функции можно представить в следующем виде:

$$\chi_{0m}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) = \sum_{i_1 \ldots i_n} \Phi^{i_1 \ldots i_n}_{0m}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) U^{i_1}_1(\underset{\sim}{p}_1) \ldots U^{i_n}_n(\underset{\sim}{p}_n),$$

$$\chi_{m0}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) = \sum_{i_1 \ldots i_n} \Phi^{i_1 \ldots i_n}_{m0}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) \mathcal{V}^{i_1}_1(\underset{\sim}{p}_1) \ldots \mathcal{V}^{i_n}_n(\underset{\sim}{p}_n),$$

где $\Phi^{i_1 \ldots i_n}_{0m}(\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3n} p^+_1 \ldots p^+_n} \langle \underset{\sim}{p}_1 i_1, \ldots \underset{\sim}{p}_n i_n|m\rangle$ -

- проекция вектора состояния $|m\rangle$ на состояние n-свободных частиц с импульсами $\underset{\sim}{p}_1 \ldots \underset{\sim}{p}_n$ и проекциями спинов $i_1 \ldots i_n$,

$$U^i_{\ell\mu}(\underset{\sim}{p}) = \langle 0|\Psi_{\ell\mu}(0)|\, i\underset{\sim}{p}\rangle ; \qquad \mathcal{V}^i_{\ell\mu}(\underset{\sim}{p}) = \langle -\underset{\sim}{p}\, i|\Psi_{\ell\mu}(0)|0\rangle \; -$$

- спиноры, описывающие одночастичные состояния*.

---

*Здесь и ниже используется инвариантная нормировка одночастичных векторов состояний

$$\langle \vec{p}, i|\vec{p}' i'\rangle = \langle \underset{\sim}{p}\, i|\, \underset{\sim}{p}' i'\rangle = (2\pi)^3 2p^0 \delta_{ii'} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') =$$

$$= (2\pi)^3 p^+ \delta_{ii'} \delta^{(3)}(\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{p}') .$$

Выписывая аналогичные соотношения для волновых функций χ_{0m}, χ_{m0}, спектральные плотности можно переписать в виде проектирующих операторов

$$\sigma_1(z, \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) =$$
$$= \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n}} U^{i_1}(\utilde{p}_1) \dots U^{i_n}(\utilde{p}_n) \tilde{\sigma}_{1\, i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_n}(z, \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) \times$$
$$\times \bar{U}^{j_1}(\utilde{q}_1) \dots \bar{U}^{j_n}(\utilde{q}_n),$$

$$\sigma_2(z, \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) =$$
$$= \sum_{\substack{i_1 \dots i_n \\ j_1 \dots j_n}} \mathfrak{C}^{i_1}(\utilde{p}_1) \dots \mathfrak{C}^{i_n}(\utilde{p}_n) \tilde{\sigma}_{2\, i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_n}(z, \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) \times$$
$$\times \bar{\mathfrak{C}}^{j_1}(\utilde{q}_1) \dots \bar{\mathfrak{C}}^{j_n}(\utilde{q}_n),$$

где

$$\tilde{\sigma}_{1\, i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_n}(z, \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) =$$
$$= i(2\pi)^{n-1} \sum_m \delta(z - P^-_m) \Phi_{0m}^{i_1 \dots i_n}(\utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n) \bar{\Phi}_{0m}^{j_1 \dots j_n}(\utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n),$$

$$\tilde{\sigma}_{2\, i_1 \dots i_n; j_1 \dots j_n}(z, \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) =$$
$$= i(2\pi)^{n-1} \sum_m \delta(z - P^-_m) \Phi_{m0}^{i_1 \dots i_n}(\utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n) \bar{\Phi}_{m0}^{j_1 \dots j_n}(\utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n).$$

Вернемся снова к спектральному представлению /14/. Из свойства трансляционной инвариантности следует: $\sum_{j=1}^{n} (\utilde{p}_j - \utilde{q}_j) = 0$. Введем вектор $\utilde{P} = \sum_{j=1}^{n} \utilde{p}_j = (P^+, P_\perp)$ и определим 4-вектор $P = (P^+, P^-, P_\perp)$, причем $P^- = \frac{1}{P^+}(P^2 + P_\perp^2)$. Используя определение спектральных плотностей /7/ и свойство трансляционной инвариантности волновых функций, можно получить на основе /14/ спектральное представление

двухвременной функции Грина по квадрату полного 4-импульса P^2

$$\tilde{G}^{(n)}(P^2; \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) = \int_0^\infty dS \frac{\sigma(S; \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n)}{P^2 - S + i\epsilon}, \qquad /15/$$

где

$$\sigma(S; \utilde{p}; \utilde{q}) = \sigma_1(S; \utilde{p}; \utilde{q}) \prod_{j=1}^{n} \theta(p_j^+)\theta(q_j^+) \mp \sigma_2(S; \utilde{p}; \utilde{q}) \prod_{j=1}^{n} \theta(-p_j^+)\theta(-q_j^+),$$
$$\sigma_1(S; \utilde{p}; \utilde{q}) = i(2\pi)^{4n-1} \sum_m P^+ \delta(S - P_m^2) \chi_{0m}(\utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n) \bar{\chi}_{0m}(\utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n),$$
$$\sigma_2(S; \utilde{p}; \utilde{q}) = i(2\pi)^{4n-1} \sum_m P^+ \delta(S - P_m^2) \chi_{m0}(\utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n) \bar{\chi}_{m0}(\utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n).$$

Учитывая закон сохранения трехмерного импульса

$$\utilde{p}_1 + \utilde{p}_2 + \dots \utilde{p}_n = \utilde{q}_1 + \utilde{q}_2 + \dots \utilde{q}_n,$$

запишем функцию Грина в виде:

$$\tilde{G}^{(n)}(P^2; \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_n; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_n) =$$
$$= \delta^{(3)}\Big(\sum_{j=1}^{n} \utilde{p}_j - \sum_{j=1}^{n} \utilde{q}_j\Big) \tilde{G}^{(n)}(P; \utilde{p}_1 \dots \utilde{p}_{n-1}; \utilde{q}_1 \dots \utilde{q}_{n-1}). \qquad /16/$$

Покажем теперь, что функция Грина /16/ зависит от переменных P^+ и $P_\perp$ специальным образом:

$$(P^+)^{2n-2} \tilde{G}^{(n)}(P; p_i^+, p_{i\perp}; q_j^+, q_{j\perp}) \equiv$$
$$\equiv S_P \tilde{G}^{(n)}(P^2; \eta_i, p_{i\perp} - \eta_i P_\perp; \xi_j, q_{j\perp} - \xi_j P_\perp) S_P^{-1}, \qquad /17/$$

где благодаря свойствам /8/ и /9/

$$\eta_i = \frac{p_i^+}{P^+}, \quad \xi_j = \frac{q_j^+}{P^+} \quad (i, j = 1, \dots n-1)$$

$$0 < \eta_i \xi_j < 1$$

/S_P и S_P^{-1} - известные матрицы преобразования, действующие на спиновые индексы/. Для скалярных частиц S_P равна единице.

Зависимость функции Грина лишь от масштабных переменных η_i и ξ_j является следствием инвариантности n-частичной 4-мерной функции Грина /1/ относительно лоренцовских вращений в плоскости (x^0, x^3):

$$G^{(n)}(x_1^+, x_1^-, x_{1\perp} \dots x_n^+, x_n^-, x_{n\perp}; y_1^+, y_1^-, y_{1\perp} \dots y_n^+, y_n^-, y_{n\perp}) =$$
$$= S_\lambda G^{(n)}(\lambda x_1^+, \lambda^{-1} x_1^-, x_{1\perp} \dots \lambda x_n^+, \lambda^{-1} x_n^-, x_{n\perp}; \times \qquad /18/$$
$$\times \lambda y_1^+, \lambda^{-1} y_1^-, y_{1\perp} \dots \lambda y_n^+, \lambda^{-1} y_n^-, y_{n\perp}) S_\lambda^{-1}.$$

Матрица S_λ действует на спиновые индексы и реализует преобразование полевых операторов $\Psi_i, \bar{\Psi}_j$. Напомним, что при вращении в плоскости (x^0, x^3) произвольный 4-вектор $A = (A^+, A^-, A_\perp)$ преобразуется по закону:

$$A^+ \to \lambda A^+, \quad A^- \to \lambda^{-1} A^-, \quad A_\perp \to A_\perp.$$

Для двухвременных функций Грина свойство /18/ сохраняется. В результате фурье-образ /16/ является "однородной" функцией переменных P^+, p_i^+, q_j^+:

$$\tilde{G}^{(n)}(P^2, P^+, P_\perp; \dots p_i^+, p_{i\perp} \dots; \dots q_j^+, q_{j\perp} \dots) = \qquad /19/$$
$$= \lambda^{2n-2} S_\lambda \tilde{G}^{(n)}(P^2, \lambda P^+, P_\perp; \dots \lambda p_i^+, p_{i\perp} \dots; \dots \lambda q_j^+, q_{j\perp} \dots) S_\lambda^{-1}.$$

Из /19/ непосредственно следует, что $\tilde{G}^{(n)}$ нетривиальным образом зависит лишь от масштабных переменных η_i и ξ_j /17/.

Рассмотрим преобразование Лоренца, задаваемое двумерным вектором $\mathcal{C}_\perp$

$$A^+ \to A^+; \quad A^- \to A^- + \mathcal{C}_\perp A_\perp + \frac{1}{2} A^+ \mathcal{C}^2; \quad A_\perp \to A_\perp + \mathcal{C}_\perp A^+.$$

Функция Грина /1/ инвариантна относительно этих преобразований. Для фурье-образа 2-временной функции Грина отсюда следует:

$$\tilde{G}^{(n)}(P^2, P_\perp; \dots \eta_i; P_{i\perp} \dots; \xi_j\ q_{j\perp} \dots) =$$
$$= S_{\mathcal{C}_\perp} \tilde{G}^{(n)}(P^2, P_\perp + P^+ \mathcal{C}_\perp; \dots \eta_i, p_{i\perp} + \qquad /20/$$
$$+ p_i^+ \mathcal{C}_\perp \dots \xi_j, q_{j\perp} + q_j^+ \mathcal{C}_\perp \dots) S_{\mathcal{C}_\perp}^{-1}.$$

Выбором $\mathcal{C}_\perp = -\dfrac{P_\perp}{P^+}$ приходим к формуле /17/.

3. *Квазипотенциальные функции Грина свободных частиц*

Рассмотрим функцию Грина одной частицы с произвольным спином. Воспользуемся при этом представлением /15/. Выделяя явным образом в спектральных плотностях $\sigma_{1,2}$ вклады одночастичных состояний, имеем

$$\sigma_1(S, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}) = \sum_i i\delta^{(3)}(\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{q})\theta(p^+)\delta(S - m^2) \langle 0|\Psi(0)|i\underset{\sim}{p}\rangle\langle i\underset{\sim}{p}|\bar{\Psi}(0)|0\rangle,$$
$$\sigma_2(S, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}) = -i\delta^{(3)}(\underset{\sim}{p} - \underset{\sim}{q})\theta(-p^+)\delta(S - m^2)\sum_i \langle 0|\bar{\Psi}(0)|-\underset{\sim}{p}\,i\rangle\langle -\underset{\sim}{p}\,i|\Psi(0)|0\rangle.$$

Обозначая проекционные операторы на состояния с положительной и отрицательной энергиями через $\Lambda^{(+)}$ и $\Lambda^{(-)}$, соответственно

$$\Lambda^{(+)}(\underset{\sim}{p}) = \sum_i \langle 0|\Psi(0)|\underset{\sim}{p}i\rangle\langle i\underset{\sim}{p}|\bar{\Psi}(0)|0\rangle,$$
$$\Lambda^{(-)}(\underset{\sim}{p}) = \sum_i \langle 0|\bar{\Psi}(0)|-\underset{\sim}{p}i\rangle\langle i-\underset{\sim}{p}|\Psi(0)|0\rangle,$$

одночастичный пропагатор в полюсном приближении можно переписать в виде

$$S(p) = \tilde{G}_0^{(1)}(p) = i\frac{\theta(p^+)\Lambda^{(+)}(\underset{\sim}{p}) \pm \theta(-p^+)\Lambda^{(-)}(\underset{\sim}{p})}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \qquad /21/$$

Аналогичным образом можно вычислить квазипотенциальный пропагатор $\tilde{G}_0^{(2)}$ двух свободных частиц с произвольными спинами, учитывая вклады только двухчастичных состояний в $\sigma_{1,2}$

$$\tilde{G}_0^{(2)}(P;\underset{\sim}{p}_1,\underset{\sim}{q}_1) = \frac{2\pi i}{|P^+|^2}\delta^{(2)}(p_{1\perp}-q_{1\perp})\delta(\xi_1-\eta_1)\theta(\eta_1)\theta(1-\eta_1)\times$$
$$\times\frac{\theta(P^+)\Lambda_1^{(+)}(\underset{\sim}{p}_1)\Lambda_2^{(+)}(\underset{\sim}{p}_2) \pm \theta(-P^+)\Lambda_1^{(-)}(\underset{\sim}{p}_1)\Lambda_2^{(-)}(\underset{\sim}{p}_2)}{[P^2 + P_\perp^2 - \sum^{2}\frac{p_{j\perp}^2 + m_j^2}{\eta_j} + i\epsilon]\eta_1\eta_2}, \qquad /22/$$

где $p_2 = P - p_1$. В общем случае n-частиц свободная "двухвременная" функция Грина имеет вид:

$$G_0^{(n)}(P^2;\underset{\sim}{p}_1\ldots\underset{\sim}{p}_n;\underset{\sim}{q}_1\ldots\underset{\sim}{q}_n) =$$
$$= i\frac{(2\pi)^{n-1}}{|P^+|^{2n-1}}\prod_{j=1}^{n}\frac{\delta^{(2)}(p_{j\perp}-q_{j\perp})\delta(\eta_j-\xi_j)\theta(\eta_j)}{\eta_j}\times \qquad /23/$$
$$\times\frac{\theta(P^+)\prod_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(+)}(\underset{\sim}{p}_j) \pm \theta(-P^+)\prod_{j=1}^{n}\Lambda_j^{(-)}(\underset{\sim}{p}_j)}{P^2 - \sum_{j=1}^{n}\frac{(p_{j\perp} - \eta_j P_\perp)^2 + m_j^2}{\eta_j} + i\epsilon}.$$

4. Уравнения для системы двух частиц

Из предыдущего рассмотрения видно, что как свободные, так и полные двухвременные функции Грина обладают проекционными свойствами по масштабным переменным η_i, ξ_i. Именно, они отличны от нуля лишь в области $0 < \eta_i$, $\xi_i < 1$.

Кроме того, если частицы обладают спинами, то свободные и полные функции Грина, рассматриваемые как операторы, имеют собственные значения, отличные от нуля лишь в подпространстве, где либо все частицы с положительными энергиями, либо все частицы с отрицательными энергиями. Поскольку, как известно, определение квазипотенциала связано с обращением свободной функции Грина, естественно перейти в подпространство положительных энергий всех частиц. Переход же в подпространство $0 < \eta_i$, $\xi_i < 1$ происходит автоматически, так как вне этой области все величины просто равны нулю.

Определим спроектированную функцию Грина двух частиц

$$g^{(2)}_{i_1 i_2 j_1 j_2}(P^2;\underset{\sim}{p}_1,\underset{\sim}{p}_2;\underset{\sim}{q}_1,\underset{\sim}{q}_2) = \qquad /24/$$
$$= \frac{|P^+|^2}{2\pi i}\bar{U}_1^{(i_1)}(\underset{\sim}{p}_1)\bar{U}_2^{(i_2)}(\underset{\sim}{p}_2)G^{(2)}(P^2;\underset{\sim}{p}_1,\underset{\sim}{p}_2;\underset{\sim}{q}_1,\underset{\sim}{q}_2)U_1^{(j_1)}(\underset{\sim}{q}_1)U_2^{(j_2)}(\underset{\sim}{q}_2).$$

Тогда спроектированная функция Грина двух свободных частиц имеет вид

$$g^{(2)}_{0 i_1 i_2 j_1 j_2}(P^2;\underset{\sim}{p}_1,\underset{\sim}{p}_2,\underset{\sim}{q}_1,\underset{\sim}{q}_2) =$$
$$= \frac{\delta^{(2)}(p_{1\perp}-q_{1\perp})\delta(p_{2\perp}-q_{2\perp})\delta(\eta_1-\xi_1)\delta(\eta_2-\xi_2)\delta_{i_1 i_2}\delta_{j_1 j_2}}{|P^+|\eta_1\eta_2[P - \frac{(p_{1\perp}-\eta_1 P_\perp)^2 + m^2}{\eta_1} - \frac{(p_1 - \eta_1 P_\perp)^2 + m_1^2}{\eta_2}]}.$$

Определим двухчастичный квазипотенциал $V^{(2)}$ в заданном подпространстве

$$V^{(2)} = g_0^{(2)-1} - g^{(2)-1},$$

что дает правило его построения по теории возмущений в квантовой теории поля на нуль плоскости /2*/. Уравнение для функции Грина $g^{(2)}$ в символической операторной форме записи имеет вид

$$g^{(2)} = g_0^{(2)} + g_0^{(2)} V^{(2)} g^{(2)}, \qquad /25/$$

где под произведением подразумевается трехмерное интегрирование

$$\int_0^1 d\eta_1 d\eta_2 \, \delta(\eta_1 + \eta_2 - 1) \int d^{(2)} p_{1\perp} d^{(2)} p_{2\perp} \, \delta(p_{1\perp} + p_{2\perp} - P_\perp).$$

Введем квазипотенциальную T-матрицу вне массовой поверхности $T^{(2)}(P, \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{q})$

$$g^{(2)} = g_0^{(2)} + g_0^{(2)} T^{(2)} g_0^{(2)} \qquad /26/$$

/$\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{q}$ - относительные импульсы двухчастичной системы в начальном и конечном состояниях/.

Как показано в работе /2*/, она совпадает с физической амплитудой рассеяния двух рассматриваемых частиц на массовой поверхности

$$P^2 + P_\perp^2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_{i\perp}^2 + m_i^2}{\eta_i} = \sum_{i=1}^{2} \frac{p_{i\perp}^2 + m_i^2}{\eta_i'} .$$

Уравнение для T-матрицы, согласно /25/ и /26/, имеет вид:

$$T^{(2)} = V^{(2)} + V^{(2)} g_0^{(2)} T^{(2)}. \qquad /27/$$

Рассматривая спектральное представление /15/ для двухчастичной функции Грина и выделяя вклад связанного состояния вблизи соответствующего полюса, имеем

$$g^{(2)}(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{p}') = 2(2\pi)^3 \frac{\Phi_P(\underset{\sim}{p}) \times \bar{\Phi}_P(\underset{\sim}{p}')}{P^2 - M^2 + i\epsilon}, \qquad /28/$$

где $\Phi_P(p)$ - волновая функция связанного состояния с массой $\tilde{M}$ в импульсном представлении :

$$(2\pi)^6 \delta^{(3)}(P - P') \Phi_{P'}^{i_1 i_2}(\underset{\sim}{p}) =$$

$$= P^+ \bar{U}_1^{(i_1)}(\underset{\sim}{p}_1) \bar{U}_2^{(i_2)}(\underset{\sim}{p}_2) \int d\underset{\sim}{x}_1 d\underset{\sim}{x}_2 \, e^{i \sum_{j=1}^{2} \underset{\sim}{p}_j \underset{\sim}{x}_j} \langle 0 | \Psi_1(0 \underset{\sim}{x}_1) \Psi_2(0 \underset{\sim}{x}_2) | P' \rangle .$$

Учитывая /28/ в /25/, получаем уравнение на связанные состояния

$$\left(M^2 + P_\perp^2 - \sum_{i=1}^{2} \frac{p_{i\perp}^2 + m_i^2}{\eta_i}\right) \Phi_P^{i_1 i_2}(\underset{\sim}{p}) =$$

$$= \frac{1}{\eta_1 \eta_2} \sum_{j_1 j_2} \int V_{i_1 i_2 j_1 j_2}^{(2)}(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{p}') \, dp_\perp' \, d\eta' \, \Phi_P^{j_1 j_2}(\underset{\sim}{p}')$$

и условие нормировки

$$\int d\eta \, dp_\perp \, \eta_1 \eta_2 \sum_{i_1 i_2} \bar{\Phi}_P^{i_1 i_2}(\underset{\sim}{p}) \Phi_P^{i_1 i_2}(\underset{\sim}{p}) - \left(\bar{\Phi} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial P^2} \Phi\right) = \frac{1}{2(2\pi)^3} .$$

5. *Структура квазипотенциала системы трех частиц*

Покажем, что квазипотенциал системы трех частиц

$$V = g_0^{-1} - g^{-1} \qquad /29/$$

представляется в виде

$$V(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{p}') = \qquad /30/$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \eta_i \, \delta^{(2)}(p_{i\perp} - p_{i\perp}') \, \delta(\eta_i - \eta_i') \, V_i^{(2)}(P - \bar{p}_i; \underset{\sim}{p}_{k\ell}; \underset{\sim}{p}_{k\ell}') + V_T ,$$

где $V_i^{(2)}$ - двухчастичные квазипотенциалы взаимодействия k -ой и ℓ -ой частиц $(i \neq k \neq \ell \neq i)$, введенные в предыдущем параграфе, а V_T соответствует чисто трехчастичным силам. Здесь для определенности введены импульсные переменные i -ой системы Якоби

$$P = p_1 + p_2 + p_3 ; \quad p_{ik\ell} = \frac{m_i (p_k + p_\ell) - (m_k + m_\ell) p_i}{m_1 + m_2 + m_3} ,$$

$$p_{k\ell} = \frac{m_\ell p_k - m_k p_\ell}{m_\ell + m_k} , \quad \bar{p}_i = (\bar{p}_i = \frac{p_{i\perp}^2 + m_i^2}{p} , p_i^+ , p_{i\perp}) ,$$

(i, k, ℓ) - циклическая перестановка от /1,2,3/

Действительно, четырехмерная функция Грина трех частиц имеет структуру, изображенную следующими диаграммами:

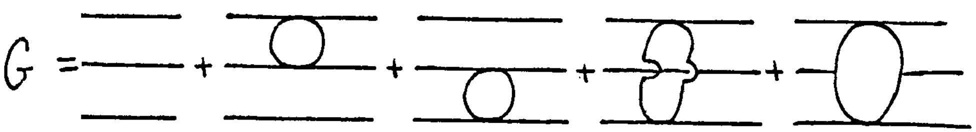

Рис. 1

Здесь блоки соответствуют сумме всех связанных диаграмм. Переходу к квазипотенциальной функции Грина g в импульсном пространстве отвечает интегрирование

$$g(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{p}') = \int dp_{\overline{ijk}}\, dp_{\overline{jk}}\, G(P; p; p')\, dp'_{\overline{ijk}}\, dp'_{\overline{jk}}$$

и вышеуказанное проектирование уже для всех трех частиц.

Произведем эту операцию на одной из двухчастично-связных диаграмм. Для определенности пусть первая частица распространяется свободно

$$g_1(P; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{p}') = \frac{P_+^4}{i\pi^2} \bar{U}_1(\underset{\sim}{p}_1) \bar{U}_2(\underset{\sim}{p}_2) \bar{U}_3(\underset{\sim}{p}_3) \times$$

$$\times \int dp_{\overline{123}}\, dp_{\overline{23}}\, G_{23}^{(2)}(P - p_1; p_{23}; p'_{23})\, S_1(p_1) \delta^{(4)}(p_1 - p'_1) \times$$

$$\times dp'_{\overline{123}}\, dp'_{\overline{23}}\, U_1(\underset{\sim}{p}'_1) U_2(\underset{\sim}{p}'_2) U_3(\underset{\sim}{p}'_3) .$$

Здесь $G_{23}^{(2)}$ - полная функция Грина системы, состоящей из второй и третьей частиц. Используя явный вид одночастичного пропагатора S_1 и спектральное представление /15/ для $g_{23}^{(2)}$, имеем

$$g_{1_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}}(P; \ldots \underset{\sim}{p}; \ldots \underset{\sim}{p}') = \qquad /31/$$

$$= \eta_1^{-1} \delta^{(2)}(p_{1\perp} - p'_{1\perp}) \delta(\eta_1 - \eta'_1) g^{(2)}_{23_{i_2 i_3 j_2 j_3}}(P - \bar{p}; \underset{\sim}{p}; \underset{\sim}{p}') \delta_{i_1 j_1} .$$

Здесь важно отметить, что двухчастичносвязные диаграммы в системе трех частиц выражаются просто через двухчастичную квазипотенциальную функцию Грина со сдвинутой переменной полного 4-импульса, в полной аналогии с нерелятивистским случаем. В обычном одновременном подходе для этого необходимо было дополнительно выделять запаздывающую часть /6/. Именно по этой причине парные взаимодействия в /30/ точно совпадают с двухчастичными квазипотенциалами. Алгоритм построения трехчастичных сил через двух- и трехчастичносвязные диаграммы квантовой теории поля на нуль-плоскости следует из определения /29/ и в символической форме задается в работе /6/.

6. *Волновая функция связанного состояния трех частиц*

Квазипотенциальная функция Грина трех частиц g вблизи полюса связанного состояния $P^2 \approx M^2$ имеет вид

$$g(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{p}') = 4(2\pi)^6 \frac{\chi_P(\underset{\sim}{p}) \times \bar{\chi}_P(\underset{\sim}{p}')}{P^2 - M^2 + i\epsilon} + \text{рег. члены},$$

где $\chi_P(p)$ - квазипотенциальная волновая функция связанного состояния трех частиц в импульсном представлении:

$$(2\pi)^9\delta^{(3)}(\underset{\sim}{P}-\underset{\sim}{P}')\chi^{i_1i_2i_3}(\underset{\sim}{p}) = \qquad /32/$$

$$=(P^+)^2\bar U_1^{(i_1)}(\underset{\sim}{p}_1)\bar U_2^{(i_2)}(\underset{\sim}{p}_2)\bar U_3^{(i_3)}(\underset{\sim}{p}_3)\int e^{i\sum_j \underset{\sim}{p}_j\underset{\sim}{x}_j}\langle 0|\prod_{j=1}^{3}\Psi_j(0\underset{\sim}{x}_j)|P\rangle\prod_{j=1}^{3}d\underset{\sim}{x}_j\,.$$

Рассматривая уравнение для g, $g=g_0+g_0Vg$ вблизи этого полюса, получаем уравнение для волновой функции /31/

$$(P^2+P_\perp^2-\sum_i^3\frac{p_{i\perp}^2+m_i^2}{\eta_i})\chi_P^{i_1i_2i_3}(\underset{\sim}{p}) = \qquad /33/$$

$$=\frac{1}{\eta_1\eta_2\eta_3}\int\sum_{j_1j_2j_3}V_{i_1i_2i_3j_1j_2j_3}(P;\underset{\sim}{p};\underset{\sim}{p}')dp'_{1\perp}dp'_{2\perp}d\eta'_1d\eta'_2\chi^{j_1j_2j_3}(\underset{\sim}{p}')$$

и условие нормировки

$$\sum_{i_1i_2i_3}\int|\chi_P^{i_1i_2i_3}(\underset{\sim}{p})|\eta_1\eta_2\eta_3dp_{1\perp}dp_{2\perp}d\eta_1d\eta_2+(\bar\chi_P\frac{\partial V}{\partial P^2}\chi_P) =$$

$$=\frac{1}{4(2\pi)^6}\,.$$

Как известно, уравнение /32/ не является математически корректным из-за сингулярности ядра, поэтому приведем его к виду уравнений Фаддеева. В приближении парных взаимодействий имеем

$$\chi_P(\underset{\sim}{p})=\sum_{i=1}^{3}\chi_P^i(\underset{\sim}{p}),$$

$$(P^2-\sum_{i=1}^{3}\frac{(p_{i\perp}-\eta_iP_\perp)^2+m_i^2}{\eta_i})\chi_i(\underset{\sim}{p}) =$$

$$=\sum_{j\neq i}\int\frac{1}{\eta_j\eta_k}T_i^{(2)}(P-\bar p_i;\underset{\sim}{p}_{jk},\underset{\sim}{p}'_{jk})\delta^{(2)}(p_{i\perp}-p'_{i\perp})\delta(\eta_i-\eta'_i)\times$$

$$\times\chi_j(\underset{\sim}{p}')d^{(2)}p'_{1\perp}d^{(2)}p'_{2\perp}d\eta'_1d\eta'_2\,,$$

где $T_i^{(2)}$ - амплитуда рассеяния j-ой и k-ой частиц вне массовой поверхности, определенная уравнением /27/. Волновые функции связанных состояний двух и трех частиц, введенные выше, могут быть использованы, в частности, для изучения формфакторов и амплитуд рассеяния релятивистских составных систем.

7. Амплитуды рассеяния в трехчастичной системе

В случае двух частиц, имея выражение для функции Грина, можно определить T-матрицу формулой /26/, которая на массовой поверхности дает физическую амплитуду рассеяния. В случае задачи трех частиц можно построить аналогичные T-матрицы, соответствующие возможным 16 процессам. Среди этих процессов имеется упругое рассеяние трех частиц, квазиупругое рассеяние на связанном состоянии, а также развал связанных состояний. В случае упругого рассеяния T-матрица определяется обычным образом:

$$g=g_0+g_0Tg_0.$$

На массовой поверхности

$$P^2=\sum_{j=1}^{3}\frac{(p_{j\perp}-\eta_jP_\perp)^2+m_j^2}{\eta_j}=\sum_{j=1}^{3}\frac{(q_{j\perp}-\xi_jP_\perp)^2+m_j^2}{\xi_j}$$

она дает физическую амплитуду упругого рассеяния трех частиц. Ниже мы покажем, что определенная нами двухвременная функция Грина трех частиц содержит в себе полную информацию не только об упругом рассеянии трех частиц, но и о процессах, в которых принимают участие связанные состояния. В общем случае определяются шестнадцать операторов перехода из состояния (β) в состояние (α) / α,β = 0,1,2,3/ * $A_{\alpha,\beta}(P^2,\underset{\sim}{p}_1,\underset{\sim}{p}_2,\underset{\sim}{p}_3;\underset{\sim}{q}_1,\underset{\sim}{q}_2,\underset{\sim}{q}_3)$

---

* $\alpha=0$ соответствует состоянию трех свободных частиц, α = 1,2,3 - α-ая частица свободна, а две оставшихся связаны между собой.

$$A_{\alpha\beta} = g_\alpha^{-1} g g_\beta^{-1} - \delta_{\alpha\beta} g_\alpha^{-1}, \qquad /34/$$

где g_0 - свободная квазипотенциальная функция Грина трех частиц, $g_i (i = 1,2,3)$ - двухчастичная функция Грина взаимодействующих j-ой и k-ой частиц /31/.

Тогда матрицы рассеяния $T_{\alpha,\beta}$, соответствующие этим переходам $(\beta) \to (\alpha)$, записываются в виде

$$T_{i',i}(P, \underset{\sim}{p}_{i'}, \underset{\sim}{q}_i) =$$

$$= \int \bar{\Phi}^{(2)}_{i' \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{p}_i}(\underset{\sim}{p}_{j'k'}) d\underset{\sim}{p}_{j'k'} A_{i'i}(P^2, \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}) d\underset{\sim}{q}_{jk} \Phi^{(2)}_{iP - \underset{\sim}{q}_i}(\underset{\sim}{q}_{jk}), \qquad /35/$$

$$T_{0i}(P^2, \underset{\sim}{p}_1, \underset{\sim}{p}_2; \underset{\sim}{q}_i) = \int A_{0i}(P^2; \underset{\sim}{p}_1, \underset{\sim}{p}_2; \underset{\sim}{q}_i, \underset{\sim}{q}_{jk}) d\underset{\sim}{q}_{jk} \Phi^{(2)}_{i\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{q}_i}(\underset{\sim}{q}_{jk}),$$

где $\Phi^{(2)}_{i\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{p}_i}(\underset{\sim}{p}_{jk})$ - волновая функция связанного состояния j-ой и k-ой частиц, определенная в §4. При переходе должным образом на массовую поверхность выписанные T-матрицы совпадают с физическими амплитудами рассеяния. Отметим, что, например, процессу дезинтеграции связанного состояния в результате столкновения с третьей частицей $(1,2)+3 \to 1+2+3$ соответствует следующее условие массовой поверхности:

$$P^2 = \Sigma \frac{(p_{i\perp} - \eta_i P_\perp)^2 + m_i^2}{\eta_i} = \frac{(q_{3\perp} - \xi_3 P_\perp)^2 + m_3^2}{\xi_3} + \frac{(q_{3\perp} - \xi_3 P_\perp)^2 + M_{12}^2}{1 - \xi_3}. \qquad /36/$$

На примере этого же процесса продемонстрируем справедливость последнего утверждения. Действительно, можно показать, что "двухвременная" функция Грина трех частиц имеет различные полюса, соответствующие вкладу какого-либо определенного начального и конечного состояний. В частности, вблизи полюса, соответствующего начальному состоянию $(1,2)+3$ и конечному $1+2+3$, она имеет вид

$$g(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}) \sim$$

$$\sim \frac{F_{03}(\underset{\sim}{p}_1, \underset{\sim}{p}_2, \underset{\sim}{p}_3, \underset{\sim}{q}_3) \times \bar{\Phi}^{(2)}_{3\underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{q}_3}(\underset{\sim}{q}_{12})}{(P^2 + P_\perp^2 - \Sigma \frac{p_{i\perp}^2 + m_i^2}{\eta_i})(P^2 + P_\perp^2 - \frac{q_{3\perp}^2 + m_3^2}{\xi_3} - \frac{(q_{1\perp} + q_2)^2 + M_{12}^2}{1 - \xi_3})},$$

где F_{03} - физическая амплитуда рассматриваемого процесса дезинтеграции.

С другой стороны, переписывая определение /34/ в виде

$$g = \delta_{\alpha\beta} g_\alpha + g_\alpha A_{\alpha\beta} g_\beta$$

и учитывая полюсный вклад связанного состояния в двухчастичную функцию Грина g_3, нетрудно видеть, что матрица рассеяния T_{03} на массовой поверхности /36/ совпадает с физической амплитудой F_{03}.

Для матриц перехода можно получить уравнения, исходя из определения /34/ и уравнения для трехчастичной двухвременной функции Грина

$$A_{\alpha\beta} = (1 - \delta_{\alpha\beta}) g_0^{-1} + \delta_{\beta 0} V_T + \sum_{\gamma \neq \beta} A_{\alpha\gamma} g_0 T_\gamma + A_{\alpha 0} g_0 V_T,$$

где

$$T_i(P; \underset{\sim}{p}, \underset{\sim}{q}) = \eta_i \delta^{(2)}(\bar{p}_{i\perp} - q_{i\perp}) \delta(\eta_i - \xi_i) T^{(2)}(P - \bar{p}_i; \underset{\sim}{p}_{jk}; \underset{\sim}{q}_{jk}), \quad i = 1,2,3.$$

$$T_0 = 0$$

Важно заметить, что ядрами полученной системы уравнений в приближении парных взаимодействий $V_T = 0$ являются просто двухчастичные амплитуды рассеяния вне массовой поверхности. Двухчастичные квазипотенциалы в них в явном виде не фигурируют.

Отметим, что исследование структуры квазипотенциала для системы многих частиц и получение многочастичных уравнений можно провести аналогично, учитывая, что выражение для свободной функции Грина n частиц произвольного спина нами уже получено /23/.

В заключение отметим важность трансформационных свойств /19/, /20/, полученных нами для двухвременных функций Грина. Нетрудно видеть, что аналогичными свойствами обладают квазипотенциалы, амплитуды рассеяния вне массовой поверхности, а также волновые функции связанных состояний. Используя их, можно значительно упростить задачу определения ядер трехчастичных уравнений в приближении парных взаимодействий. В частности, с этой целью рассмотрение §4 достаточно проводить в системе, где полный поперечный импульс двух частиц равен нулю, несмотря на то, что в трехчастичных уравнениях он произволен.

Авторы выражают глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логунову, а также В.Г.Кадышевскому, Р.М.Мир-Касимову, А.Н.Сисакяну, Л.А.Слепченко за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963).*
2. *V.A.Matveev, R.N.Muradyan, A.N.Tavkhelidze. JINR preprints, E2-3498, Dubna, 1967; P2-3900, Dubna, 1968;*
   V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968);
   C.Fronsdal, L.E.Lundberg. Phys.Rev., D1, 3247(1970).
   А.А.Логунов и др. ТМФ, 6, 157 /1971/.
   I.Todorov. Phys.Rev., D3, 2351 (1971).
   R.N.Faustov. Ann.Phys., 78, 176 (1973).
   В.Р.Гарсеванишвили и др. ТМФ, 23, 3 /1975/;
   * *А.А.Хелашвили. Препринт ОИЯИ, Р2-8750, Дубна, 1975.*
3. *D.Stoyanov, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 13, 76(1964).*
   V.Shelest, D.Stoyanov. Phys.Lett., 13, 253 (1964).
   А.Н.Квинихидзе, Д.Цв.Стоянов. ТМФ, 3, №3, 332 /1970/; ТМФ, 11, №1, 23 /1972/.
   В.М.Виноградов. ТМФ, 8, 343 /1971/.
   А.А.Архипов, В.И.Саврин. Препринт ИТЭФ, СТФ СТФ 72-19 /1972/.
4. *S.Weinberg. Phys.Rev., 150, 1313 (1966).*
   S.P.Kuleshov, A.N.Kvinikhidze, V.A.Matveev, A.N.Sissakian, L.A.Slepchenko. JINR preprint, E2-8128, Dubna, 1974.
   J.F.Gunion, S.J.Brodsky, R.Blankenbechler. Phys.Rev., D8, 287 (1973).
5. *P.A.M.Dirac. Rev.Mod.Phys., 21, 392 (1949).*
   F.Rohrlich. Acta Phys.Austr., 32, 87 (1970).
   H.Leutwyler. Nucl.Phys., B76, 413 (1974).
6. *А.Н.Квинихидзе, Д.Цв.Стоянов. Лекции на Школе молодых ученых, Сухуми /1972/; препринт ОИЯИ, Р2-8667, Дубна, 1972, стр. 215.*

Рукопись поступила в издательский отдел
13 февраля 1976 года.