12/XII-83

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

64/12/83

Д2-83-626

А.Е.Дорохов

КОВАРИАНТНОЕ КВАНТОВАНИЕ МОДЕЛИ МЕШКОВ

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена построению лоренц-ковариантных решений модели мешков. Как известно, первым вариантом этой модели явилась модель квазинезависимых кварков [1], в рамках которой удалось получить совпадающие с экспериментом теоретические значения магнитного момента протона, отношения аксиальной константы связи к векторной и ряда других статических величин. В этой модели предполагается, что релятивистские кварки находятся в замкнутой конечной области пространства, где они движутся квазинезависимым образом. Позднее эта модель получила свое дальнейшее развитие в работе [2], где ей была придана релятивистски-инвариантная формулировка. Благодаря учету дополнительных типов взаимодействия между кварками для большого числа величин, характеризующих статические свойства адронов, было найдено хорошее согласие результатов вычислений [3] с экспериментальными данными.

Эти результаты были получены в статическом приближении модели мешков, в котором поверхность мешка считается неподвижной. Из-за наличия классического объекта /мешка/ нарушается исходная релятивистская инвариантность. Последнее обстоятельство приводит в данном приближении к несохранению импульса [4], что, в свою очередь, обусловливает ряд трудностей при описании в модели мешков структурных функций рассеяния. Так, структурные функции, вычисленные в статическом приближении, не обращаются в нуль в кинематически запрещенной области $x > 1$, где $x = -q^2/2pq$ - скейлинговая переменная. Для решения этой проблемы авторы работы [5], используя результаты вычисления формфакторов нуклонов в точно решаемой двумерной модели мешков [6], предложили исправить этот недостаток путем формальной замены в формулах статического приближения аргумента структурной функции $x \to -\ln(1-x)$. В [7] было показано, что эта замена и, кроме того, появление перед структурной функцией общего множителя $\frac{\theta(1-x)}{1-x}$, связанного с лоренцевым сокращением, обусловлены требованием восстановления трансляционной инвариантности модели. Там же [7] высказано предположение о справедливости отмеченных выше изменений и для четырехмерной модели мешков. Учет эффектов, обусловленных движением мешка как целого, оказывается важным при вычислении масс адронов [8,9], магнитных моментов барионов [10], распада протона [11] и других статических свойств адронов.

В настоящей работе будет построено явно релятивистски-ковариантное приближенное решение модели мешков. Для этой цели мы воспользуемся методом канонических преобразований Н.Н.Боголюбова, впервые примененным им для решения задачи полярона /12/. Теоретико-групповая формулировка метода и дальнейшее его применение были разработаны в /13-15/. Из работ /16-18/ этот метод известен также под названием метода коллективных координат. Главная особенность метода канонических преобразований Н.Н.Боголюбова заключается в том, что он позволяет строить решения квантовых моделей, точно учитывая исходные симметрии модели.

Нам необходимо развить теорию, явно учитывающую исходную симметрию модели мешков относительно группы Пуанкаре. Подход к решению этой проблемы на основе метода Н.Н.Боголюбова предложен в /19,20/, где была подробно рассмотрена ковариантная квазиклассическая теория возмущений для случая двумерного действительного скалярного самодействующего поля. В этой связи следует отметить работы /21,22/, где также исследована проблема построения ковариантного решения в теориях с нетривиальным классическим решением.

Ниже, пользуясь методом канонических преобразований Н.Н.Боголюбова, мы строим ковариантные приближенные решения модели мешков для скалярного заряженного двумерного поля /раздел 2/ и для спинорного четырехмерного поля /раздел 3/.

2. КВАНТОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Для того чтобы пояснить используемый метод, мы начнем с рассмотрения простейшего случая двумерного скалярного заряженного поля. Как было указано выше, здесь удается найти точное решение модели /2/. В работах /23,24/ произведено квазиклассическое нековариантное квантование в окрестности статического решения. В отличие от методов квантования /23,24/ в нашей работе для построения ковариантного решения используется не гамильтонова, а лагранжева формулировка теории. Для построения решения нам будет удобно воспользоваться "регуляризованной" формулировкой модели мешков, предложенной в работах /25,26/. В лагранжиан модели / g - формальный параметр/:

$$\mathfrak{L}(x,t) = \frac{1}{g}\Big[\partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi + \frac{1}{2}\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - V(\sigma) - h^2\sigma^2\Phi^*\Phi\Big], \qquad /1/$$

входят заряженное скалярное поле $\Phi(x,t)$, соответствующее кварковым степеням свободы, и действительное скалярное поле $\sigma(x,t)$, описывающее мешок. В /1/ $V(\sigma)$ является полиномом 4-й степени, задающим самодействие поля σ:

$$V(\sigma) = a\sigma^4 + b\sigma^3 + c\sigma^2 + p.$$

Предполагается, что $V(\sigma)$ имеет два минимума: локальный минимум при $\sigma \equiv 0$, $V(0) = p$, где p - внешнее давление вакуума, и абсолютный минимум при $\sigma(x,t) \equiv \bar\sigma$, $V(\bar\sigma) = 0$. Такое представление физически соответствует предположению о существовании двух фаз вакуума: внутри $(\sigma \equiv 0)$ и вне $(\sigma = \bar\sigma)$ адрона. Кроме того, относительно поведения $V(\sigma)$ предполагается, что $V(\sigma) = O(m^2)$, где σ отлична от нуля и $\bar\sigma$ /m - масса σ -поля/, считается также, что h^2, $m^2 \gg p$, $g \ll 1$, $c > 0$. Поле σ регуляризует модель мешков в том смысле, что стенки мешка имеют конечную толщину $\Delta\ell \sim 1/m$, причем поля Φ и σ определены на всем пространстве-времени и удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям:

$$[\sigma(x,t), \dot\sigma(y,t)] = ig\delta(x-y), \qquad /2/$$

$$[\Phi(x,t), \dot\Phi^+(y,t)] = ig\delta(x-y). \qquad /3/$$

Все остальные одновременные коммутаторы между полями Φ, Φ^+, σ, $\dot\Phi$, $\dot\Phi^+$ и $\dot\sigma$ равны нулю.

По теореме Нетер построим выражения для генераторов симметрий модели:

временных и пространственных трансляций:

$$\check{H}(\sigma,\Phi) = g^{-1}\int dx\, \check{\mathcal{H}}(x,t), \qquad /4/$$

где

$$\check{\mathcal{H}}(x,t) = \frac{1}{2}\dot\sigma^2 + \frac{1}{2}(\sigma')^2 + V(\sigma) + \dot\Phi^+\dot\Phi + \Phi'^+\Phi' + h^2\sigma^2\Phi^+\Phi,$$

$$\check{P}(\sigma,\Phi) = -g^{-1}\int dx\,\{\sigma'\dot\sigma + \Phi^{+\prime}\dot\Phi + \dot\Phi^+\Phi'\}, \qquad /5/$$

лоренцевых преобразований:

$$\check{L}(\sigma,\Phi) = g^{-1}\int dx\, x\, \check{\mathcal{H}}(x,t) - t\check{P}(\sigma,\Phi), \qquad /6/$$

преобразований зарядовой симметрии:

$$\check{Q}(\Phi) = ig^{-1}\int dx(\Phi^+\dot\Phi - \dot\Phi^+\Phi). \qquad /7/$$

Рассмотрим классические уравнения движения, соответствующие лагранжиану модели /1/:

$$-\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x^2} + 2h^2|\Phi_0|^2\sigma_0 + V'(\sigma_0) = 0,$$

$$-\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} + h^2\sigma_0^2\Phi_0 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_0 = 0. \qquad /8/$$

Статическое классическое решение системы уравнений /8/

$$\Phi_0(x,t) = \Phi_0 \cos\omega x \quad e^{-i\omega t} + o\left(\frac{1}{h}\right),\quad \omega = \frac{\pi}{\ell},\quad |x| < \frac{1}{2}\ell,$$

$$\sigma_0(x) \simeq 0;$$

$$\Phi_0(x,t) = o\left(\frac{1}{h}\right),\quad |x| > \frac{1}{2}\ell, \qquad /9/$$

$$\sigma_0(x) \simeq \bar{\sigma}$$

обладает энергией

$$E_0 = \omega Q_0 + \frac{p\ell}{g} + S, \qquad /10/$$

где Q_0 - классическое значение заряда:

$$Q_0 = 2\frac{\omega}{g}\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx |\Phi_0(x,t)|^2. \qquad /11/$$

Размер статического мешка ℓ определяется из условия минимума энергии E_0 /10/:

$$Q_0 \frac{d\omega}{d\ell} + \frac{p}{g} = 0.$$

В выражение для E_0 входит поверхностная энергия мешка S, пропорциональная квадрату величины скачка поля σ_0 на поверхности мешка:

$$S = \frac{1}{2g}\int \left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}\right)^2 dx \sim m\bar{\sigma}^2.$$

В дальнейшем будет рассматриваться предел теории при $m^2/p \to \infty$, $S \to 0$, что соответствует /25,26/ MIT-варианту модели мешков /2/.

Основной идеей метода преобразования Боголюбова является переход к новым динамическим переменным, среди которых имеются дополнительные переменные, являющиеся параметрами группы симметрии модели. Условия связи с необходимостью возникают как требование сохранения числа независимых переменных до и после преобразования. В нашем случае в качестве дополнительных переменных вводятся координаты τ и q, соответствующие временной и пространственной трансляциям, θ, соответствующая лоренцевым вращениям, и переменная ϕ, связанная с зарядовыми преобразованиями.

Для того чтобы произвести указанную замену переменных, рассмотрим, следуя работе /19/, абстрактную алгебру Ли $\mathfrak{A}$ эрмитовых операторов H, P, K, L с умножением Ли вида

$$[H,P] = 0,\ [H,K] = igH,\ [P,K] = igP, \qquad /12/$$
$$[K,L] = 0,\ [L,H] = igP,\ [L,P] = igH.$$

Требование ковариантности определяет пару функций от x, t со значениями в алгебре $\mathfrak{A}$:

$$\hat{\xi}(x,t) = Hx - Pt - L, \qquad /13/$$

$$\hat{\tau}(x,t) = Ht - Px - K, \qquad /14/$$

которые обладают двумя важными свойствами: они функционально независимы:

$$[\hat{\xi}(x,t), \hat{\tau}(x,t)] = 0, \qquad /15/$$

а также удовлетворяют законам преобразования:

$$\exp\left[\frac{i}{g}(t_0H - Px_0)\right]\hat{\xi}(x,t)\exp\left[-\frac{i}{g}(Ht_0 - Px_0)\right] = \hat{\xi}(x+x_0, t+t_0),$$

$$\exp\left(\frac{i}{g}L\theta_0\right)\hat{\xi}(x,t)\exp\left(-\frac{i}{g}L\theta_0\right) = \hat{\xi}(x\,\mathrm{ch}\theta_0 + t\,\mathrm{sh}\theta_0,\ x\,\mathrm{sh}\theta_0 + t\,\mathrm{ch}\theta_0), \qquad /16/$$

$$\exp\left(\frac{i}{g}K\lambda\right)\hat{\xi}(x,t)\exp\left(-\frac{i}{g}K\lambda\right) = \hat{\xi}(e^{\lambda}x, e^{\lambda}t),$$

и совершенно аналогичным соотношениям для $\hat{\tau}(x,t)$. Кроме того, введем эрмитовый оператор Q, коммутирующий с алгеброй $\mathfrak{A}$ и являющийся сопряженным с переменной ϕ:

$$[Q, \phi] = i. \qquad /17/$$

Произведем замену полевых переменных:

$$\Phi(x,t) = \tilde{\Phi}(\hat{\xi},\hat{\tau},\hat{\phi}) \equiv \int df\,d\omega\, e^{iZ(f,\omega|\hat{\xi},\hat{\tau})}\,\tilde{\Phi}(f,\omega)\,e^{i\hat{\phi}},$$

$$\Phi^+(x,t) = \tilde{\Phi}^+(\hat{\xi},\hat{\tau},\hat{\phi}) \equiv \int df\,d\omega\, e^{-iZ(f,\omega|\hat{\xi},\hat{\tau})}\,\tilde{\Phi}^+(f,\omega)\,e^{-i\hat{\phi}}, \qquad /18/$$

$$\sigma(x,t) = \tilde{\sigma}(\hat{\xi},\hat{\tau}) \equiv \int df\,d\omega\, e^{iZ(f,\omega|\hat{\xi},\hat{\tau})}\,\tilde{\sigma}(f,\omega),$$

где обозначено $Z(f,\omega|\hat{\xi},\hat{\tau}) = \omega\hat{\tau}(x,t) - f\hat{\xi}(x,t)$.

Замена /18/ такова, что при преобразованиях симметрии изменяется лишь экспоненциальный множитель, при этом они не затрагивают новых полевых переменных $\tilde{\Phi}(f, \omega)$, $\tilde{\sigma}(f, \omega)$. Другими словами, операторы $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\sigma}$ коммутируют с алгеброй $\mathcal{Q}$ и операторами Q и $\hat{\phi}$, а пространство векторов состояния представляет собой прямое произведение пространства представления алгебры $\mathcal{Q}$ и Q и пространства состояний полей $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\sigma}$. Благодаря свойству независимости /15/ переменных $\hat{\xi}(x, t)$, $\hat{r}(x, t)$ и $\hat{\phi}$ не возникает проблемы с упорядочением операторов в выражениях /18/. В силу соотношений /16,17/ и коммутативности $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\sigma}$ с операторами $\mathcal{Q}$, Q и $\hat{\phi}$ имеем

$$\exp[\frac{i}{g}(Ht_0 - Px_0)]\Phi(x, t)\exp[-\frac{i}{g}(Ht_0 - Px_0)] = \Phi(x + x_0, t + t_0),$$

$$\exp[\frac{i}{g}L\theta_0]\Phi(x, t)\exp[-\frac{i}{g}L\theta_0] = \Phi(x\,\mathrm{ch}\theta_0 + t\,\mathrm{sh}\theta_0, x\,\mathrm{sh}\theta_0 + t\,\mathrm{ch}\theta_0), \qquad /19/$$

$$\exp[\frac{i}{g}K\lambda]\Phi(x, t)\exp[-\frac{i}{g}K\lambda] = \Phi(e^{\lambda}x, e^{\lambda}t),$$

$$\exp[iQ\phi_0]\Phi(x, t)\exp[-iQ\phi_0] = e^{i\phi_0}\Phi(x, t).$$

Следовательно, операторы H, P, K, L и Q при замене /18/ становятся генераторами пространственно-временных трансляций, лоренцевых, масштабных и зарядовых преобразований. Отождествление этих операторов с выражениями соответствующих генераторов /4-7/, построенных по полям $\Phi(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ с помощью теоремы Нетер, дает операторные связи, которые и обеспечивают сохранение числа независимых переменных до и после преобразования /18/. Они имеют следующий вид:

$$C_H \equiv H - \check{H}(\sigma, \Phi) = 0, \qquad /20а/$$

$$C_P \equiv P - \check{P}(\sigma, \Phi) = 0, \qquad /20б/$$

$$C_L \equiv L - \check{L}(\sigma, \Phi) = 0, \qquad /20в/$$

$$C_Q \equiv Q - \check{Q}(\Phi) = 0, \qquad /20г/$$

где операторы $\check{H}$, $\check{P}$, $\check{L}$, $\check{Q}$ определены выражениями /4-7/, в которых поля σ, Φ заданы в новых переменных по формулам /18/. Так как теория, заданная лагранжианом /1/, не инвариантна относительно масштабных преобразований, то связь, соответствующая этим преобразованиям, не определена.

В целях удобства дальнейших вычислений и разрешения условий связи /20/ сделаем замену полей, которая явно выделяет фазу стационарного классического решения:

$$\Phi(x, t) \to e^{-i\omega t}\Phi(x, t); \quad \Phi^+(x, t) \to \Phi^+(x, t)e^{i\omega t}.$$

При этом коммутационные соотношения /3/ не изменят своего вида, а связи перепишем в форме

$$C'_H \equiv H - \check{H}(\sigma, \Phi) + \frac{\omega^2}{g}\int dx\,\Phi^+\Phi = 0, \qquad /21/$$

$$C'_P \equiv P - \check{P}(\sigma, \Phi) - \frac{i\omega}{g}\int dx[\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\Phi - \Phi^+\frac{\partial\Phi}{\partial x}] = 0,$$

$$C'_L \equiv L - \check{L}(\sigma, \Phi) - \frac{\omega}{g}\int dx\{x[-\omega\Phi^+\Phi] + \qquad /22/$$

$$+ it[-\frac{\partial\Phi^+}{\partial x}\Phi + \Phi^+\frac{\partial\Phi}{\partial x}]\} = 0,$$

$$C'_Q \equiv Q - \check{Q}(\Phi) - \frac{\omega}{g}\int dx\,\Phi^+\Phi = 0.$$

Связи /22/ в общем виде можно записать как

$$C'_\alpha = C_\alpha + B_\alpha,$$

где C_α по форме совпадают с /20/, а B_α являются третьими слагаемыми в /22/. Вместо связей C'_α введем новые условия связи:

$$C_\alpha = 0, \quad \alpha = P, L, Q. \qquad /23/$$

Чтобы теория при этом не изменилась, необходимо сделать преобразование:

$$\check{H}(\sigma, \Phi) \to \check{H}'(\sigma, \Phi) = \check{H}(\sigma, \Phi) + \sum_{\alpha = P,L,Q} u_\alpha [B_\alpha(\sigma, \Phi)]^2, \qquad /24/$$

где u_α определяются из условия выполнения /23/.

Вывод формул /23/, /24/, реализующих преобразование $\check{H}$, $C'_\alpha \to \check{H}'$, C_α, содержится в приложении 1.

Сделаем еще два замечания относительно условий /20/. Во-первых, естественно рассматривать их на векторе состояния $|\psi\rangle$. В противном случае возникает противоречие с требованием о независимости $\hat{\mathcal{Q}}$ и $\tilde{\Phi}$. Во-вторых, в работе [19] показано, что выбор переменных $\hat{\xi}(x, t)$, $\hat{r}(x, t)$ в виде /13/, /14/ соответствует представлению алгебры $\mathcal{Q}$, которое выделяет группу трансляций. Группа трансляций является непрерывной двухпараметрической группой, поэтому из связей, обусловленных преобразованиями пространства x, t, лишь две являются независимыми. Ниже на конкретном расчете будет видно, что связь C_L выполняется тождественно при выполнении связей C'_H и C_P /как обычно, под словом связь C_α мы понимаем само условие $C_\alpha \psi = 0$/.

Наряду со связями C_α необходимо также потребовать выполнения на векторе состояния $|\psi>$ канонических коммутационных соотношений /2,3/, в которых поля σ и Φ выражены через новые переменные:

$$[\sigma(\hat{\xi}(x,t),\hat{r}(x,t)),\ \partial_t \sigma(\hat{\xi}(y,t),\hat{r}(y,t))]|\psi> = ig\delta(x-y)|\psi>,$$
$$[\Phi(\hat{\xi}(x,t),\hat{r}(x,t)),\ \partial_t \Phi^+(\hat{\xi}(y,t),\hat{r}(y,t))]|\psi> = ig\delta(x-y)|\psi>. \qquad /25/$$

Остальные одновременные коммутаторы на векторе состояния $|\psi>$ обращаются в нуль.

Рассмотрим, какой вид принимают квантовые уравнения движения в новых переменных. Для этого удобно в выражениях для полей /18/ представить оператор $\exp[iZ(f,\omega|\hat{\xi},\hat{r})]$ в форме

$$\exp[iZ(f,\omega|\hat{\xi},\hat{r})] \equiv \exp[i(\omega\hat{r}(x,t) - f\hat{\xi}(x,t))] =$$
$$= \exp\{i[\frac{x+t}{2}(H-P)\frac{1-e^{-g(\omega-f)}}{g} + \frac{-x+t}{2}(H+P)\frac{1-e^{-g(\omega+f)}}{g}]\}\, e^{-i(\omega K - fL)}, \qquad /26/$$

что можно получить, используя алгебраические соотношения /12/ и применяя стандартные формулы "распутывания" операторных экспонент. На основе /26/ уже нетрудно получить формулы дифференцирования в новых переменных:

$$\partial_t^2 - \partial_x^2 \to -2\frac{\hat{M}^2}{g^2} e^{ig\partial_r}(\cos(g\partial_r) - \cos(g\partial_\xi)), \qquad /27/$$

где $\hat{M}^2 = H^2 - P^2$,

$$\partial_t \Phi(x,t) = \{H\partial_r - P\partial_\xi + ig[\frac{H}{2}(\partial_r^2 + \partial_\xi^2) + P\partial_{r\xi}^2] + O(g^2)\}\tilde{\Phi}(\xi,r),$$

$$\partial_x \Phi(x,t) = \{H\partial_\xi - P\partial_r + ig[H\partial_{r\xi}^2 + \frac{P}{2}(\partial_r^2 + \partial_\xi^2)] + O(g^2)\}\tilde{\Phi}(\xi,r).$$

С учетом /27/ система квантовых уравнений движения для полей Φ и σ, являющаяся следствием условий связи /23/, /24/ и соотношений /25/, имеет вид

$$<\psi'|[-2\frac{\hat{M}^2}{g}e^{ig\partial_r}(\cos g\partial_r - \cos g\partial_\xi)\sigma + V'(\sigma) + 2h^2\sigma\Phi^+\Phi](\xi(x,t),$$
$$r(x,t))|\psi> = 0,$$

$$<\psi'|[-2\frac{\hat{M}^2}{g}e^{ig\partial_r}(\cos g\partial_r - \cos g\partial_\xi)\Phi + h^2\sigma^2\Phi + 2\frac{1}{\lambda_\alpha}B_\alpha\frac{\delta B_\alpha}{\delta\Phi^+}](\xi(x,t), \qquad /28/$$
$$r(x,t))|\psi> = 0,$$

$$<\psi'|[-2\frac{\hat{M}^2}{g}e^{ig\partial_r}(\cos g\partial_r - \cos g\partial_\xi)\Phi^+ + h^2\sigma^2\Phi^+ + 2\frac{1}{\lambda_\alpha}B_\alpha\frac{\delta B_\alpha}{\delta\Phi}](\xi(x,t),$$
$$r(x,t))|\psi> = 0.$$

Уравнения движения /28/, условия связей /23/, /24/ и коммутационные соотношения /25/ полностью определяют уравнения модели /1/ в новых переменных. Удобство такой формулировки заключается в том, что решение задачи уже не связано с симметрийными свойствами лагранжиана модели /1/. Эффективным методом решения полученных нелинейных уравнений, позволяющим разделить переменные алгебры $\mathcal{A}$ и полей $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\sigma}$, является формализм метода теории возмущений, к построению которого мы и приступаем.

Будем искать поля $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\sigma}$ в виде разложения в ряд по малому параметру $\sqrt{g}$:

$$\tilde{\Phi}(\xi,r) = \Phi_0(\xi,r) + \sqrt{g}\,\Phi_1(\xi,r) + \dots,$$
$$\tilde{\sigma}(\xi,r) = \sigma_0(\xi,r) + \sqrt{g}\,\sigma_1(\xi,r) + \dots. \qquad /29/$$

Воспользуемся тем, что вектор состояния $|\psi>$ является прямым произведением векторов в пространствах представления $\mathcal{H}(\mathcal{A}, Q)$ и $\mathcal{H}(\Phi,\sigma)$. Выберем в пространстве представления алгебры $\mathcal{A}$ две базисные системы $\{|\epsilon p>\}$ и $\{|k\ell>\}$, являющиеся собственными для коммутирующих операторов H, P и K, L. Матричные элементы этих базисных систем имеют вид /19/

$$<rq|\epsilon p> = \frac{1}{2\pi}\exp[-i(\epsilon r - pq)],$$
$$<rq|k\ell> = \frac{1}{4\pi}|r^2 - q^2|^{-1/2}\,|r+q|^{-\frac{1}{2}(k+\ell)}\,|r-q|^{-\frac{1}{2}(k-\ell)}.$$

Нетрудно найти собственные векторы и собственные значения операторов $\hat{\xi}(x,t)$ и $\hat{r}(x,t)$:

$$\hat{\xi}(x,t)\,|\xi, r> = \xi(x,t)\,|\xi, r>, \quad \hat{r}(x,t)\,|\xi, r> = r(x,t)\,|\xi, r>,$$

$$\hat{\xi}(0,0) = -L, \quad \hat{r}(0,0) = -K.$$

Из этих соотношений видно, что

$$|\xi r> = |k\ell>,$$

$$\xi = -\ell, \quad r = -k.$$

Если теперь рассматривать уравнения /22/, /25/, /28/ в виде матричных элементов между $<\epsilon p|$ и $|k\ell>$, то в этих соотношениях операторы алгебры $\mathcal{A}$ заменяются на их собственные значения. Как оказывается, с полученными уравнениями в искомом приближении /29/ можно обращаться непосредственно в операторной форме, а не усреднять по состояниям из пространства $\mathcal{H}(\Phi,\sigma)$.

Важным следствием построенного ковариантного формализма /18/, /20/ в модели мешков является возможность работать с состояниями, отвечающими системе покоя мешка $|M>$:

$$H|M> = M|M>; \quad P|M> = 0.$$

На векторах $|M>$ построение теории возмущений оказывается наиболее удобным. Рассмотрим уравнения нулевого приближения по параметру $\sqrt{g}$, соответствующие системе /28/:

$$-(\partial_\xi^2 - \partial_r^2)\sigma_0 + V'(\sigma_0) + 2h^2\sigma_0|\Phi_0|^2 = 0,$$

$$-(\partial_\xi^2 - \partial_r^2)\Phi_0 + h^2\sigma_0^2\Phi_0 = 2i\omega\partial_r\Phi_0 + \omega^2\Phi_0. \qquad /30/$$

В этих уравнениях и ниже введено обозначение: $\frac{\xi}{M_0} \to \xi, \ \frac{r}{M_0} \to r,$

где M_0 является значением нулевого приближения в разложении собственного значения массового оператора $\hat{M}$: $\hat{M} = M_0 + \sqrt{g}\,\hat{M}_1 + g\hat{M}_2 + \dots$. Система уравнений /30/ допускает стационарное решение вида /9/. Условие, возникающее из /20а/, фиксирует константу M_0:

$$M_0 = \frac{2\omega^2}{g}\int d\xi|\Phi_0|^2 + \frac{1}{g}p\ell, \qquad /31/$$

где в правой части стоит выражение классической энергии системы.

Условие связи /20г/ фиксирует параметр разложения теории g:

$$Q_0 = \frac{\pi}{\ell g}\int d\xi|\Phi_0|^2. \qquad /32/$$

Таким образом, фактическим параметром разложения является обратная величина заряда поля Q_0 /или обратная величина размера мешка ℓ /. Фиксация параметра разложения через физические величины необходимо связана с устойчивостью теории. Известно, что в случае действительного поля Φ и теория самодействующего скалярного поля [27] и теория мешков [25] являются неустойчивыми. В этих теориях нет физическтх величин, с помощью которых мы могли бы фиксировать параметр разложения.

Оставшиеся связи /20б,в/ и коммутационные соотношения /25/ в нулевом приближении выполняются тождественно. Основным состоянием /состоянием полого мешка/ является вектор $|\epsilon p>$, определенный уравнениями ($\epsilon^2 - p^2 = M_0^2$)

$$H|\epsilon p> = \epsilon|\epsilon p>, \quad P|\epsilon p> = p|\epsilon p>$$

и являющийся вакуумом по отношению ко вторично квантованным полям $\tilde{\Phi} - \Phi_0 = \sqrt{g}\,\Phi_1 + \dots, \ \tilde{\sigma} - \sigma_0 = \sqrt{g}\,\sigma_1 + \dots$.

Перейдем к построению теории в первом приближении по параметру разложения $\sqrt{g}$. В силу выполнения уравнений /30/ связь /20а/ приводит к условию $\hat{M}_1 = 0$. С учетом этого условия уравнения движения для функций первого приближения принимают вид

$$[\partial_r^2 - \partial_\xi^2 + 2h^2\Phi_0^2 + V''(\sigma_0)]\sigma_1 + 2h^2\sigma_0\Phi_0[\Phi_1^+ + \Phi_1] = 0,$$

$$[\partial_r^2 - \partial_\xi^2 + h^2\sigma_0^2]\Phi_1 + 2h^2\sigma_0\Phi_0\sigma_1 - \frac{8\omega^2\partial_\xi\Phi_0}{\int dx(\sigma_0'^2 + 2\Phi_0'^2)}\int dx\,\Phi_0'(\Phi_1^+ - \Phi_1) +$$

$$+ \frac{4\omega^2\Phi_0}{\int dx\,(\Phi_0)^2}\int dx\,\Phi_0(\Phi_1^+ + \Phi_1) = 2i\omega\partial_r\Phi_1 + \omega^2\Phi_1. \qquad /33/$$

Эти уравнения удобнее записать через функции

$$R(\xi,r) = \frac{\Phi_1 + \Phi_1^+}{\sqrt{2}}(\xi,r); \quad S(\xi,r) = \frac{\Phi_1 - \Phi_1^+}{\sqrt{2}\,i}(\xi,r); \quad B_0(\xi) = \sqrt{2}\,\Phi_0(\xi), \qquad /34/$$

$$[\partial_r^2 - \partial_\xi^2 + h^2B_0^2 + V''(\sigma_0)]\sigma_1 + 2h^2\sigma_0B_0R = 0, \qquad /35а/$$

$$[\partial_r^2 - \partial_\xi^2 + h^2\sigma_0^2]S + \frac{4\omega^2\partial_\xi B}{\int dx[(\partial_x\sigma_0)^2 + (\partial_x B_0)^2]}\int dx(\partial_x B_0)\cdot S =$$

$$= 2\omega\partial_r R + \omega^2 S, \qquad /35б/$$

$$[\partial_r^2 - \partial_\xi^2 + h^2\sigma_0^2]R + \frac{4\omega^2 B_0}{\int dx (B_0)^2}\int dx B_0 R + 2h^2\sigma_0 B_0\sigma_1 =$$

$$= -2\omega\partial_r S + \omega^2 R. \qquad /35в/$$

Воспользовавшись формулами приложения 2 /П2.1, П2.2/, получим выражения для связей /20б-г/ в рассматриваемом приближении:

$$C_P^{(1)} = \int d\xi \left[\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r} + \frac{\partial B_0}{\partial\xi}\frac{\partial R}{\partial r}\right] = 0, \qquad /36а/$$

$$C_L^{(1)} = \int d\xi \left[\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}\sigma_1 + \frac{\partial B_0}{\partial\xi}R\right] = 0, \qquad /36б/$$

$$C_Q^{(1)} = \int d\xi\, B_0 \frac{\partial S}{\partial r} = 0. \qquad /36в/$$

Если мы хотим воспользоваться свойством полноты некоторой системы функций $\{\chi_n\} = \{(\sigma_n, R_n, S_n)\}$, то возникает еще одна связь, которая является операторным условием:

$$C_C' = \begin{pmatrix} \dot\sigma - \sum_n \dot q_n^R \sigma_n \\ (\dot R + i\dot S) - \sum_n (\dot q_n^R R_n + i\dot q_n^I S_n) - i\omega(R + iS) \end{pmatrix} = 0.$$

Ее также удобно представить в виде

$$C_C' = C_C + B_C, \quad \text{где} \quad B_C = \begin{pmatrix} 0 \\ -i\omega(R + iS) \end{pmatrix}.$$

Как и выше, в уравнениях движения появляются добавочные слагаемые /24/ в результате выбора связи в форме /23/:

$$C_C = 0,$$

$$\dot\sigma = \sum_n \dot q_n^R \sigma_n, \qquad /37/$$

$$\dot R = \sum_n \dot q_n^R R_n, \qquad \dot S = \sum_n \dot q_n^I S_n.$$

Необходимые вычисления и набор функций $\sigma_n(\xi)$, $R_n(\xi)$, $S_n(\xi)$ приведены в приложении 3. Здесь мы приведем результирующее значение

$$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\ell}, & \text{один раз}, \\ \dfrac{n\pi}{\ell}, \quad n = 2,3,\ldots, & \text{два раза}. \end{cases} \qquad /38/$$

Условие /36а/ автоматически исключает из полного набора решений решение уравнений /35/ с нулевой частотой.

Этот результат был получен ранее в работах [23,24], где также исследовалась двумерная модель мешков со скалярными кварками. Отличием подхода, используемого в настоящей работе, от примененных в [23,24] состоит в том, что мы применяем лагранжеву формулировку теории.

С помощью решений /37/ построим в первом приближении ковариантную волновую функцию модели /1/:

$$\Phi_1(x,t) = \int df\, d\omega\, e^{iZ(f,\omega|\hat\xi,\hat r(x,t)) + i\phi}\, \tilde\Phi_1(f,\omega), \qquad /39/$$

где

$$\tilde\Phi_1(f,\omega) = M_0^2 \int \frac{dz\,d\eta}{(2\pi)^2} e^{-iM_0(\omega\eta - fz)}\Phi^{(1)}(\eta, z),$$

а $\Phi^{(1)}(\eta,z)$ - решение уравнений /33/. В случае $s/\sqrt{p} \to \infty$ имеем

$$\Phi^{(1)}(\eta,z) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} (-1)^{[\frac{n}{2}]}\frac{b_n}{n}\{\exp[-\frac{in\pi}{\ell}(\eta - z - \frac{\ell}{2}) -$$

$$- (-1)^n \exp[-\frac{in\pi}{\ell}(\eta + z - \frac{\ell}{2})]\},$$

$$[b_n, b_m^+] = n\delta_{nm}, \quad b_n|M\rangle = 0, \quad n,m = 1,2,3,\ldots.$$

Решение /39/ является основным результатом данного раздела. Перейдем в выражении /39/ к переменным светового фронта:

$$\eta^- = \frac{1}{\sqrt2}(\eta - z), \quad \eta^+ = \frac{1}{\sqrt2}(\eta + z), \quad x^- = -\frac{x-t}{\sqrt2}, \quad x^+ = \frac{x+t}{\sqrt2}, \qquad /40/$$

$$\xi^-(x^+,x^-) = \mathcal{H}x^+ - \mathcal{P}x^- - \mathcal{K}; \quad \xi^+(x^+,x^-) = \mathcal{H}x^- - \mathcal{P}x^+ - \mathcal{L},$$

$$[\mathcal{H},\mathcal{P}] = 0; \quad [\mathcal{K},\mathcal{L}] = 0; \quad [\mathcal{K},\mathcal{H}] = -i\mathcal{H};$$

$$[\mathcal{K},\mathcal{P}] = -i\mathcal{P}, \quad [\mathcal{L},\mathcal{H}] = -i\mathcal{H}; \quad [\mathcal{L},\mathcal{P}] = i\mathcal{P}. \qquad /41/$$

В этих переменных решение /39/ принимает вид

$$\Phi_1(x^+,x^-) = e^{i\phi}\int df\,[e^{-if\xi^-(x^+,x^-)}\tilde\Phi_1^-(f) - e^{-if\xi^+(x^+,x^-)}\tilde\Phi_1^+(f)], \qquad /42/$$

где R - радиус мешка, получаемый из условия минимума классической энергии:

$$\frac{\partial E_0}{\partial R} = 0,$$

$$E_0 = \frac{\omega}{g} \int \psi_0^+ \psi_0 d\vec{x} + \frac{1}{g} \frac{4\pi}{3} R^3 p, \qquad /47/$$

$$N = g^{-1} \int \psi_0^+ \psi_0 \, d\vec{x}.$$

Для построения квантового ковариантного решения нужно построить спинорное представление группы Пуанкаре. Вообще говоря, для этой цели следует рассмотреть алгебру $\mathcal{P}$, соответствующую группе Пуанкаре, и найти 4 операторнозначные эрмитовые функционально-независимые пространственно-временные координаты x_μ. Свойство сферической симметрии решения /45/ означает, что симметрия, связанная с угловыми переменными, спонтанно не нарушена, а радиальная симметрия нарушена. Поэтому в данном случае нет необходимости вводить коллективные угловые переменные. Для описания свойств решения относительно преобразований буста введем произвольно выбранное направление движения $\vec{e}$ и алгебру операторов

$$H, P = (\vec{P}\vec{e}), \quad \vec{P}_\perp, K, \quad L = (\vec{L}\vec{e}), \qquad /48/$$

удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[H,P]=0, \quad [H,K] = igH, \quad [H,L] = -igP,$$

$$[K,L]=0, \quad [P,K] = igP, \quad [P,L] = -igH, \qquad /49/$$

$$[\vec{P}_\perp, H] = [\vec{P}_\perp, P] = [\vec{P}_\perp, L] = [\vec{P}_\perp, K] = 0.$$

Над полем $\sigma(\vec{x}, t)$ произведем преобразование Боголюбова, которое реализует скалярное представление алгебры операторов /48/:

$$\sigma(x, \vec{x}_\perp, t) = \tilde{\sigma}(\hat{\xi}(\vec{x}, t), \hat{\vec{\eta}}_\perp, \hat{r}(\vec{x}, t)) \equiv$$

$$\equiv \int df d\vec{f}_\perp d\omega \exp[i(\omega \hat{r} - f\hat{\xi} - \vec{f}_\perp \hat{\vec{\eta}}_\perp)] \hat{\sigma}(f, \vec{f}_\perp, \omega). \qquad /50/$$

Переменные $\hat{r}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\vec{\eta}}$, входящие в /50/, определены выражениями

$$\hat{r}(\vec{x}, t) = Ht - P(\vec{x}\vec{e}) - K,$$

$$\hat{\xi}(\vec{x}, t) = H(\vec{x}\vec{e}) - Pt - L,$$

$$\vec{\eta}(\vec{x}) = \vec{x} - \vec{q}, \qquad /51/$$

где координаты $\vec{q}_\perp$ канонически сопряжены с $\vec{P}_\perp$:

$$[q^i_\perp, P^j_\perp] = i\delta^{ij}. \qquad /52/$$

Выбор переменных $\hat{r}$, $\hat{\xi}$, $\hat{\vec{\eta}}_\perp$ в виде /51/ приводит к использованию представления алгебры /48/, соответствующего группе трансляций. В более сложном случае сферически-несимметричных решений классических уравнений для реализации набора переменных $\hat{r}(\vec{x}, t)$, $\hat{\xi}(\vec{x}, t)$ необходимо вводить более сложные представления группы Пуанкаре /19/. При этом появляются новые коллективные переменные, связанные с вращениями в четырехмерном пространстве.

Для построения ковариантного поля $\psi(\vec{x}, t)$ необходимо выполнить преобразование Боголюбова, реализующее спинорное представление алгебры /48/ /18/. В этом случае замена /50/, которая приводит к преобразованию спинорной части оператора Гамильтона:

$$H_\psi \to D^{-1}(\theta) H_\psi D(\theta), \qquad /53/$$

дополняется преобразованием спинорной волновой функции:

$$\psi(\vec{x}, t) = D(\theta) \tilde{\psi}(\hat{\xi}(\vec{x}, t), \hat{\vec{\eta}}_\perp(\vec{x}), \hat{r}(\vec{x}, t)),$$

$$\psi(\hat{\xi}, \hat{\vec{\eta}}_\perp, \hat{r}) \equiv \int df d\vec{f}_\perp d\omega \exp[i(\omega r - f\xi - \vec{f}_\perp \vec{\eta}_\perp)] \ddot{\psi}(f, \vec{f}_\perp, \omega). \qquad /54/$$

Матрица $D(\theta)$, являющаяся неприводимой спинорной составляющей представления группы Пуанкаре, имеет вид

$$D(\theta) = \exp\{i\theta(\vec{p})\sigma_{0i} e_i\}, \qquad /55/$$

где $\sigma_{0i} = \frac{1}{2}[\gamma_0, \gamma_i]$ - генератор преобразования Лоренца спинорного поля. После преобразований /50/, /54/ уравнения движения /44/ для поля $\psi(\vec{x}, t)$ не меняют своего вида, поскольку имеем

$$\partial_\mu \gamma^\mu = D_\nu \Gamma_\nu, \qquad /56/$$

где

$$D_\nu = \left(i\frac{\partial}{\partial r}, -i\frac{\partial}{\partial \xi}, -i\frac{\partial}{\partial \eta^1_\perp}, -i\frac{\partial}{\partial \eta^2_\perp}\right),$$

$$\Gamma^\nu = D(\theta)\gamma^\nu D^{-1}(\theta),$$

$$L_e(\theta) = \frac{1}{M}\begin{pmatrix} H & 0 & 0 & P \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ P & 0 & 0 & H \end{pmatrix}$$

– оператор чисто лоренцева преобразования вдоль $\vec{e}$.

Таким образом, построена реализация алгебры /48/ скалярного /50/ и спинорного /54/ полей в четырехмерном пространстве /51/ для сферически-симметричного случая. Операторы H, P, $\vec{P}_\perp$, K, L приобретают смысл генераторов временных, продольных и поперечных трансляций, масштабных и лоренцевых преобразований в плоскости $(t, \vec{e})$ соответственно и должны выражаться через поля σ, ψ:

$$C_H = H - g^{-1}\int d\vec{x}\{\frac{1}{2}(\frac{\partial\sigma}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\sigma)^2 + V(\sigma) - \psi^+(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + h\beta\sigma)\psi\} = 0,$$

$$C_P = P^i + g^{-1}\int d\vec{x}[\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{i}{2}(\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi^+}{\partial x_i}\psi)] = 0, \qquad /57/$$

$$C_L = L_e - \int d\vec{x}(\vec{x}\vec{e})\,\mathcal{H}(\vec{x}, t) + t\int d\vec{x}(\vec{\mathcal{P}}(\vec{x}, t)\,\vec{e}) = 0.$$

Дополнительно имеется связь, обусловленная законом сохранения числа фермионов:

$$C_N = N - g^{-1}\int d\vec{x}\psi^+\psi = 0. \qquad /58/$$

Кроме того, необходимо потребовать выполнения в новых переменных коммутационных соотношений

$$[\sigma(\vec{x}, t),\ \dot{\sigma}(\vec{y}, t)] = ig\delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

$$\{\psi(\vec{x}, t),\ \psi^+(\vec{y}, t)\} = g\delta(\vec{x} - \vec{y}). \qquad /59/$$

Все остальные одновременные коммутаторы между $\sigma(\vec{x}, t)$, $\dot{\sigma}(\vec{x}, t)$, $\psi(\vec{x}, t)$ и $\psi^+(\vec{x}, t)$ равны нулю. Система квантовых уравнений движения в слабой форме является следствием уравнений /57-59/:

$$<\psi'|[(\partial_t^2 - \partial_x^2)\sigma + V'(\sigma) + h\bar{\psi}\psi](\hat{\vec{\xi}}(\vec{x}, t), \hat{r}(\vec{x}, t))|\psi> = 0,$$

$$<\psi'|[i\gamma^0\partial_t + i\gamma^1\partial_i - h\sigma]\psi(\hat{\vec{\xi}}(\vec{x}, t), \hat{r}(\vec{x}, t))|\psi> = 0, \qquad /60/$$

$$<\psi'|\psi^+[i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_t + i\gamma^1\overleftarrow{\partial}_i + h\sigma](\hat{\vec{\xi}}(\vec{x}, t), \hat{r}(\vec{x}, t))|\psi> = 0.$$

Далее, пользуясь ковариантностью формулировки модели /43,50,54/,

уравнения движения, связи, коммутационные соотношения и другие операторные выражения будут рассматриваться на векторах состояния $|M>$ соответствующих систем покоя.

Разложим в ряд по малому параметру операторы поля $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\psi}$ и массы $\hat{M}$:

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 + \sqrt{g}\sigma_1 + \dots;\quad \tilde{\psi} = \psi_0 + \sqrt{g}\psi_1 + \dots,$$

$$\hat{M} = M_0 + \sqrt{g}\hat{M}_1 + \dots, \qquad /61/$$

и рассмотрим нулевой по параметру $\sqrt{g}$ порядок теории возмущений. Уравнения движения

$$-M_0^2(\partial_\xi^2\sigma_0 + \partial_\perp^2\sigma_0) + V'(\sigma_0) + h\bar{\psi}_0\psi_0 = 0,$$

$$(iM_0\gamma^\mu\partial_\mu - h\sigma_0)\psi_0 = 0 \qquad /62/$$

имеют решения /45/ с заменой $\frac{r(\vec{\xi})}{M_0} \to r$, $\frac{r}{M_0} \to r$. Связи C_H /57/ и C_N /58/ фиксируют значения параметров M_0 и g:

$$M_0 = \frac{1}{g}\omega\int\psi_0^+\psi_0\, d\xi\, d\vec{\eta}_\perp + \frac{1}{g}\frac{4\pi}{3}R^3 p, \qquad /63/$$

$$N = \frac{i}{g}\int\psi_0^+\psi_0\, d\xi\, d\vec{\eta}_\perp. \qquad /64/$$

В /63/ радиус мешка R определяется из условия минимума энергии $\frac{\partial E}{\partial R} = 0$. Формула /64/ означает, что параметром разложения g является обратная величина числа фермионов. Отметим, что солитоноподобные решения модели /43/ являются устойчивыми по отношению к распаду /25/. Связи C_P, C_L /57/ и коммутационные соотношения /59/ в нулевом приближении выполняются тождественно.

Перейдем к рассмотрению уравнений модели в первом порядке теории возмущений по $\sqrt{g}$. В этом случае согласованным является выбор $\hat{M}_1 = 0$. Удобно определить функции

$$R(\vec{\xi}, r) = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_1(\vec{\xi}, r)e^{i\omega r} + C[\psi_1^+(\vec{\xi}, r)\gamma_0]^T e^{-i\omega r}\},$$

$$S(\vec{\xi}, r) = \frac{1}{\sqrt{2}i}\{\psi_1(\vec{\xi}, r)e^{i\omega r} - C[\psi_1^+(\vec{\xi}, r)\gamma_0]^T e^{-i\omega r}\}. \qquad /65/$$

Уравнения движения и связи принимают следующий вид:

$$(\partial_\tau^2 - \partial_e^2 - \partial_\perp^2)\sigma_1 + V''(\sigma_0)\sigma_1 + \frac{h}{2}(R_0^T R_1 + R_1^T R_0) = 0\,,$$

$$i\gamma^0\partial_\tau R + i\gamma^e\partial_e R + i\vec{\gamma}^\perp\vec{\partial}_\perp R - h\sigma_0 R - h\sigma_1 R_0 = -i\omega\gamma^0 S\,, \qquad /66/$$

$$i\gamma^0\partial_\tau S + i\gamma^e\partial_e S + i\vec{\gamma}^\perp\vec{\partial}_\perp S - h\sigma_0 S = i\omega\gamma^0 R\,,$$

$$C^{(1)}_{P_i} = \int d\vec{x}\Big[\frac{\partial\sigma_0}{\partial x^i}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\Big(R_1^T\gamma^0\frac{\partial R_0}{\partial x^i} - \frac{\partial R_0^T}{\partial x^i}\gamma^0 R_1\Big)\Big] -$$

$$- i\int d\vec{x}\Big(\frac{\partial R_0^T}{\partial x^i}\gamma_0 S_1 + S_1^T\gamma_0\frac{\partial R_0}{\partial x^i}\Big) = 0\,, \qquad /67/$$

$$C_N^{(1)} = \frac{1}{2}\int d\vec{x}\,(R_1^T\gamma_0 R_0 + R_0^T\gamma^0 R_0) + \frac{i}{2}\int d\vec{x}\,(R_0^T\gamma^0 S_1 - S_1^T\gamma^0 R_0) = 0\,.$$

С помощью квантового условия полноты

$$C_C = \dot{\Phi} - \sum_n \dot{q}_n\chi_n = 0$$

решения уравнений /66/ можно записать в виде

$$\sigma^\ell(\vec{\xi},\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^R\sigma_n(r)\,Y_{\ell m}(\hat{\vec{r}})\,,$$

$$R^\ell(\vec{\xi},\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^R\begin{pmatrix} R_n^\ell(r) \\ i\tilde{R}_n^\ell(r)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{\ell,m-1/2}(\hat{\vec{r}}) \\ Y_{\ell,m+1/2}(\hat{\vec{r}})\end{pmatrix}, \qquad /68/$$

$$S^\ell(\vec{\xi},\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n^I\begin{pmatrix} S_n^\ell(r) \\ i\tilde{S}_n^\ell(r)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_{\ell,m-1/2}(\hat{\vec{r}}) \\ Y_{\ell,m+1/2}(\hat{\vec{r}})\end{pmatrix},$$

$$r = \sqrt{\xi^2 + \vec{\eta}_\perp^{\,2}}\,.$$

Для случая $\ell = 0$, $J_z = -\frac{1}{2}$, где J - полный момент, решениями уравнений /66/ являются состояния статического мешка:

$$\tilde{\psi}_1(\xi,\vec{\eta}_\perp,\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} N_m b_m\begin{pmatrix} j_0(k_m r) \\ i j_1(k_m r)\,\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{r}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-ik_m\tau}\,,$$

$$\{b_m, b_n^+\} = \delta_{mn}\,,\quad b_m|M\rangle = 0\,,\quad m,n = 1,2,\dots\,. \qquad /69/$$

С помощью решения /69/ нетрудно восстановить ковариантную волновую функцию:

$$\psi_1(\vec{x},t) = \int df\,d\omega\,d\vec{f}_\perp\, e^{i[\omega\hat{\tau}(\vec{x},t) - f\hat{\xi}(\vec{x},t) - \vec{f}_\perp\vec{\eta}_\perp(x)]}\,\Phi(\omega,\vec{f})\,D(\theta(\vec{p}))\,,$$

$$\Phi(\omega,\vec{f}) = \int\frac{d\beta\,d\alpha\,d\vec{\alpha}_\perp}{(2\pi)^4}\,e^{-i(\beta\omega - \vec{f}\vec{\alpha})}\,\tilde{\psi}_1(\alpha,\vec{\alpha}_\perp,\beta)\,. \qquad /70/$$

Как отмечалось выше /раздел 1/, в четырехмерном случае точное решение модели мешков неизвестно. В настоящей работе, применяя каноническое преобразование Н.Н.Боголюбова, мы построили приближенное ковариантное решение. Найденная волновая функция /70/ играет роль решения, полученного в L_0-приближении. Отметим, что наше решение по форме отличается от вида функции [7], построенной по аналогии с двумерной моделью.

Автор выражает свою признательность П.Н.Боголюбову за полезные советы и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть функция Лагранжа $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\phi, \partial_\nu\phi)$ инвариантна относительно преобразований

$$\phi(\vec{x},t) \to T(a)\,\phi(\vec{x},t)$$

некоторой непрерывной r-параметрической группы G с законом умножения

$$g(a)\,g(b) = g(c)\,,\ \text{где}\quad c_\alpha = c_\alpha(a,b)\,.$$

Здесь $a = (a_1,\dots,a_r)$ - параметры группы, g - ее элементы, а операция T задает некоторое представление абстрактной группы G, соответствующее преобразованиям пространственных переменных или компонент поля ϕ.

Перейдем к новым переменным с помощью преобразования Боголюбова:

$$\phi(x) = T(a)\,\tilde{\phi}(\tilde{x})\,.$$

В новых переменных лагранжиан содержит связи, которые в общем виде записываются следующим образом [13]:

$$C^{\alpha} = L^{\alpha'} - \int d\vec{x}(\dot{\phi}^{+})([X^{\alpha}\phi]) = 0\,, \qquad /П1.1/$$

где L^{α} - вклад в связи новых коллективных переменных a_{α}, а оператор X^{α} является генератором соответствующего преобразования симметрии. Например, имеем

$$X^{P_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,, \quad X^{Q} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

для пространственных трансляций и зарядовых преобразований соответственно.

Связи /22/ имеют вид

$$C'_{\alpha} = C_{\alpha} + B_{\alpha} = 0\,. \qquad /П1.2/$$

Потребуем выполнения канонических связей /П1.1/: $C_{\alpha}=0$. Нетрудно тогда проверить, что условия /П1.2/ примут вид /П1.1/, если произвести в выражениях для связей сдвиг:

$$\dot{\phi}^{+} \to \dot{\phi}^{+} - \frac{1}{\lambda_{\alpha}} B_{\alpha}[X^{\alpha}\phi]^{+}, \qquad \alpha = P, Q, \dots,$$

где

$$\lambda_{\alpha} = \int d\vec{x}[X^{\alpha}\phi]^{+}[X^{\alpha}\phi].$$

В результате этой операции получаем эффективный гамильтониан

$$H' = H + \sum_{\alpha} u_{\alpha} B_{\alpha}^{2}\,, \quad \text{где} \quad u_{\alpha} = \frac{1}{\lambda_{\alpha}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении мы приводим некоторые вспомогательные формулы, вывод которых содержится для случая двумерного скалярного поля в /20/.

В выражениях интегралов, входящих в связи /22/, входят интегралы двух типов:

$$\hat{I}_1 = \int dx\, f(\hat{\xi}(x,t),\ \hat{r}(x,t))\,,$$

$$\hat{I}_2 = \int dx\, x f(\hat{\xi}(x,t),\ \hat{r}(x,t))\,.$$

Справедлива замена переменной интегрирования, при которой интегрирование производится по спектру оператора $\hat{\xi}$:

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{H}\int d\xi\, f(\xi, \eta(t,\xi))\,, \qquad /П2.1а/$$

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{H}\int d\xi\, (\xi + Pt + L)\frac{1}{H} f(\xi, \eta(t,\xi))\,, \qquad /П2.1б/$$

где

$$\eta(t,\xi) = \frac{H^2 - P^2}{H} t - \frac{P}{H}\xi - L\frac{P}{H} - K\,.$$

Для вычисления матричных элементов типа $\langle \epsilon p|\hat{I}|k\ell\rangle$, где $|\epsilon p\rangle$, $|k\ell\rangle$ - базисные элементы /28/, удобно представлять оператор $\hat{I}$ в "N-упорядоченной форме", располагая операторы H, P слева, а операторы K, L справа:

$$f(\hat{\xi},\hat{\eta}) = N(f(\xi,\eta)) - ig\left(1 - \frac{P^2}{H^2}\right) N(\partial_{\eta} f(\xi,\eta)) + O(g^2)\,, \qquad /П2.2а/$$

$$(\xi + L)\frac{1}{H} f(\hat{\xi},\hat{\eta}) = N\left(\frac{\xi + L}{H} f(\xi,\eta)\right) - ig\frac{P}{H^2} N(f(\xi,\eta)) -$$

$$- 2ig\left(1 - \frac{P^2}{H^2}\right)\frac{1}{H} N((\xi + L)\,\partial_{\eta} f(\xi,\eta)) + O(g^2)\,. \qquad /П2.2б/$$

Коммутационные соотношения в новых переменных для действительного поля с точностью до членов порядка g^2 имеют вид

$$[\sigma(x,t), \sigma(x',t)] = g[\sigma_1(\xi,r), \sigma_1(\xi',r')]_{\sigma} -$$

$$- ig\left[(r - r')\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi'} + \frac{\partial\sigma_0}{\partial r}\frac{\partial\sigma_0}{\partial r'}\right) + (\xi - \xi')\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_0}{\partial r'} + \frac{\partial\sigma_0}{\partial r}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi'}\right)\right] +$$

$$+ g^{3/2}\left([\sigma_1(\xi,r), \sigma_2(\xi',r')]_{\sigma} + [\sigma_2(\xi,r), \sigma_1(\xi',r')]_{\sigma}\right) - \qquad /П2.3/$$

$$- ig^{3/2}\left[(r - r')\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi'} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi'} + \frac{\partial\sigma_0}{\partial r}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r'} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\frac{\partial\sigma_0}{\partial r'}\right) +\right.$$

$$\left. + (\xi - \xi')\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_1}{\partial r'} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi}\frac{\partial\sigma_0}{\partial r'} + \frac{\partial\sigma_0}{\partial r}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\xi'} + \frac{\partial\sigma_1}{\partial r}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi'}\right)\right] + O(g^2).$$

Для матричных элементов $\langle M|[\sigma(x,t), \sigma(x',t)]|k\ell\rangle$ операторы $\hat{\xi}, \hat{r}$ сводятся к числам $\xi = x$, $r = t$.

В /П2.3/ индекс σ при коммутаторе означает, что в этом выражении операцию коммутирования следует рассмотреть лишь для операторов σ, считая $\hat{\xi}$ и $\hat{r}$ коммутирующими переменными. Аналогичные выражения строятся для других коммутаторов.

Кроме того, выпишем выражения для матричного элемента поля $\Phi(x,t)$:

$$\langle\epsilon p|\Phi(x,t)|k\ell\rangle = \langle\epsilon p|k\ell\rangle\{1 + ig[\frac{1}{2}(\epsilon t - px)(\partial_r^2 + \partial_\xi^2) + 2(\epsilon x - pt)\partial^2_{\xi_r}]\}\tilde{\Phi}(\epsilon x - pt - \ell,\ \epsilon t - px - k) + O(g^2). \qquad /П2.4/$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Уравнения /35/ для определения функций $R(\xi,r)$, $S(\xi,r)$ и $\sigma(\xi,r)$ полностью соответствуют гамильтоновым уравнениям движения работы [24], которые получены в первом приближении нековариантной теории возмущений. В настоящем приложении мы воспользуемся процедурой диагонализации, примененной в [24], для построения решения системы /35/.

Подставим выражения /37/ в уравнения /35/:

$$[-\partial_\xi^2 + h^2B_0^2 + V''(\sigma_0)]\sigma_n(\xi) + 2h^2\sigma_0B_0R_n(\xi) = \Omega^2\sigma_n(\xi), \qquad /П3.1/$$

$$[-\partial_\xi^2 + h^2\sigma_0^2 - \omega^2]R_n(\xi) + 2h^2\sigma_0B_0\sigma_n(\xi) + \frac{4\omega^2B_0}{\int dx\,B_0^2}\int dx\,B_0R_n = -2i\omega\Omega S_n(\xi) + \Omega^2R_n(\xi), \qquad /П3.2/$$

$$[-\partial_\xi^2 + h^2\sigma_0^2 - \omega^2]S_n(\xi) + \frac{4\omega^2\partial_\xi B_0}{\int dx[(\partial_x\sigma_0)^2 + (\partial_xB_0)^2]}\int dx\,\partial_xB_0S_n = 2i\omega\Omega R_n(\xi) + \Omega^2S_n(\xi), \qquad /П3.3/$$

Рассмотрим уравнение /П3.3/ и найдем собственные значения и собственные функции оператора $H_s = -\partial_\xi^2 - \omega^2 + h^2\sigma_0^2$, входящего в это уравнение:

$$H_sS_n = \mu_nS_n. \qquad /П3.4/$$

Решением этой задачи является набор функций:
для четной четности:

$$S_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos(\frac{2n+1}{\ell}\pi\xi) + O(\frac{1}{h}), & |x| < \frac{1}{2}\ell,\ n > 1, \\ O(\frac{1}{h}), & |x| > \frac{1}{2}\ell, \end{cases} \qquad /П3.5/$$

$$\mu_n = (2n+1)^2(\frac{\pi}{\ell})^2 - (\frac{\pi}{\ell})^2;$$

для нечетной четности:

$$S_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin(\frac{2n\pi}{\ell}\xi) + O(\frac{1}{h}), & |x| < \frac{1}{2}\ell,\ n \geq 1, \\ O(\frac{1}{h}), & |x| > \frac{1}{2}\ell, \end{cases} \qquad /П3.6/$$

$$\mu_n = (4n^2 - 1)(\frac{\pi}{\ell})^2.$$

Очевидно, что функция σ_0 удовлетворяет уравнению /П3.4/, поэтому условие /36в/ выполнено.

Рассмотрим теперь уравнения /П3.1/, /П3.2/ и произведем их частичную диагонализацию, то есть решим задачу на собственные значения для системы

$$\begin{aligned} &[-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + h^2B_0^2 + V''(\sigma_0)]\sigma_n + 2h^2\sigma_0B_0R_n = 0, \\ &[-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + h^2\sigma_0^2 - \omega^2]R_n + 2h^2\sigma_0B_0\sigma_n = 0. \end{aligned} \qquad /П3.7/$$

Решением первого из уравнений /П3.7/ с требуемой точностью является система функций, пропорциональная скачку σ_0 на поверхности мешка. Они имеют вид

$$\sigma_n = \sigma_0'\frac{\int d\xi\,\sigma_0'\sigma_0B_0R_n}{\int d\xi\,\sigma_0'\sigma_0B_0B_0'} + |\sigma_0'|\frac{\int d\xi\,|\sigma_0'|\sigma_0B_0R_n}{\int d\xi\,\sigma_0'\sigma_0B_0B_0'}. \qquad /П3.8/$$

Решение второго уравнения в /П3.7/ уже нетрудно найти, подставив в это уравнение сингулярную функцию /П3.8/ и использовав условия сшивки в особых точках уравнения. Окончательно имеем для решений четной четности:

$$R_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\ell}}\cos(\frac{2n\pi}{\ell}\xi) + O(\frac{1}{h}), & |x| < \frac{1}{2}\ell, \\ \sqrt{\frac{2}{\ell}}(-1)^n e^{-h(|\xi| - \ell/2)}, & |x| > \frac{1}{2}\ell, \end{cases} \qquad /П3.9/$$

$$\lambda_n = (4n^2 - 1)(\frac{\pi}{\ell})^2, \quad n \geq 1,$$

$$R_0(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\ell}} + O(\frac{1}{h}), & |x| < \frac{1}{2}\ell, \\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}e^{-h(|\xi| - \ell/2)}, & |x| > \frac{1}{2}\ell, \end{cases}$$

$$\lambda_0 = -(\pi/\ell)^2;$$

для решений нечетной четности:

$$R_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin[\frac{(2n+1)\pi}{\ell}\xi] + O(\frac{1}{h}), & |x| < \frac{1}{2}\ell, \\ \sqrt{\frac{2}{\ell}} (-1)^n e^{-h(|\xi| - \ell/2)}, & |x| > \frac{1}{2}\ell, \end{cases}$$

$$\lambda_n = [(2n+1) \quad -1]\frac{\pi^2}{\ell^2}.$$

Отметим также, что функции σ_0', B_0' являются собственными функциями уравнений /П3.7/ с собственным значением $\lambda = 0$. В силу этого автоматически выполнено дополнительное условие /36а/ и /36б/.

После подстановки полученных систем решений /П3.5/, /П3.8/ и /П3.9/ в уравнения /П3.3/ получим систему однородных уравнений, условие совместимости которой определяет спектр частот Ω_n. При этом получаются два спектральных условия, соответствующих решениям разной четности [24]:

$$\Omega_n = \begin{cases} \frac{n\pi}{\ell}, \ n = 2,3,\ldots & \text{- нечетная четность,} \\ \frac{n\pi}{\ell}, \ n = 1,2,3,\ldots & \text{- четная четность.} \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Bogolubov P.N. Ann.Inst.Henri Poincare, 1968, 8, p.163-190; Боголюбов П.Н. ЭЧАЯ, 1972, 3, № 1, с.144-174.
2. Chodos A. et al. Phys.Rev., 1974, D9, No.12, p.3471-3495.
3. De Grand T. et al. Phys.Rev., 1975, D12, No.7, p.2060-2076.
4. Jaffe R.L. Phys.Rev., 1974, D11, No.6, p.1953-1968.
5. Davis A.C., Squires E.J. Phys.Rev., 1979, D19, No.1, p.388-390.
6. Krapchev V. Phys.Rev., 1976, D13, No.1, p.329-336.
7. Jaffe R.L. Ann.of Phys., 1981, 132, No.1, p.32-52.
8. Donohue J.F., Johnson K. Phys.Rev., 1980, D21, No.7, p.1975-1985.
9. Wong C.W. Phys.Rev., 1981, D24, No.5, p.1416-1419.
10. Picek I., Tadic D. Phys.Rev., 1983, D27, No.3, p.665-667; Hwang W.-Y.P. Z.Phys.C, 1983, 16, No.4, p.327-330.
11. Arisue H. Progr.Theor.Phys., 1980, 66, No.4, p.1395-1407.
12. Боголюбов Н.Н. Укр.мат.ж., 1950, 2, с.3-24.
13. Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. ТМФ, 1972, 11, № 3, с.317-330.
14. Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Yu. Nucl.Phys., 1980, B172, No.1, p.44-56.

15. Архипов А.А., Тюрин Н.Е. ТМФ, 1973, 17, № 1, с.57-66; Разумов А.В., Хрусталев О.А. ТМФ, 1976, 29, № 3, с.300-308.
16. Tomboulis E. Phys.Rev., 1975, D12, No.6, p.1678-1684.
17. Christ N.-H., Lee T.D. Phys.Rev., 1975, No.6, p.1666-1678.
18. Gerveis J.-L., Jevicki A., Sakita B. Phys.Rep., 1976, 23C, p.281-321.
19. Свешников К.А. Препринт ИФВЭ, 82-35, Серпухов, 1982; 82-79, Серпухов, 1982.
20. Свешников К.А. Препринт ИФВЭ, 82-36, Серпухов, 1982.
21. Steinmann O. Nucl.Phys., 1977, B131, No.4/5, p.459-476.
22. Matsumoto H. et al. Phys.Rev., 1981, D23, No.6, p.1339-1350; ibid, D24, No.2, p.406-415.
23. Rebbi C. Phys.Rev., 1976, D14, No.9, p.2362-2373.
24. Breit J.D. Nucl.Phys., 1982, B202, No.1, p.147-172.
25. Friedberg R., Lee T.D. Phys.Rev., 1977, D15, No.6, p.1694-1708.
26. Friedberg R., Lee T.D. Phys.Rev., 1977, D16, No.4, p.1096-1116.
27. Derrick G.N. Journ. Math.Phys., 1964, 5, No.9, p.1252-1254.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 августа 1983 года.

Дорохов А.Е. Д2-83-626

Ковариантное квантование модели мешков

В работе методом канонического преобразования Н.Н.Боголюбова построены квазиклассические ковариантные решения модели мешков.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Dorokhov A.E. D2-83-626

The Covariant Quantization of the Bag Model

Quasiclassical covariant solutions of the bag model are constructed by the N.N.Bogolubov method of canonical transformations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983